НОВАЯ РЕДАКЦИЯ

Серия

РЕШЕ

NEW

ТОЛЬКО ДЛЯ РОДИТЕЛЕЙ

Домашняя работа по алгебре

ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

9

«АЛГЕБРА. 9 класс»
Ю.Н. Макарычев,
Н.Г. Миндюк,
К.И. Нешков, С.Б. Суворова;
под редакцией
С.А. Теляковского

В.Е. Бачурин

Домашняя работа по алгебре за 9 класс

к учебнику «Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. — 17-е изд. — М.: Просвещение, 2010»

Издание пятнадцатое, переработанное и исправленное

Издательство
«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА
2012

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
Б32

Имена авторов и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Условия заданий приводятся исключительно в учебных целях и в необходимом объеме — как иллюстративный материал.

Изображение учебника «Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. — 17-е изд. — М.: Просвещение, 2010» приведено на обложке данного издания исключительно в качестве иллюстративного материала (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Бачурин, В.Е.
Б32 Домашняя работа по алгебре за 9 класс к учебнику Ю.Н. Макарычева и др. «Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений» / В.Е. Бачурин. — 15-е изд., перераб. и испр. — М.: Издательство «Экзамен», 2012. — 222, [2] с. (Серия «Решебник»)

ISBN 978-5-377-04795-7

В пособии решены и в большинстве случаев подробно разобраны задачи и упражнения из учебника «Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. — 17-е изд. — М.: Просвещение, 2010».

Пособие адресовано родителям, которые смогут проконтролировать правильность решения, а в случае необходимости помочь детям в выполнении домашней работы по алгебре.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

Подписано в печать 16.09.2011. Формат 84x108/32.
Гарнитура «Таймс». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 8,14.
Усл. печ. л. 11,76. Тираж 30 000 экз. Заказ № 10898(3)

ISBN 978-5-377-04795-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 1. Функции и их свойства

1. а) $f(-1) = -3\cdot(-1)^2 + 10 = 7$; б) $f(0) = -3\cdot 0^2 + 10 = 10$;

в) $f(\frac{1}{3}) = -3\cdot(\frac{1}{3})^2 + 10 = -3\cdot\frac{1}{9} + 10 = 9\frac{2}{3}\ 9\frac{2}{3}$.

2. а) $f(0) = \frac{0-0,5}{0+0,5} = \frac{-0,5}{0,5} = -1$; б) $f(1,5) = \frac{1,5-0,5}{1,5+0,5} = \frac{1}{2}$;

в) $f(-1) = \frac{-1-0,5}{-1+0,5} = \frac{-1,5}{-0,5} = 3$.

3. а) $f(5) = 5^3-10 = 125-10 = 115$. б) $f(4) = 4^3-10 = 64-10 = 54$.
в) $f(2) = 2^3-10 = 8-10 = -2$. г) $f(-3) = (-3^3)-10 = -27-10 = -37$.
4. 1) $\varphi(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$; 2) $\varphi(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$;
3) $\varphi(2) = 2^2 + 2 + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$; 4) $\varphi(3) = 3^2 + 3 + 1 = 9 + 3 + 1 = 13$;
$\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) = 1 + 3 + 7 + 13 = 24$.

5. а) $-5x + 6 = 17$; $-5x = 17-6$; $x = \frac{11}{-5} = -2,2$.

б) $-5x + 6 = -3$; $5x = 6 + 3$; $5x = 9$; $x = 1\frac{4}{5}$. в) $-5x + 6 = 0$; $5x = 6$; $x = 1\frac{1}{5}$.

6. а) $x(x + 4) = 0$; $x_1 = 0$, $x + 4 = 0$; $x_2 = -4$. б) $\frac{x+1}{5-x} = 0$; $\begin{cases} x+1=0 \\ 5-x \neq 0 \end{cases}$; $x = -1$.

7. а) $\frac{4}{6+x} = 1$;$4 = 1\cdot(6 + x)$; $4 - 6 = x$; $x = -2$.

б) $\frac{4}{6+x} = -0,5$; $4 = -0,5(6 + x)$; $8 = -6-x$; $x = -14$.

в) $\frac{4}{6+x} = 0$; $4 = (6 + x)\cdot 0$; $4 = 0$; нет решений.

8. а) $0,5x-4 = -5$, $0,5x = -1$, $x = -\frac{1}{0,5}$, $x = -2$.

б) $0,5x-4 = 0$, $0,5x = 4$, $x = \frac{4}{0,5}$, $x = 8$.; в) $0,5x-4 = 2,5$, $0,5x = 6,5$, $x = \frac{6,5}{0,5}$, $x = 13$.

9. а) Область определения – все числа.
б) Область определения – все числа.
в) $5-x \neq 0$, $x \neq 5$. Область определения – все числа, кроме 5.
г) $(x-4)(x + 1) \neq 0$; $x-4 \neq 0$; $x \neq 4$ и $x + 1 \neq 0$; $x \neq -1$.
Область определения – все числа, кроме $x = 5$; $x = -1$.
д) $x^2 + 1 = 0$ — нет решений. Область определения – все числа.
е) $x-5 \geq 0$; $x \geq 5$. Область определения: $x \geq 5$.

10. а) $y = 10x$; б) $y = \frac{6}{5x-35}$

11. а) Область определения – все числа.
б) $1 + x \neq 0$; $x \neq -1$. Функция не определена при $x = -1$.
в) $9 + x \geq 0$; $x \geq -9$. Функция определена при всех $x \geq -9$.

12. $\frac{h}{0,75t} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow h = \frac{3}{8}t$

а) $h = \frac{3}{8}t = \frac{3}{8} \cdot \frac{9}{4} \cdot 60 = 50,625$ м б) $t = \frac{8}{3}h = 160$ с.

13. а) $S = \frac{v_0^2}{g} = 3600 = 36$ км. б) $v_0 = \sqrt{S \cdot g} \approx 490$ м/с.

14. а) $y = x^2 + \sqrt{|x| - 1}$; ООФ: $|x| - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1$.
Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.
б) $y = \sqrt{|2 - x| - 3x}$

ООФ: $|2 - x| - 3x \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 - x - 3x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2 - 3x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x \leq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

15. а) $g(-4) = -3$; $g(-1) \approx -2$; $g(1) = 3$; $g(5) = 3$;
б) $g(x) = 4$ при $x \approx 1,3$, $x \approx 4,4$; $g(x) = -4$ при $x = -3$; $g(x) = 0$ при $x = -5$, $x = 0$;
в) Наибольшее значение функции равно 6 при $x = 3$; наименьшее значение равно -4 при $x = -3$.
г) Область значений: $[-4; 6]$.

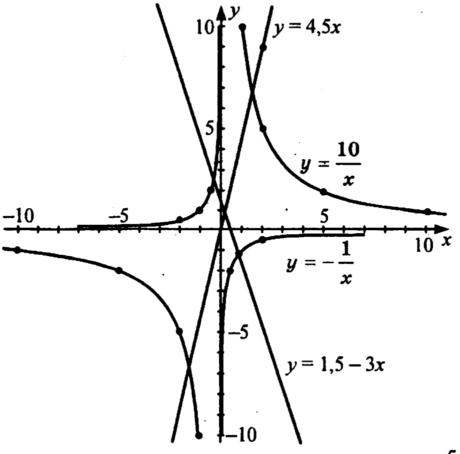
16. а) 751 мм.рт.ст. — 5 марта, 752 мм.рт.ст. — 9 марта; б) 7 марта.

17. а) $D(f) = (-\infty; \infty)$;
$E(f) = (-\infty; \infty)$.

б) $D(f) = (-\infty; \infty)$;
$E(f) = (-\infty; \infty)$.

в) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;
$E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

г) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;
$E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.



18. а) $f(x) = 2x - 1$; $1 \le x \le 4 \Leftrightarrow 1 \le 1 \le 2x - 1 \le 7$. Ответ: [1; 7].
б) $g(x) = -3x + 8$; $-2 \le x \le 5 \Leftrightarrow -7 \le -3x + 8 \le 14$. Ответ: [–7; 14].
19. 1) $y = x^2$: $D(y) = R$, $E(y) = [0; +\infty]$.
2) $y = x^3$: $D(y) = R$, $E(y) = R$.
3) $y = \sqrt{x}$: $D(y) = [0: +\infty)$, $E(y) = [0; +\infty)$.

20. $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. ООФ: $x \in (-\infty; +\infty)$; ОЗФ: $y \in [0; 1)$

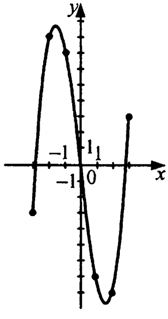
21. $y = 2x + 20$. ООФ: $x \in (10; 40]$, ОЗФ: $y \in (40; 100]$.

22. $y = kx + b$. При $x = 0$ $y = b = -1$, при $x = \dfrac{1}{2}$ имеем $\dfrac{1}{2}k - 1 = 0$, отсюда

$k = 2$ и искомая функция $y = 2x-1$.

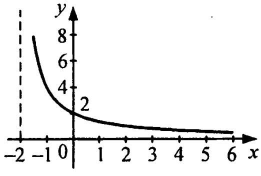
23. а) $y = \dfrac{2}{x}$; б) $y = -\dfrac{2}{x}$; в) $y = \dfrac{x}{2}$; г) $y = \dfrac{x}{2} - 2$; д) $y = 2 - \dfrac{x}{2}$.
24. а) $|x| = 3{,}5$ при $x = 3{,}5$ или $x = -3{,}5$;
б) $|x| < 2$ при $x \in (-2; 2)$;
в) $|x| \ge 4$ при $x \in [4; \infty)$ или $x \in (-\infty; -4]$.
Наименьшее значение функции достигается при $x = 0$ и равно 0; наибольшего значения нет; $E(y) = [0; +\infty)$.
25. а) $E(f) = (-8; 8)$; $x \in [-3; 3]$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–3	8	7	0	–7	–8	3



б) $E(f) = (0{,}5; 8)$; $x \in [-1{,}5; 6]$

x	–1,5	–1	0	1	3	4	5	6
y	8	4	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$



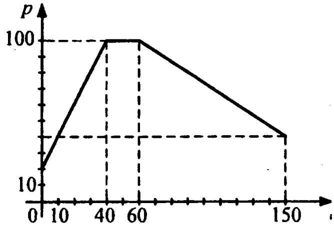
26. В течение первых 2 дней вода поднялась на 1,5 дм, в течение следующих 2 дней вода поднялась уже на 4 дм, затем скорость подъема снизилась и в течение следующих 2 дней вода поднялась только на $\dfrac{3}{4}$ дм. Оставшееся время вода убывала до уровня 4 дм от нулевой отметки.

27. $p(20) = 2 \cdot 20 + 20 = 60;$

$p(40) = 100; p(50) = 100;$

$p(60) = -\frac{2}{3} \cdot 60 + 140 = -40 + 140 = 100;$

$p(90) = -\frac{2}{3}\, 90 + 140 = -60 + 140 = 80.$



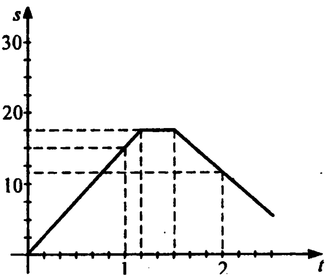
На промежутке времени [0, 40] вода нагревается, на [40; 60] — вода кипит, на промежутке времени [60; 150] — остывает.

28. $s(0) = 15 \cdot 0 = 0;$

$s(1) = 15 \cdot 1 = 15; s(1{,}4) = 17{,}5;$

$s(2) = -12 \cdot 2 + 35{,}5 = -24 + 35{,}5 = 11{,}5.$

Велосипедист 1 ч 10 мин ехал в одну сторону, потом 20 мин стоял, а потом 1 час ехал в обратную сторону.



29. а) $-0{,}5(3x-4) + 15x = 4(1{,}5x + 1) + 3;$

$-1{,}5x + 2 + 15x = 6x + 4 + 3;$

$7{,}5x = 5; x = \frac{5}{7{,}5} = \frac{2}{3}.$

б) $(2x-3)(2x + 3)-x^2 = 12x-69 + 3x^2; 4x^2-9-x^2 = 12x-69 + 3x^2;$

$4x^2-x^2-3x^2-12x = 9-69; -12x = -60; x = 5.$

30. а) $6x^2-3x = 0; 3x(2x-1) = 0; 3x = 0; x_1 = 0$ или $2x-1 = 0; x_2 = \frac{1}{2}.$

б) $x^2 + 9x = 0; x(x + 9) = 0; x_1 = 0, x + 9 = 0; x_2 = -9.$

в) $x^2-36 = 0; x^2 = 36; x_{1,2} = \pm\sqrt{36}; x_1 = 6; x_2 = -6.$

г) $5x^2 + 1 = 0;\ 5x^2 = -1;\ x^2 = -\frac{1}{5}$. Нет решений, т.к. квадрат любого числа больше или равен нулю.

д) $0{,}5x^2-1 = 0; 0{,}5x^2 = 1; x^2 = 2; x_{1,2} = \pm\sqrt{2}; x_1 = \sqrt{2}; x_2 = -\sqrt{2}.$

е) $0{,}6x + 9x^2 = 0; x(0{,}6 + 9x) = 0; x_2 = 0; 9x + 0{,}6 = 0;\ x = \frac{-0{,}6}{9}; x_1 = -\frac{1}{15}.$

31. а) $x^2 + 7x + 12 = 0; D = 7^2-4 \cdot 1 \cdot 12 = 1;$

$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 1}{2}; x_1 = -4, x_2 = -3.$

б) $x^2-2x-35 = 0; D = (-2)^2-4 \cdot 1 \cdot (-35) = 144; x_{1,2} = \frac{2 \pm 12}{2}; x_1 = -5, x_2 = 7.$

в) $2x^2-5x-3 = 0; D = (-5)^2-4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49; x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4}, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 3.$

г) $3x^2-8x + 5 = 0; D = (-8)^2-4 \cdot 3 \cdot 5 = 4; x_{1,2} = \frac{8 \pm 2}{6}, x_1 = 1, x_2 = 1\frac{2}{3}.$

32. а) $[0;6]$; б) $[14;16]$; в) $[6;14]$.

33. В промежутке времени от 0 до 13 мин вода нагревалась от 20°С до 100°С, затем остывала до 70°С в промежутке от 13 до 28 мин. Время наблюдения — 28 мин. Наибольшее значение температуры равно 100°С.

34. На промежутке времени $[0;\ 4]$ лед нагревается, на $(4;\ 10)$ — лед тает и превращается в воду, на промежутке времени $[10;\ 16]$ вода нагревается.

35. а) $f(x) = 0$ при $x = -5; -3; 1; 4$.

б) $f(x)>0$ при $-7 \le x < -5$, $-3<x<1$ и $4<x\le 5$; $f(x)<0$ при $-5<x<-3$ и $1<x<4$.

в) $f(x)$ возрастает при $-4<x<-1$ и $2<x<5$, убывает при $-7<x<-4$ и $-1<x<2$.

36. Функция $g(x)$ определена на промежутке $[-5;\ 5]$; возрастает при $x\in[-5;\ 0)$ и $(2;\ 5]$, убывает при $x\in(0;\ 2)$, отрицательна при $x\in[-5;\ 3)$, положительна при $-3 < x \le 5$, при $x = -3$ равна нулю. Наименьшее значение $g(-5) = -4$, наибольшее $-g(5) = 6$.

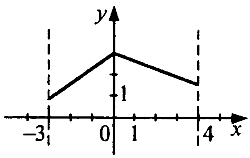
37. Функция имеет 4 нуля. $g(x) = 0$ при $x = -8; -2; 4; 8$.

а) $g(x)<0$ при $x\in[-10;\ -8)\cup(-2;\ 4)\cup(8;\ 10]$.

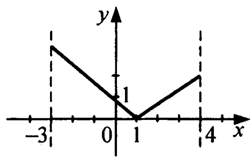
б) $g(x)$ убывает при $x\in(-5;\ 0)\cup(6;\ 10)$.

38.

а)

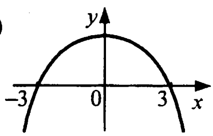


б)

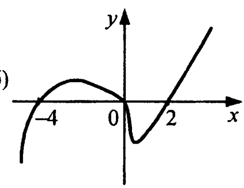


39.

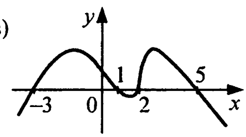
а)



б)



в)



40. а) $-0{,}8x + 12 = 0$; $-0{,}8x = -12$; $x = \dfrac{-12}{-0{,}8} = 15$.

б) $(3x-10)(x + 6) = 0$; $3x-10 = 0$, или $x + 6 = 0$; т.е. $x_1 = 3\dfrac{1}{3}$; $x = -6$.

в) $4 + 2x = 0$ и $x^2 + 5\ne 0$; $2x = -4$; $x = -2$. г) нулей нет.

41. а) У уравнения $2{,}1x-70 = 0$ существует решение ($x = 33\dfrac{1}{3}$), значит, функция имеет один нуль.

б) Уравнение $4x(x-2) = 0$ имеет 2 решения ($x = 0$ и $x = 2$), значит, функция имеет два нуля.

в) У уравнения $\dfrac{6-x}{x} = 0$ существует одно решение ($x = 6$), следовательно, функция имеет один нуль.

42. а) $y=\dfrac{x-\sqrt{x+6}}{x+5}$

ООФ: $\begin{cases}x+6\ge 0\\ x+5\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6\le x<-5\\ x>-5\end{cases}$

Нули функции: $x-\sqrt{x+6}=0$; $\begin{cases}x^2-x-6=0\\ x\ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x_1=3 \text{ и } x_2=-2\\ x\ge 0\end{cases}$; $x=3$.

б) $y=\dfrac{4x^2+25x}{2x-\sqrt{10-6x}}$

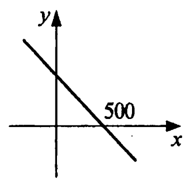
ООФ: $\begin{cases}2x-\sqrt{10-6x}\ne 0\\ 10-6x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x^2+6x-10\ne 0\\ x\ge 0\end{cases}\\ x<0\end{array}\right.\\ x\le 1\frac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 1\\ x\le 1\frac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\ 1<x\le 1\frac{2}{3}\end{cases}$

Нули функции: $4x^2+25x=0$; $x=0$ или $x=-6\frac{1}{4}$.

43. а) $f(x)=-0{,}7x+350$

1) $f(x)=0\Rightarrow -0{,}7x+350=0$; $-0{,}7x=-350$;

$x=\dfrac{-350}{-0{,}7}=500$.



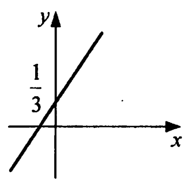
2) $f(x)>0\Rightarrow -0{,}7x+350>0$; $-0{,}7x+350>0$;

$-0{,}7x>-350$; $x<\dfrac{-350}{-0{,}7}=500$.

3) $f(x)<0\Rightarrow -0{,}7x+350<0$; $-0{,}7x<-350$; $x>500$.

б) $f(x)=30x+10$

1) $f(x)=0\Rightarrow 30x+10=0$; $30x=-10$; $x=\dfrac{-10}{30}=-\dfrac{1}{3}$.



2) $f(x)>0\Rightarrow 30x+10>0$; $30x>-10$; $x>\dfrac{-10}{30}=-\dfrac{1}{3}$.

3) $f(x)<0\Rightarrow 30x+10<0$; $30x<-10$; $x<\dfrac{-10}{30}=-\dfrac{1}{3}$.

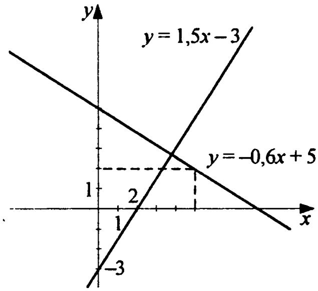
44. $y=8x-5$ ($k=8>0$) — возрастающая;
$y=-3x+11$ ($k=-3<0$) — убывающая;
$y=-49x-100$ ($k=-49<0$) — убывающая;
$y=x+1$ ($k=1>0$) — возрастающая;
$y=1-x$ ($k=-1<0$) — убывающая.

45. а) $a>2$; б) $a<2$; в) $a=2$.

46. а) $y=1{,}5x-3$ — линейная возрастающая функция, ее график — прямая.

1) $y=0\Rightarrow 1{,}5x-3=0$; $1{,}5x=3$; $x=2$.

2) $y>0 \Rightarrow 1{,}5x-3>0;\ x>\frac{3}{1{,}5};\ x>2.$



3) $y<0 \Rightarrow 1{,}5x-3<0;$

$1{,}5x<3;\ x<\frac{3}{1{,}5};\ x<2.$

4) $k = 1{,}5>0 \Rightarrow$ функция возрастает.

б) $y = -0{,}6x + 5$ — линейная убывающая функция, ее график — прямая

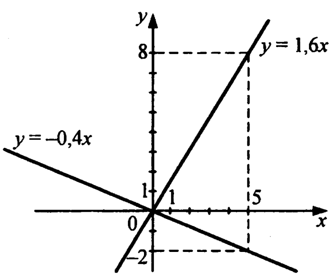
1) $y = 0 \Rightarrow -0{,}6x + 5 = 0;\ -0{,}6x = -5;$

$x = \frac{-5}{-0{,}6} = 8\frac{1}{3}.$

2) $y>0 \Rightarrow -0{,}6x + 5>0;\ -0{,}6x>-5;\ x<\frac{-5}{-0{,}6};\ x<8\frac{1}{3}.$

3) $y = 0 \Rightarrow -0{,}6x + 5<0;\ -0{,}6x<-5;\ x>\frac{-5}{-0{,}6};\ x>8\frac{1}{3}.$

47.



а) $y = 1{,}6x$ — график функции — прямая, $k>0$;

1) $y = 0$ при $x = 0$;

2) $y>0$ при $x>0$;

3) $y<0$ при $x<0$;

4) функция возрастает.

б) $y = -0{,}4x$ — графиком функции является прямая, $k<0$;

1) $y = 0$ при $x = 0$; 2) $y>0$ при $x<0$;

3) $y<0$ при $x>0$; 4) функция убывает.

48. а) $f(x) = 0 \Rightarrow 13x-78 = 0;\ 13x = 78;\ x = \frac{78}{13};\ x = 6.$

б) $f(x)>0 \Rightarrow 13x-78>0;\ 13x>78;\ x>\frac{78}{13};\ x>6.$

в) $f(x) < 0 \Rightarrow 13x - 78 < 0;\ 13x < 78;\ x < \frac{78}{13};\ x < 6.\ k = 13 > 0 \Rightarrow$ функция возрастающая.

49. $y = x^2$; $D(y) = R$, $E(y) = [0; +\infty)$; $y = 0$ при $x = 0$; $y>0$ при $x \neq 0$; функция возрастает при $x>0$ и убывает при $x<0$.

$y = x^3$; $D(y) = R$, $E(y) = R$; $y = 0$ при $x = 0$; $y>0$ при $x>0$; $y<0$ при $x<0$; функция возрастает при всех x.

$y = \sqrt{x}$; $D(y) = [0; +\infty)$, $E(y) = [0; +\infty)$; $y = 0$ при $x = 0$; $y>0$ при всех $x \in D(y)$; функция возрастает при всех $x \in D(y)$.

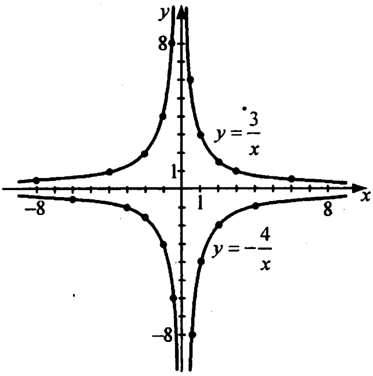
$y = |x|$; $D(y) = R$, $E(y) = [0; +\infty)$; $y = 0$ при $x = 0$; $y>0$ при $x \neq 0$; функция возрастает при $x>0$ и убывает при $x<0$.

50. а) $y=\frac{3}{x}$.

1) $x\neq 0 \Rightarrow$ нулей нет;
2) $k=3>0 \Rightarrow y>0$ при $x>0$;
3) $k=3>0 \Rightarrow y<0$ при $x<0$;
4) $k=3>0 \Rightarrow$ функция убывает на $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$.

б) $y=-\frac{4}{x}$.

1) $y\neq 0 \Rightarrow$ нулей нет;
2) $k=-4<0 \Rightarrow y>0$ при $x<0$;
3) $k=-4<0 \Rightarrow y<0$ при $x>0$;
4) $k=-4<0 \Rightarrow$ функция возрастает на $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$.



51. а) Возрастающая, т.к. функции $y=5x$ и $y=\sqrt{x}$ возрастающие;

б) Убывающая, т.к. функции $y=-x$ и $y=\sqrt{-x}$ убывающие;

в) Возрастающая, т.к. функции $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$ возрастающие.

52. а) $0{,}6x^2-3{,}6x=0$; $0{,}6x(x-6)=0$; $x_1=0$ или $x-6=0$; $x_2=6$.

б) $x^2-5=0$; $x^2=5$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$; $x_1=\sqrt{5}$; $x_2=-\sqrt{5}$.

в) $2x^2+17x=0$; $x(2x+17)=0$; $x=0$ или $2x+17=0$; $x_2=0$, $2x=-17$;
$x=-\frac{17}{2}$; $x_1=-8{,}5$.

г) $0{,}5x^2+9=0$; $0{,}5x^2=-9$; $x^2=-\frac{9}{0{,}5}$. Нет решений, т.к. квадрат любого числа есть число неотрицательное.

53. а) $g(2)=\frac{1}{2^2+5}=\frac{1}{4+5}=\frac{1}{9}$;

$g(-2)=\frac{1}{(-2)^2+5}=\frac{1}{4+5}=\frac{1}{9}\Rightarrow g(2)=g(-2)$.

б) $g(2)=\frac{2}{2^2+5}=\frac{2}{9}$;

$g(-2)=\frac{-2}{(-2)^2+5}=-\frac{2}{9}$; т.е. $g(2)>g(-2)$.

в) $g(2)=\frac{-2}{2^2+5}=\frac{-2}{4+5}=-\frac{2}{9}$;

$g(-2)=\frac{-(-2)}{(-2)^2+5}=\frac{2}{4+5}=\frac{2}{9}$; т.е. $g(2)<g(-2)$.

54. а) $4x-x^3=x(4-x^2)=(4-x^2)x=(2+x)(2-x)x$.
б) $a^4-169a^2=(a^2-169)a^2=(a+13)(a-13)a^2$.
в) $c^3-8c^2=(c-8)c^2$.

§ 2. Квадратный трехчлен

55. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

$(x^2 - 4)(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$ и $x_3 = 3$.

56.

а) $x^2 - 7x = 0$	б) $2x - 5 = 0$	в) $y^3 - 4y = 0$	г) $y^4 - 16 = 0$
$x(x - 7) = 0$	$x = 2{,}5$	$(y^2 - 4)y = 0$	$(y^2 - 4)(y^2 + 4) = 0$
$x_1 = 0$ и $x_2 = 7$		$y_1 = 2, y_2 = -2$ и $y_3 = 0$	$y_1 = 2, y_2 = -2$.

57. а) нет; б) да; в) нет; г) нет.

58. Сначала решим уравнение $x^2 - 6x + 7 = 0$; $D = (-6)^2 - 4\cdot1\cdot7 = 8$;

$x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{8}}{2}$; $x_1 = 3 + \sqrt{2}$, $x_2 = 3 - \sqrt{2}$.

Следовательно, корнем уравнения является $3 - \sqrt{2}$.

59. а) $x^2 + x - 6 = 0$; $D = 1^2 - 4\cdot1\cdot(-6) = 25$; $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$; $x_1 = -3, x_2 = 2$.

б) $9x^2 - 9x + 2 = 0$; $D = (-9)^2 - 4\cdot9\cdot2 = 9$; $x_{1,2} = \dfrac{9 \pm 3}{18}$; $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

в) $0{,}2x^2 + 3x - 20 = 0$; $D = 3^2 - 4\cdot0{,}2(-20) = 25$; $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 5}{0{,}4}$; $x_1 = 5, x_2 = -20$.

г) $-2x^2 - x - 0{,}125 = 0$, $16x^2 + 8x + 1 = 0$; $D = 8^2 - 4\cdot16\cdot1 = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{-8 \pm 0}{32} = -\dfrac{1}{4}$.

д) $0{,}1x^2 + 0{,}4 = 0$; $0{,}1x^2 = -0{,}4$; $x^2 = \dfrac{-0{,}4}{0{,}1}$; $x^2 = -4$; Нет решений, т.к. квадрат любого числа есть число неотрицательное.

е) $-0{,}3x^2 + 1{,}5x = 0$; $-0{,}3x(x - 5) = 0$; $-0{,}3x = 0$; $x_1 = 0$ или $x - 5 = 0$; $x_2 = 5$.

60. а) $10x^2 + 5x - 5 = 0$; $2x^2 + x - 1 = 0$; $D = 1^2 - 4\cdot2\cdot(-1) = 9$;

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{4}$; $x_1 = \dfrac{-1 - 3}{4} = -1$, $x_2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

б) $-2x^2 + 12x - 18 = 0$; $x^2 - 6x + 9 = 0$; $D = (-6)^2 - 4\cdot1\cdot9 = 0$; $x = \dfrac{6 + 0}{2} = 3$.

в) $x^2 - 2x - 4 = 0$;

$D = (-2)^2 - 4\cdot1\cdot(-4) = 20$; $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{20}}{2}$; $x_1 = 1 - \sqrt{5}$, $x_2 = 1 + \sqrt{5}$.

г) $12x^2 - 12 = 0$; $12(x^2 - 1) = 0$; $x^2 - 1 = 0$; $x^2 = 1$; $x = \pm\sqrt{1}$; $x_1 = 1, x_2 = -1$.

61. а) $D = (-8)^2 - 4\cdot5\cdot3 = 4 > 0$, два корня.

б) $D = 6^2 - 4\cdot9\cdot1 = 0$, один корень.

в) $D = 6^2 - 4\cdot(-7)\cdot(-2) = -20 < 0$, нет корней.

г) $D = 5^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-3) = 13 > 0$, два корня.

62. а) $D = (-4)^2 - 4\cdot(-4)\cdot3 = 64 > 0$; два корня.

б) $D = (-4)^2 - 4\cdot4\cdot3 = -32 < 0$; нет корней.

в) $D = (-12)^2 - 4\cdot9\cdot4 = 0$; один корень.

г) $D = (-12)^2 - 4\cdot9\cdot(-4) = 288 > 0$; два корня.

63. $ax^2 + bx + c$;

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ c=4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-5b \\ c=4b \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+80b^2}}{-10b} = \frac{b \pm 9b}{10b} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ и } x_2 = -0{,}8.$$

Ответ: 1 и –0,8.

64. а) $x^2-6x-2 = x^2-2\cdot x\cdot 3 + 3^2-3^2-2 = (x-3)^2-11$

б) $x^2 + 5x + 20 = x^2 + 2\cdot x\cdot 2{,}5 + (2{,}5)^2-(2{,}5)^2 + 20 = (x + 2{,}5)^2 + 13{,}75.$

в) $2x^2-4x + 10 = 2(x^2-2x + 5) = 2(x^2-2\cdot x\cdot 1 + 1^2-1^2 + 5) = 2(x-1)^2 + 8.$

г) $\frac{1}{2}x^2 + x-6 = \frac{1}{2}(x^2 + 2x-12) = \frac{1}{2}(x^2 + 2\cdot x\cdot 1 + 1^2-1^2-12) = \frac{1}{2}(x + 1)^2-6{,}5.$

65. а) $x^2-10x + 10 = x^2-2\cdot x\cdot 5 + 5^2-5^2 + 10 = (x-5)^2-15.$

б) $x^2 + 3x-1 = x^2 + 2\cdot x\cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4}.$

в) $3x^2 + 6x-3 = 3(x^2 + 2x-1) = 3(x^2 + 2\cdot x\cdot 1 + 1^2-1^2-1) = 3(x + 1)^2-6.$

г) $\frac{1}{4}x^2-x + 2 = \frac{1}{4}(x^2-4x + 8) = \frac{1}{4}(x^2-2\cdot x\cdot 2 + 2^2-2^2 + 8) = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1.$

66. а) $x^2-6x + 10 = x^2-2\cdot x\cdot 3 + 3^2-3^2 + 10 = (x-3)^2 + 1>0.$

б) $5x^2-10x + 5 = 5(x^2-2x + 1) = 5(x-1)^2\geq 0.$

в) $-x^2 + 20x-100 = -(x^2-20x + 100) = -(x-10)^2\leq 0.$

г) $-2x^2 + 16x-33 = -2(x^2-8x + \frac{33}{2}) = -2(x^2-2\cdot x\cdot 4 + 4^2-4^2 + \frac{33}{2}) =$

$= -2((x-4)^2 + \frac{1}{4}) = -2(x-4)^2-1<0.$

67. 1) $x^2-6x + 11 = x^2-2\cdot x\cdot 3 + 3^2-3^2 + 11 = (x-3)^2 + 2>0.$

2) $-x^2 + 6x-11 = -(x^2-6x + 11) = -((x-3)^2 + 2)<0.$

68. $2x^2-4x + 6 = 2(x^2-2x + 3) = 2(x^2-2\cdot x\cdot 1 + 1^2-1^2 + 3) = 2((x-1)^2 + 2) = 2(x-1)^2 + 4.$

При $x = 1$ выражение $2x^2-4x + 6$ принимает наименьшее значение,

$2\cdot 1^2-4\cdot 1 + 6 = 2-4 + 6 = 4.$

69. $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 4 = \frac{1}{3}(x^2 + 6x + 12) = \frac{1}{3}(x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2-3^2 + 12) =$

$= \frac{1}{3}((x + 3)^2 + 3) = \frac{1}{3}(x + 3)^2 + 1.$

При $x = -3$ выражение $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$ принимает наименьшее значение,

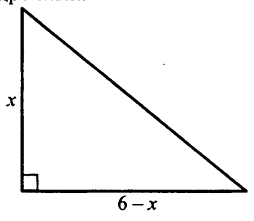
$\frac{1}{3}(-3)^2 + 2(-3) + 4 = 1.$

70. Пусть длина одного из катетов равна x см, тогда длина другого равна $(6 - x)$ см. Найдем площадь треугольника: $S(x) = \frac{1}{2}x(6-x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x.$

Выделим квадрат двучлена:

$$-\frac{1}{2}x^2+3x=-\frac{1}{2}(x^2-6x+9-9)=-\frac{1}{2}((x-3)^2-9)=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2}.$$

Это выражение принимает наибольшее значение при $x = 3$, а это означает, что треугольник равнобедренный.



71. В соответствии с условием запишем квадратный трехчлен $h(t)$:
$-5t^2 + 50t + 20 = -5(t^2-10t-4) = -5(t^2-10t + 25-25-4) = 5(t-5)^2 + 5\cdot 29$.
При $t = 5$ выражение $-5t^2 + 50t + 20$ принимает максимальное значение. В этом случае $h = h(5) = -5\cdot 25 + 250 + 20 = 270-125 = 145$ (м).

72. а) $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{0,5x-1}{6} = 0$; $0,5x-1 = 0$, $0,5x = 1$; $x = \dfrac{1}{0,5}$; $x = 2$.

б) $f(x)>0 \Rightarrow \dfrac{0,5x-1}{6}>0$; $0,5x-1>0$, $0,5x>1$, $x > \dfrac{1}{0,5}$; $x>2$.

в) $f(x)<0 \Rightarrow \dfrac{0,5x-1}{6}<0$; $0,5x-1<0$, $0,5x<1$, $x < \dfrac{1}{0,5}$; $x<2$.

73. а) $l(0) = 60$, $l(25) = 60(1 + 0,000012\cdot 25) = 60(1 + 0,0003) = 60 + 0,018 = 60,018$;
$l(25)-l(0) = 60,018-60 = 0,018$ (м).
б) $l(25) = 60,018, l(50) = 60(1 + 0,000012\cdot 50) = 60(1 + 0,0006) = 60 + 0,036 = 60,036$;
$l(50)-l(25) = 60,036 - 60,018 = 0,018$ (м).

74. а) $3(x + 4)^2 = 10x + 32$; $3(x^2 + 8x + 16) = 10x + 32$; $3x^2 + 24x + 48 = 10x + 32$;

$3x^2 + 14x + 16 = 0$; $D = 14^2-4\cdot 3\cdot 16 = 4$; $x_{1,2} = \dfrac{-14\pm\sqrt{4}}{6}$; $x_1 = -2\dfrac{2}{3}$, $x_2 = -2$.

б) $31x + 77 = 15(x + 1)^2$; $31x + 77 = 15(x^2 + 2x + 1)$; $31x + 77 = 15x^2 + 30x + 15$;
$15x^2-x-62 = 0$; $D = (-1)^2-4\cdot 15\cdot(-62) = 3721$;

$x_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{3721}}{30}$; $x_1 = -2$, $x_2 = 2\dfrac{1}{15}$.

75. а) $ab + 3b-5a-15 = -5(a + 3) + b(a + 3) = (b-5)(a + 3)$.
б) $2xy-y + 8x-4 = 4(2x-1) + y(2x-1) = (4 + y)(2x-1)$.

76. а) $3x^2-24x + 21 = 0$; $x^2-8x + 7 = 0$; $D = (-8)^2-4\cdot 1\cdot 7 = 36$;

$x_1 = \dfrac{24-6}{6} = 3$, $x_2 = \dfrac{24+6}{6} = 5$. $3x^2-24x + 21 = 3(x-3)(x-5)$.

б) $5x^2 + 10x-15 = 0$; $x^2 + 2x-3 = 0$; $D = 2^2-4\cdot 1\cdot(-3) = 16$;

$x_1 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$, $x_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$. $5x^2 + 10x-15 = 5(x + 3)(x-1)$.

в) $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}=0$; $x^2+3x+2=0$; $D=3^2-4\cdot1\cdot2=1$;

$x_1=\frac{-3-1}{2}=-2$, $x_2=\frac{-3+1}{2}=-1$. $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}(x+2)(x+1)$.

г) $x^2-12x+24=0$; $D=(-12)^2-4\cdot1\cdot24=48$;

$x_1=\frac{12-4\sqrt{3}}{2}=6-2\sqrt{3}$, $x_2=\frac{12+4\sqrt{3}}{2}=6+2\sqrt{3}$.

$x^2-12x+24=(x-6+2\sqrt{3})(x-6-2\sqrt{3})$.

д) $-y^2+16y-15=0$; $y^2-16y+15=0$; $D=(-16)^2-4\cdot1\cdot15=196$;

$y_1=\frac{16-\sqrt{196}}{2}=1$, $y_2=\frac{16+\sqrt{196}}{2}=15$. $-y^2+16y-15=$

$=-(y-1)(y-15)=(1-y)(y-15)$.

е) $-x^2-8x+9=0$; $x^2+8x-9=0$; $D=8^2-4\cdot1\cdot(-9)=100$; $x_1=\frac{-8-\sqrt{100}}{2}=-9$,

$x_2=\frac{-8+\sqrt{100}}{2}=1$. $-x^2-8x+9=-(x+9)(x-1)=(x+9)(1-x)$.

ж) $2x^2-5x+3=0$; $D=(-5)^2-4\cdot2\cdot3=1$; $x_1=\frac{5-1}{4}=1$, $x_2=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2}$.

$2x^2-5x+3=2(x-\frac{3}{2})(x-1)=2(x-1)(x-\frac{3}{2})=(x-1)(2x-3)$.

з) $5y^2+2y-3=0$; $D=2^2-4\cdot5\cdot(-3)=64$; $y_1=\frac{-2+\sqrt{64}}{10}=\frac{3}{5}$,

$y_2=\frac{-2-\sqrt{64}}{10}=-1$. $5y^2+2y-3=5(y-\frac{3}{5})(y+1)=5(y+1)(y-\frac{3}{5})=$

$=(y+1)(5y-3)$

и) $-2x^2+5x+7=0$; $2x^2-5x-7=0$; $D=(-5)^2-4\cdot2\cdot(-7)=81$; $x_1=\frac{5-\sqrt{81}}{4}=$

$=-1$, $x_2=\frac{5+\sqrt{81}}{4}=\frac{7}{2}$. $-2x^2+5x+7=-2(x+1)(x-\frac{7}{2})=(x+1)(7-2x)$.

77. а) $2x^2-2x+\frac{1}{2}=2(x^2-x+\frac{1}{4})=2(x^2-2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4})=2(x-\frac{1}{2})^2$

б) $-9x^2+12x-4=-(9x^2-12x+4)=-((3x)^2-2\cdot2\cdot3x+2^2)=-(3x-2)^2$.

в) $16a^2+24a+9=((4a)^2+2\cdot3\cdot4a+3^2)=(4a+3)^2$.

г) $0{,}25m^2-2m+4=((0{,}5m)^2-2\cdot2m\cdot0{,}5+2^2)=(0{,}5m-2)^2$.

78. а) $2x^2+12x-14=0$; $\Rightarrow x^2+6x-7$;

$D=6^2-4\cdot1\cdot(-7)=64$; $x_1=\frac{-6-\sqrt{64}}{2}=-7$, $x_2=\frac{-6+\sqrt{64}}{2}=1$.

$2x^2+12x-14=2(x+7)(x-1)$.

б) $-m^2+5m-6=0$; $m^2-5m+6=0$;

$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=1$; $m_1=\dfrac{5-1}{2}=2$, $m_2=\dfrac{5+1}{2}=3$.

$-m^2+5m-6=-(m-2)(m-3)=(2-m)(m-3)$.

в) $3x^2+5x-2=0$;

$D=5^2-4\cdot3\cdot(-2)=49$; $x_1=\dfrac{-5-7}{6}=-2$, $x_2=\dfrac{-5+7}{6}=\dfrac{1}{3}$.

$3x^2+5x-2=3(x+2)(x-\dfrac{1}{3})=(x+2)(3x-1)$.

г) $6x^2-13x+6=0$;

$D=(-13)^2-4\cdot6\cdot6=25$; $x_1=\dfrac{13-5}{12}=\dfrac{2}{3}$, $x_2=\dfrac{13+5}{12}=\dfrac{3}{2}$.

$6x^2-13x+6=6(x-\dfrac{2}{3})\,(x-\dfrac{3}{2})=(3x-2)\,(2x-3)$.

79. а) $10x^2+19x-2=0$;

$D=19^2-4\cdot10\cdot(-2)=441$; $x_1=\dfrac{-19-21}{20}=-2$, $x_2=\dfrac{-19+21}{20}=0{,}1$.

$10x^2+19x-2=10(x-0{,}1)(x+2)$.

б) $0{,}5x^2-5{,}5x+15=0$; $x^2-11x+30=0$;

$D=(-11)^2-4\cdot1\cdot30=1$; $x_1=\dfrac{11-1}{2}=5$, $x_2=\dfrac{11+1}{2}=6$.

$0{,}5x^2-5{,}5x+15=0{,}5(x-6)(x-5)$.

80. а) $-3y^2+3y+11=0$; $D=3^2-4\cdot(-3)\cdot11=141>0$. Можно.

б) $4b^2-9b+7=0$; $D=(-9)^2-4\cdot4\cdot7=-31<0$. Нельзя.

в) $x^2-7x+11=0$; $D=(-7)^2-4\cdot1\cdot11=5>0$. Можно.

г) $3y^2-12y+12=0$; $D=(-12)^2-4\cdot3\cdot12=0$. Можно.

81. ax^2+bx+c;

$a=b=c\neq0\Rightarrow$ корней нет, т.к. $D=b^2-4ac=b^2-4b^2=-3b^2<0$.

Значит, разложить нельзя.

82. $nx^2+3nx+2n$;

$D=9n^2-8n^2=n^2\Rightarrow x_1=\dfrac{-3n+n}{2n}=-1$ и $x_2=\dfrac{-3n-n}{2n}=-2$.

$nx^2+3nx+2n=n(x+1)(x+2)$.

83. а) 1) $3x^2+2x-1=0$;

$D=2^2-4\cdot3\cdot(-1)=16$; $x_1=\dfrac{-2-4}{6}=-1$, $x_2=\dfrac{-2+4}{6}=\dfrac{1}{3}$.

$3x^2+2x-1=3(x-\dfrac{1}{3})\,(x+1)=(x+1)\,(3x-1)$.

2) $\dfrac{4x+4}{3x^2+2x-1}=\dfrac{4(x+1)}{(x+1)(3x-1)}=\dfrac{4}{3x-1}$.

б) 1) $2a^2-5a-3=0$;

$D=5^2-4\cdot2\cdot(-3)=49$; $a_1=\dfrac{5-7}{4}=-\dfrac{1}{2}$, $a_2=\dfrac{5+7}{4}=3$;

$2a^2-5a-3 = 2(a+\frac{1}{2})(a-3) = (2a+1)(a-3)$.

2) $\frac{2a^2-5a-3}{3a-9} = \frac{(2a+1)(a-3)}{3(a-3)} = \frac{2a+1}{3}$

в) 1) $b^2-b-12=0$; $D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-12)=49$; $a_1 = \frac{1-7}{2} = -3$, $a_2 = \frac{1+7}{2} = 4$;

$b^2-b-12=(b+3)(b-4)$.

2) $\frac{16-b^2}{b^2-b-12} = \frac{(4-b)(4+b)}{(b+3)(b-4)} = -\frac{4+b}{b+3}$

г) 1) $2y^2+7y+3=0$; $D=7^2-4\cdot2\cdot3=25$; $y_1 = \frac{-7-5}{4} = -3$, $y_2 = \frac{-7+5}{4} = -\frac{1}{2}$;

$2y^2+7y+3 = 2(y+3)(y+\frac{1}{2}) = (y+3)(2y+1)$.

2) $\frac{2y^2+7y+3}{y^2-9} = \frac{(y+3)(2y+1)}{(y-3)(y+3)} = \frac{2y+1}{y-3}$.

д) 1) $p^2-11p+10=0$; $D=(-11)^2-4\cdot1\cdot10=81$; $p_1 = \frac{11-9}{2} = 1$, $p_2 = \frac{11+9}{2} = 10$;

$p^2-11p+10=(p-1)(p-10)$.

2) $-p^2+8p+20=0$; $p^2-8p-20=0$; $D=(-8)^2-4\cdot(-20)=144$;

$p_1 = \frac{8-12}{2} = -2$, $p_2 = \frac{8+12}{2} = 10$; $-p^2+8p+20 = -(p+2)(p-10)$.

$\frac{p^2-11p+10}{20+8p-p^2} = \frac{(p-1)(p-10)}{-(p-10)(p+2)} = -\frac{p-1}{p+2}$.

е) 1) $3x^2+16x-12=0$; $D=16^2-4\cdot3\cdot(-12)=400$;

$x_1 = \frac{-16-20}{2\cdot3} = -6$, $x_2 = \frac{-16+20}{2\cdot3} = \frac{2}{3}$.

$3x^2+16x-12 = 3(x+6)(x-\frac{2}{3}) = (x+6)(3x-2)$.

2) $-3x^2-13x+10=0$; $D=(-13)^2-4\cdot(-3)\cdot10=289$;

$x_1 = \frac{13-17}{2\cdot(-3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{13+17}{2\cdot(-3)} = -5$.

$-3x^2+16x-12 = -3(x-\frac{2}{3})(x+5) = (2-3x)(x+5)$.

$\frac{3x^2+16x-12}{10-13x-3x^2} = \frac{(x+6)(3x-2)}{(2-3x)(x+5)} = -\frac{x+6}{x+5}$.

84. а) 1) $x^2-11x+24=0$; $D=(-11)^2-4\cdot1\cdot24=25$; $x_1 = \frac{11+5}{2} = 8$, $x_2 = \frac{11-5}{2} = 3$.

$x^2-11x+24=(x-8)(x-3)$.

2) $\dfrac{x^2-11x+24}{x^2-64}=\dfrac{(x-8)(x-3)}{(x-8)(x+8)}=\dfrac{x-3}{x+8}$

б) 1) $2y^2+9y-5=0$;

$D=9^2-4\cdot2\cdot(-5)=121$; $y_1=\dfrac{-9-11}{4}=-5$, $y_2=\dfrac{-9+11}{4}=\dfrac{1}{2}$.

$2y^2+9y-5=2\,(y+5)\,(y-\dfrac{1}{2})=(y+5)\,(2y-1)$.

2) $\dfrac{2y^2+9y-5}{4y^2-1}=\dfrac{(y+5)(2y-1)}{(2y-1)(2y+1)}=\dfrac{y+5}{2y+1}$.

85. а) 1) $x^2-7x+6=0$; $D=(-7)^2-4\cdot1\cdot6=25$; $x_1=\dfrac{7-\sqrt{25}}{2}=1$, $x_2=\dfrac{7+\sqrt{25}}{2}=6$.

$x^2-7x+6=(x-1)\,(x-6)$.

2) $\dfrac{36-x^2}{6-7x+x^2}=\dfrac{(6-x)(6+x)}{(x-1)(x-6)}=\dfrac{6+x}{-(x-1)}=\dfrac{x+6}{1-x}$.

При $x=-9$, $\dfrac{x+6}{1-x}=\dfrac{-9+6}{1-(-9)}=\dfrac{-3}{10}=-0{,}3$.

При $x=-99$, $\dfrac{x+6}{1-x}=\dfrac{-99+6}{1-(-99)}=\dfrac{-93}{100}=-0{,}93$.

При $x=-999$, $\dfrac{x+6}{1-x}=\dfrac{-999+6}{1-(-999)}=\dfrac{-993}{1000}=-0{,}993$.

б) 1) $4x^2+8x-32=0$; $D=8^2-4\cdot4\cdot(-32)=576$;

$x_1=\dfrac{-8-24}{8}=-4$, $x_2=\dfrac{-8+24}{8}=2$.

$4x^2+8x-32=4\,(x+4)\,(x-2)$.

2) $\dfrac{4x^2+8x-32}{4x^2-16}=\dfrac{4(x+4)(x-2)}{4(x-2)(x+2)}=\dfrac{x+4}{x+2}$

При $x=-1$, $\dfrac{x+4}{x+2}=\dfrac{-1+4}{-1+2}=3$.

При $x=5$, $\dfrac{x+4}{x+2}=\dfrac{5+4}{5+2}=1\dfrac{2}{7}$

При $x=10$, $\dfrac{x+4}{x+2}=\dfrac{10+4}{10+2}=1\dfrac{1}{6}$.

86. Область определения функции $y=x-4$: $x\in(-\infty;+\infty)$ и имеет графиком прямую. Функция $y=\dfrac{x^2-6x+8}{x-2}$ не определена при $x=2$; решим уравнение $x^2-6x+8=0$: $D=(-6)^2-4\cdot1\cdot8=4$, отсюда $x_1=2$, $x_2=4$ и $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$. Поэтому $\dfrac{x^2-6x+8}{x-2}=\dfrac{(x-4)(x-2)}{x-2}=x-4$ при $x\neq2$ совпадает с функцией $y=x-4$.

87. а) $\dfrac{x^2-1}{2}-11x-11=0$; $x^2-1-22x-22=0, x^2-22x-23=0$;

$D=(-22)^2-4\cdot1\cdot(-23)=576$; $x_1=\dfrac{22-24}{2}=-1, x_2=\dfrac{22+24}{2}=23.$

б) $\dfrac{x^2+x}{2}-\dfrac{8x-7}{3}=0$; $\dfrac{3(x^2+x)-2(8x-7)}{6}=0$, $3x^2+3x-16x+14=0$;

$3x^2-13x+14=0$; $D=(-13)^2-4\cdot3\cdot14=1$; $x_1=\dfrac{13-1}{6}=2, x_2=\dfrac{13+1}{6}=2\dfrac{1}{3}.$

88. а) $4x^2-6x+2xy-3y=-3(2x+y)+2x(2x+y)=(2x-3)(2x+y)$.

б) $4a^3+2b^3-2a^2b-4ab^2=4a(a^2-b^2)+2b(b^2-a^2)=4a(a^2-b^2)-2b(a^2-b^2)=$
$=(a^2-b^2)(4a-2b)=2(a-b)(a+b)(2a-b)$.

89. $f(x)=0{,}8x+2{,}1$; $g(x)=-0{,}9x+3$.

Точку пересечения найдем из условия: $f(x)=g(x)$;

$0{,}8x+2{,}1=-0{,}9x+3$; $1{,}7x=0{,}9$; $x=\dfrac{0{,}9}{1{,}7}=\dfrac{9}{17}$;

$y=f(\dfrac{9}{17})=0{,}8\cdot\dfrac{9}{17}+2{,}1=\dfrac{8}{10}\cdot\dfrac{9}{17}+\dfrac{21}{10}=\dfrac{72+357}{170}=\dfrac{429}{170}.$

Точка пересечения $(\dfrac{9}{17};\dfrac{429}{170})$ находится в I четверти.

§ 3. Квадратичная функция и ее график

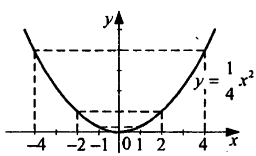
90. $y=\dfrac{1}{4}x^2$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

а) $x=-2{,}5$; $y=\dfrac{1}{4}\cdot(-2{,}5)^2=1{,}5625$;

$x=-1{,}5$; $y=\dfrac{1}{4}\cdot(-1{,}5)^2=0{,}5625$;

$x=3{,}5$; $y=\dfrac{1}{4}\cdot(3{,}5)^2=3{,}0625$.



б) $y=5$; $\dfrac{1}{4}x^2=5$; $x^2=20$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{20}$; $x_1=-2\sqrt{5}$, $x_2=2\sqrt{5}$.

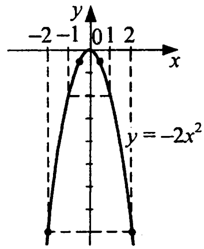
$y=3$; $\dfrac{1}{4}x^2=3$; $x^2=12$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{12}$; $x_1=-2\sqrt{3}$, $x_2=2\sqrt{3}$.

$y=2$; $\dfrac{1}{4}x^2=2$; $x^2=8$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{8}$; $x_1=-2\sqrt{2}, x_2=2\sqrt{2}$.

в) В $(-\infty; 0]$ — убывает; в $[0; \infty)$ — возрастает.

91. $y = -2x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-2	0	-2	-8



а) При $x = 1,5$; $y = -2\cdot(-1,5)^2 = -4,5$;

$x = 0,6$; $y = -2\cdot(0,6)^2 = -0,72$;

$x = 1,5$; $y = -2\cdot(1,5)^2 = -4,5$.

б) $y = -1$; $-2x^2 = -1$; $x^2 = \dfrac{-1}{-2} = 0,5$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{0,5}$; $x_1 \approx -0,7$; $x_2 \approx 0,7$.

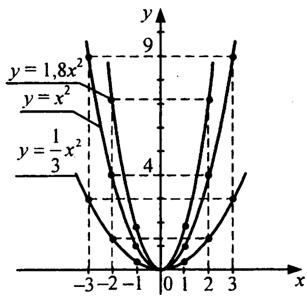
$y = -3$; $-2x^2 = -3$; $x^2 = \dfrac{-3}{-2} = 1,5$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{1,5}$; $x_1 \approx -1,2$; $x_2 \approx 1,2$.

$y = -4,5$; $-2x^2 = -4,5$; $x^2 = \dfrac{-4,5}{-2} = 2,25$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{2,25}$; $x_1 = -1,5$; $x_2 = 1,5$.

в) В $(-\infty; 0]$ — возрастает; в $[0; \infty)$ — убывает.

92.

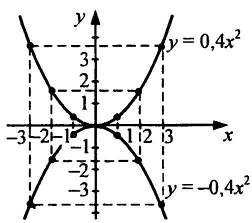
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y = 1,8x^2$	16,2	7,2	1,8	0	1,8	7,2	16,2
$y = \dfrac{1}{3}x^2$	3	$\dfrac{4}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	0	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{4}{3}$	3



$y_2(0,5) > y_1(0,5) > y_3(0,5)$;
$y_2(1) > y_1(1) > y_3(1)$;
$y_2(2) > y_1(2) > y_3(2)$.

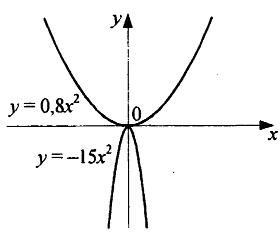
93.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 0,4x^2$	3,6	1,6	0,4	0	0,4	1,6	3,6
$y = -0,4x^2$	$-3,6$	$-1,6$	$-0,4$	0	$-0,4$	$-1,6$	$-3,6$



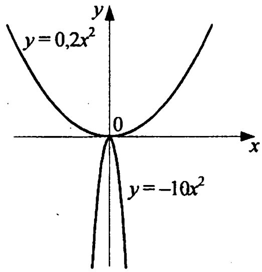
$E(y_1) = [0; +\infty)$;
$E(y_2) = (-\infty; 0]$.

94. а) 1) При $x = 0$ $y = 0$;
2) при $x \neq 0$, то $y < 0$; 3) $y(x) = y(-x)$;
4) возрастает в $(-\infty; 0]$, убывает в $[0; \infty)$;
5) при $x = 0$ функция принимает наибольшее значение $y = 0$; 6) $E(y) = (-\infty; 0]$.



б) 1) При $x = 0$ $y = 0$; 2) При $x \neq 0$ $y > 0$;
3) $y(x) = y(-x)$;
4) убывает в $(-\infty; 0]$, возрастает в $[0; \infty)$;
5) при $x = 0$ функция принимает наименьшее значение $y = 0$; 6) $E(y) = [0; \infty)$.

95.



а) 1) При $x = 0$ $y = 0$;
2) При $x \neq 0$, то $y > 0$;
3) $y(x) = y(-x)$;
4) убывает в $(-\infty; 0]$, возрастает в $[0; \infty)$;
5) при $x = 0$ функция достигает наименьшего значения $y = 0$;
6) $E(y) = [0; \infty)$.
б) 1) При $x = 0$ $y = 0$; 2) При $x \neq 0$ $y < 0$;
3) $y(x) = y(-x)$; 4) возрастает в $(-\infty; 0]$, убывает в $[0; \infty)$; 5) при $x = 0$ функция принимает наибольшее значение $y = 0$; 6) $E(y) = (-\infty; 0]$.

96. а) $y = 2x^2$; $y = 50$. Приравняем: $50 = 2x^2$; $x^2 = 25$; $x = 5$ или $x = -5$. Пересекаются.

б) $y = 2x^2$; $y = 100$. Приравняем: $100 = 2x^2$; $x^2 = 50$; $x = 5\sqrt{2}$ или $x = -5\sqrt{2}$. Пересекаются.

в) $y = 2x^2$; $y = -8$. Приравняем: $-8 = 2x^2$; $x^2 = -4$. Нет корней, т.к. квадрат любого числа есть число неотрицательное. Не пересекаются.

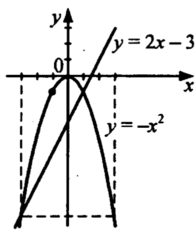
г) $y = 14x-20$; $y = 2x^2$.

Приравняем: $2x^2 = 14x-20$; $2x^2-14x + 20 = 0$; $x^2-7x + 10 = 0$; $D = 49-4\cdot 10 = 9$;

$x = \dfrac{7+3}{2} = 5$ или $x = \dfrac{7-3}{2} = 2$. Пересекаются.

97. а) $y(1{,}5) = (-100)\cdot(1{,}5)^2 = -225 \Rightarrow$ принадлежит;
б) $y(-3) = (-100)\cdot(-3)^2 = -900 \Rightarrow$ принадлежит;
в) $y(2) = -100\cdot 2^2 = -400 \neq 400 \Rightarrow$ не принадлежит.

98. $y = -x^2$; $y = 2x-3$.

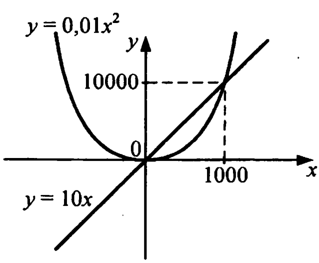


Приравняем эти функции:
$2x-3 = -x^2$; $x^2 + 2x-3 = 0$;
$D = 4-4\cdot(-3) = 16$;

$x_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$, $x_2 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$.

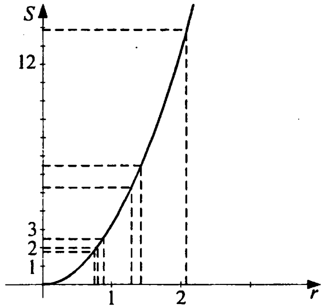
Если $x = 1 \Rightarrow y = -1^2 = -1$;
если $x = -3 \Rightarrow y = -(-3)^2 = -9$.

99.



100. $kx - 4 = x^2$; $x^2 - kx + 4 = 0$; $D = k^2 - 16 = 0 \Rightarrow k = \pm 4$.

101. График функции S – парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при r^2 положителен), ее вершина — в точке (0, 0). Так как $r \geq 0$ получим график $S(r)$ $(r \geq 0)$ — это правая половина параболы $y = \pi x^2$.



x	1	2	3
S	π	4π	9π

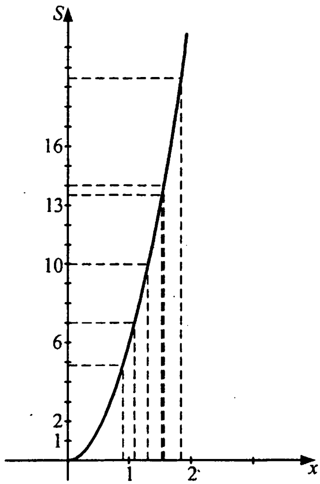
а) $S(1,3) \approx 5,3$, $S(0,8) \approx 2$, $S(2,1) \approx 13,8$.

б) $S(r) = 1,8$ при $r \approx 0,7$,

$S(r) = 2,5$ при $r \approx 0,9$, $S(r) = 6,5$ при $r \approx 1,5$.

102.

Площадь поверхности куба есть сумма площадей его граней. Так как они — равные квадраты, их шесть; то $S(x) = 6x^2$. Так как x — ребро куба, то $x \geq 0$. Следовательно, график функции $y = S(x)$ — это половина параболы $y = 6x^2$, расположенная в первой координатной четверти.



x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	2
y	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	6	$13\frac{1}{2}$	$16\frac{2}{3}$	24

а) $S(0,9) \approx 4,9$; $S(1,5) \approx 13,5$;

$S(1,8) \approx 19,5$;

б) $S(x) = 7$ при $x \approx 1,2$;

$S(x) = 10$ при $x \approx 1,3$;

$S(x) = 14$ при $x \approx 1,6$.

103. а) $3x^2 - 8x + 2 = 0$; $D = (-8)^2 - 4\cdot 3\cdot 2 = 40 > 0$. Два корня.

б) $-\frac{1}{2}y^2 + 6y - 18 = 0$; $y^2 - 12y + 36 = 0$; $D = (-12)^2 - 4\cdot 1\cdot(-36) = 0$. Один корень.

в) $m^2 - 3m + 3 = 0$; $D = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = -3 < 0$. Нет корней.

104. а) 1) $10a^2 - a - 2 = 0$;

$D = (-1)^2 - 4\cdot 10\cdot(-2) = 81$; $a_1 = \frac{1-\sqrt{81}}{20} = -\frac{2}{5}$, $a_2 = \frac{1+\sqrt{81}}{20} = \frac{1}{2}$;

$10a^2 - a - 2 = 10\left(a + \frac{2}{5}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right) = (5a+2)(2a-1)$.

2) $\frac{2a-1}{10a^2 - a - 2} = \frac{(2a-1)}{(2a-1)(5a+2)} = \frac{1}{5a+2}$

б) 1) $6a^2-5a+1=0$;

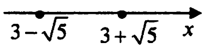
$D=(-5)^2-4\cdot6\cdot1=1$; $a_1=\dfrac{5-1}{12}=\dfrac{1}{3}$, $a_2=\dfrac{5+1}{12}=\dfrac{1}{2}$;

$6a^2-5a+1=6\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)=(3a-1)(2a-1)$.

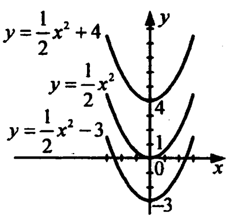
2) $\dfrac{6a^2-5a+1}{1-4a^2}=\dfrac{(2a-1)(3a-1)}{-(2a-1)(2a+1)}=-\dfrac{(3a-1)}{(2a+1)}=\dfrac{1-3a}{1+2a}$.

105. $(x+3)^2-(x-3)^2=(x-2)^2+(x+2)^2$; $x^2+6x+9-x^2+6x-9=x^2-4x+4+x^2+4x+4$; $x^2+6x+9-x^2+6x-9-x^2+4x-4-x^2-4x-4=0$; $-2x^2+12x-8=0$; $x^2-6x+4=0$;

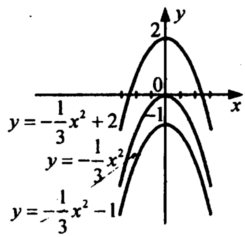
$D=(-6)^2-4\cdot1\cdot4=20$; $x_1=\dfrac{6+\sqrt{20}}{2}=3+\sqrt5$; $x_2=\dfrac{6-\sqrt{20}}{2}=3-\sqrt5$,



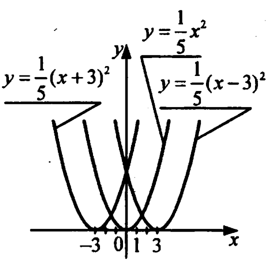
106. а)



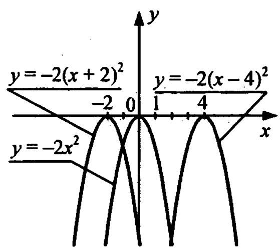
б)



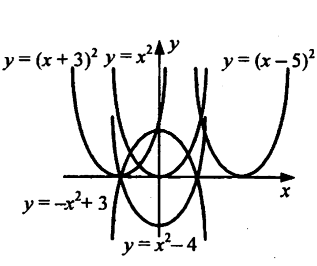
в)



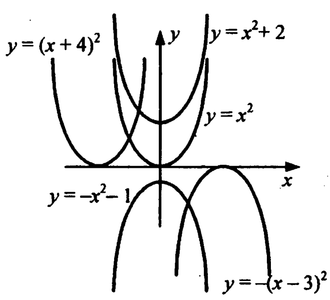
г)



107.



108.



109. а) График функции $y = 10x^2 + 5$ – парабола, полученная из графика функции $y = 10x^2$ сдвигом на 5 единиц вверх.

Значит, график функции $y = 10x^2 + 5$ расположен в I и II четвертях.

б) График функции $y = -7x^2-3$ получается из графика $y = -7x^2$ сдвигом на 3 единицы вниз.

Значит, график функции $y = -7x^2-3$ расположен в III и IV четвертях.

в) График функции $y = -6x^2 + 8$ – парабола, полученная из графика функции $y = -6x^2$ сдвигом вверх на 8 единиц.

Значит, график функции $y = -6x^2 + 8$ расположен во всех четырех четвертях.

г) График функции $y = (x-4)^2$ – парабола, полученная из графика функции $y = x^2$ сдвигом вправо на 4 единицы.

Поэтому график функции $y = (x-4)^2$ расположен в I и II четвертях.

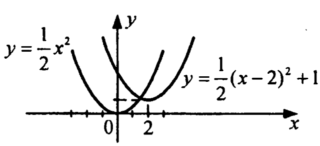
д) График функции $y = -(x-8)^2$ получается из параболы $y = -x^2$ сдвигом вправо на 8 единиц.

Значит, график функции $y = -(x-8)^2$ расположен в III и IV четвертях.

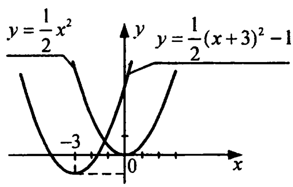
е) График функции $y = -3(x + 5)^2$ получается из параболы $y = -x^2$ сдвигом на 5 единиц влево и растяжением в 3 раза по вертикали, поэтому график функции расположен в III и IV четвертях.

110.

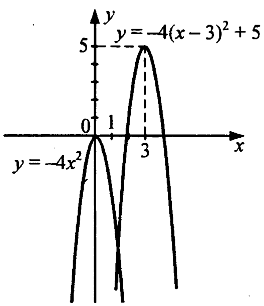
а)



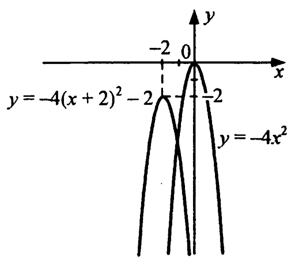
б)



в)

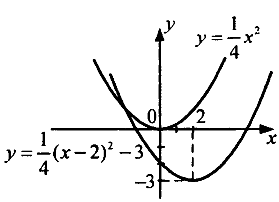


г)

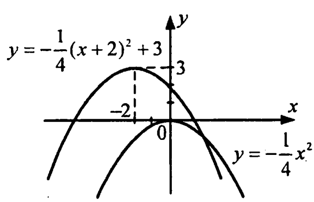


111.

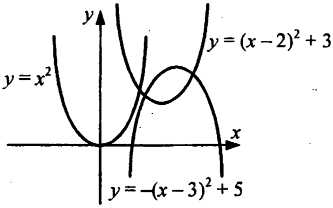
а)



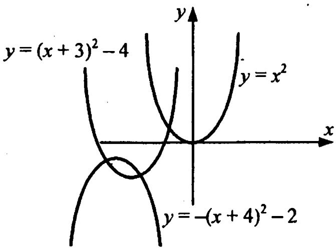
б)



112.



113.



114. а) y = 12x2 – 3; 12x2 – 3 = 0; $x^2 = \frac{1}{4}$; $x = \pm\frac{1}{2}$

б) $y = 6x^2 + 4 > 0$ для любого x.
в) $y = -x^2 - 4 < 0$ для любого x.
115. $y = ax^2 + 5$ имеет нули при $a < 0$.

116. а) График функции $y = -\frac{1}{3}(x+4)^2$ — это парабола, у которой ветви направлены вниз, а вершина находится в точке с координатами $x = -4$, $y = 0$.

б) График функции $y = \frac{1}{3}(x-4)^2 - 1$ — это парабола, у которой ветви направлены вверх, а вершина находится в точке с координатами $x = 4$, $y = -1$.

в) График функции $y = \frac{1}{3}x^2 + 4$ – это парабола, у которой ветви направлены вверх, а вершина находится в точке с координатами $x = 0$, $y = 4$.

г) График функции $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2$ – это парабола, у которой ветви направлены вниз, а вершина находится в точке с координатами $x = 0$, $y = -2$.

117. а) $0{,}6a-(a+0{,}3)^2 = 0{,}27$; $0{,}6a-a^2-0{,}6a-0{,}09-0{,}27 = 0$; $-a^2-0{,}36 = 0$;
$a^2 = -0{,}36$, нет корней, т.к. квадрат любого числа есть число неотрицательное.

б) $\frac{y^2-2y}{4} = 0{,}5y(6-2y)$; $y^2-2y = 2y(6-2y)$; $y^2-2y = 12y-4y^2$;

$y^2-2y-12y + 4y^2 = 0$; $5y^2-14y = 0$; $y(5y-14) = 0$; $y = 0$ или $5y-14 = 0$, $5y = 14$,

$y = \frac{14}{5} = 2{,}8$.

118. а) $5x-0{,}7<3x+5{,}1$; $5x-3x<5{,}1+0{,}7$; $2x<5{,}8$; $x<\dfrac{5{,}8}{2}=2{,}9$.

б) $0{,}8x+4{,}5\geq 5-1{,}2x$; $0{,}8x+1{,}2x\geq 5-4{,}5$; $2x\geq 0{,}5$; $x\geq\dfrac{0{,}5}{2}=0{,}25$.

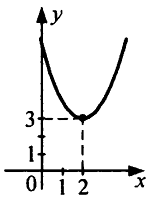
в) $2x+4{,}2\leq 4x+7{,}8$; $2x-4x\leq 7{,}8-4{,}2$; $-2x\leq 3{,}6$; $x\geq\dfrac{3{,}6}{-2}=-1{,}8$.

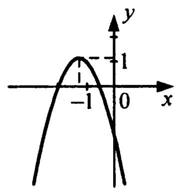
г) $3x-2{,}6>5{,}5x-3{,}1$; $3x-5{,}5x>-3{,}1+2{,}6$; $-2{,}5x>-0{,}5$; $x<\dfrac{-0{,}5}{-2{,}5}=0{,}2$.

119. $y(5)-y(2)=5^2-2^2=25-4=21$. $y(8)-y(5)=8^2-5^2=64-25=39$. Таким образом, приращение функции при изменении x от 2 до 5 меньше приращения функции при изменении x от 5 до 8.

120. а) 1,5 с; б) 2,5 с; в) 31,25 м; г) 4 с.

121. а) $x_В=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-4}{2}=2$ $y_В=2^2-4\cdot 2+7=3$, (2; 3) — координаты вершины, $x=2$ — ось симметрии параболы.





б) $x_В=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-5}{2\cdot(-2)}=-1\dfrac{1}{4}$,

$y_В=-2\cdot(-\dfrac{5}{4})^2-5\cdot(-\dfrac{5}{4})-2=1\dfrac{1}{8}$, $(-1\dfrac{1}{4};\ 1\dfrac{1}{8})$ — координаты вершины;

$x=-1\dfrac{1}{4}$ — ось симметрии параболы.

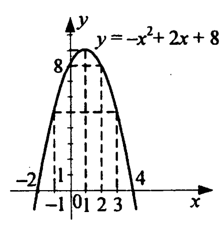
122. 1) Т.к. коэффициент при x^2 отрицательный, то график функции $y=-x^2+2x+8$ – парабола, у которой ветви направлены вниз.

2) Найдем координаты вершины:

$x_В=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2}{2\cdot(-1)}=1$; $y_В=-1^2+2\cdot 1+8=9$;

(1; 9) — координаты вершины;

$x=1$ — ось симметрии параболы.



3)

x	0	2	3	−1	−2	4
y	8	8	5	5	0	0

а) При $x=2{,}5$ $y\approx 6{,}5$,
при $x=-0{,}5$ $y\approx 6{,}5$, при $x=-3$ $y\approx -7$.

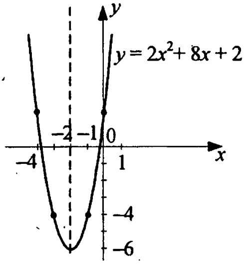
б) При $y = 6$ $x \approx -0,8$ и 2,8, при $y = 0$ $x = -2$ и 4; при $y = -2$ $x \approx -2,2$ и 4,4.
в) $x = -2;4$ — нули функции; $y > 0$ при $x \in (-2; 4)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$.
г) Возрастает при $x \in (-\infty; 1]$; убывает при $x \in [1; +\infty)$; $E(y) = (-\infty; 9]$.

123. 1) График функции $y = 2x^2 + 8x + 2$ – парабола, у которой ветви направлены вверх.
2) Найдем координаты вершины:

$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot 2} = -2;$$

$$y_В = 2(-2)^2 + 8(-2) + 2 = -6;$$

$x = -2$ – ось симметрии.



3)

x	-1	-3	0	-4
y	-4	-4	2	2

а) При $x = -2,3$ $y \approx -5,8$,
при $x = -0,5$ $y = -1,5$; при $x = 1,2$ $y \approx 14,5$.
б) При $y = -4$ $x = -1$ или 3;
при $y = -1$ $x \approx -0,4$ или $-3,6$;
при $y = 1,7$ $x \approx -0,2$ или $-3,8$.
в) $x \approx -0,3$ и $x \approx -3,7$ — нули функции; $y > 0$ при $x \in (-\infty; -3,7) \cup (-0,3; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (-3,7; -0,3)$.
г) Функция убывает при $x \in (-\infty; -2]$, возрастает при $x \in [-2; +\infty)$; при $x = -2$ функция достигает наименьшего значения, равного -6.

124. а) 1) Графиком функции $y = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4$ является парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положительный).
2) Координаты вершины:

$$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot \frac{1}{3}} = 6, \quad y_B = \frac{1}{3} \cdot (6)^2 - 4 \cdot 6 + 4 = -8; \quad x = 6$$ — оси симметрии параболы.

3)

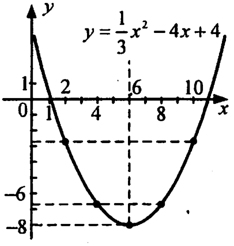
x	4	8	2	1	0	-1	3
y	$-6\frac{2}{3}$	$-6\frac{2}{3}$	$-2\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	4	$8\frac{1}{3}$	-5

а) $y = 0$; $\frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 = 0$;

$$x^2 - 12x + 12 = 0;$$

$$D = 144 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 96; \quad x_{1,2} = \frac{12 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 6 \pm 2\sqrt{6};$$

$x = 6 - 2\sqrt{6}$; $6 + 2\sqrt{6}$;
б) при $x = 0$ $y = 4$;
в) график функции расположен в I, II, IV четвертях;

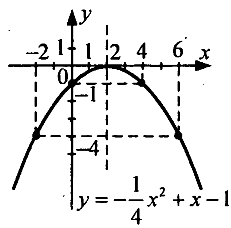


г) график функции симметричен относительно оси $x = 6$;
д) возрастает при $x \in [6; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 6]$;
е) наименьшее значение функции $y = -8$ при $x = 6$; $E(y) = [-8; +\infty)$;

б) 1) Графиком функции $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$ является парабола, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицательный).

2) Координаты вершины:

$$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot (-\frac{1}{4})} = 2;$$



$$y_B = -\frac{1}{4} \cdot 2^2 + 2 - 1 = 0;$$

$x = 2$ – ось симметрии.

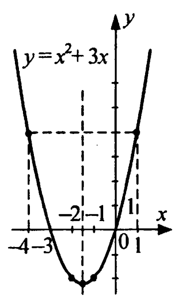
3)

x	1	3	0	–2	–1	2
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	–1	–4	$-2\frac{1}{4}$	0

а) При $x = 0$ $y = -1$;
б) при $x \neq 0$ $y < 0$;
в) график функции симметричен относительно оси $x = 2$;
г) функция возрастает при $x \in (-\infty; 2]$, убывает при $x \in [2; +\infty)$;
д) при $x = 2$ функция достигает наибольшего значения, равного 0; $E(y) = (-\infty; 0]$.

в) 1) Графиком функции $y = x^2 + 3x$ является парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положительный).
2) Координаты вершины:

$$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot 1} = -1,5;$$



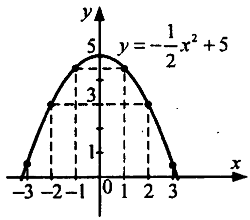
$y_B = (-1,5)^2 + 3(-1,5) = -2,25;$
$x = -1,5$ — оси симметрии.

3)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0	–2	–2	0	4	10	18

а) При $x = 0$ $y = 0$;
б) график функции расположен в I, II, III четвертях;
в) график функции симметричен относительно оси $x = -1,5$;
г) функция убывает при $x \in (-\infty; -1,5]$, возрастает при $x \in [-1,5; +\infty)$;
д) наименьшее значение, равное 2,25 функция достигает при $x = -1,5$; $E(y) = [-2,25; +\infty)$.

125. а) 1) Графиком функции $y=-\frac{1}{2}x^2+5$ является парабола, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицательный).



2) Найдем координаты вершины:

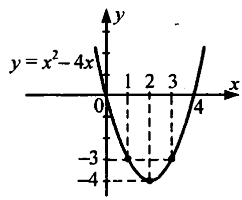
$$x_В=-\frac{b}{2a}=-\frac{0}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=0;$$

$$y_В=-\frac{1}{2}\cdot 0^2+5=5;\ (0;\ 5).$$

3)

x	1	–1	2	–2	0
y	4,5	4,5	3	3	5

б) 1) Графиком функции $y=x^2-4x$ является парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положительный).



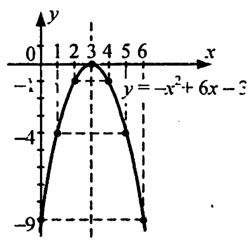
2) Найдем координаты вершины:

$$x_В=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\cdot 1}=2;\ y_В=2^2-4\cdot 2=-4;\ (2;\ -4).$$

3)

x	0	1	4	–1	–2	2
y	0	–3	0	5	12	–4

в) 1) Графиком функции $y=-x^2+6x-9$ является парабола, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицательный).



2) Найдем координаты вершины:

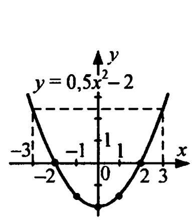
$$x_В=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2\cdot(-1)}=3;$$

$$y_В=-3^2+6\cdot 3-9=0;\ (3;\ 0).$$

3)

x	0	1	2	3	4	5
y	–9	–4	–1	0	–1	–4

126. а) 1) Графиком функции $y=0{,}5x^2-2$ является парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положительный).



2) Найдем координаты вершины:

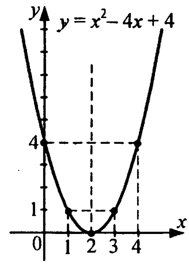
$$x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{0}{2\cdot 0{,}5}=0;$$

$$y_в=-0{,}5\cdot 0^2-2=-2;\ (0;\ -2).$$

3)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	2,5	0	–1,5	–2	–1,5	0	2,5

б) 1) Графиком функции $y = x^2–4x + 4$ является парабола, у которой ветви направлены вверх, (т.к. коэффициент при x^2 положительный).



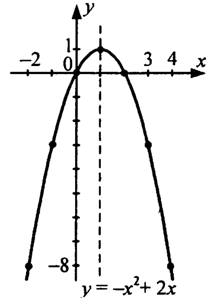
2) $x_В = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2\cdot 1} = 2$

$y_В = 2^2–4\cdot 2 + 4 = 0$; (2; 0).

3)

x	–1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1

в) 1) Графиком функции $y = –x^2 + 2x$ является парабола, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицательный).



2) Найдем координаты вершины:

$x_В = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2\cdot(-1)} = 1$,

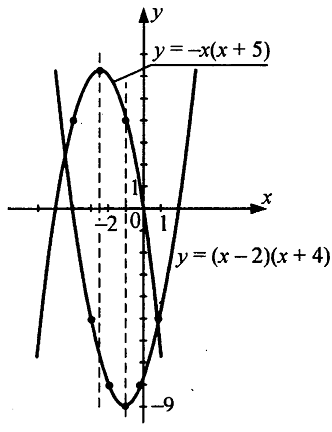
$y_В = -1^2 + 2\cdot 1 = -1 + 2 = 1$; (1; 1).

3)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–15	–8	–3	0	1	0	–3

127. а) 1) Графиком функции $y = (x–2)(x + 4) = x^2 + 2x–8$ является парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положительный).

2) Найдем координаты вершины:



$x_В = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2\cdot 1} = -1$,

$y_В = (-1)^2 + 2\cdot(-1)–8 = -9$; (–1; –9).

3)

x	0	–2	–1	1	2	–4
y	–8	–8	–9	–5	0	0

б) 1) Графиком функции $y = –x(x + 5) = –x^2–5x$ является парабола, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицательный).

2) Найдем координаты вершины:

$x_В = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-5}{2\cdot(-1)} = -2{,}5$,

$y_В = -(-2{,}5)^2–5\cdot(-2{,}5) = 6{,}25$; (–2,5; 6,25).

3)

x	–1	0	1
y	4	0	–6

Используя симметрию относительно прямой $x = –2{,}5$ найдем еще три точки.

128. На рисунке изображена парабола, у которой ветви направлены вверх значит, это не $y = -x^2-6$. Кроме того, нули изображенной функции расположены в точках $x = 0$ и $x = 6$ но $y = x^2 + 6x$ не обращаются в нуль при $x = 6$, а $y = \frac{1}{2}x^2-3x$ – обращается в нуль и при $x = 0$, и при $x = 6$.

Значит, искомая функция –$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$.

129. $y = 6x + b$; $y = x^2 + 8$

$$\begin{cases} x^2+8=6x+b \\ 2x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ b=-1 \end{cases}$$

Ответ: $b = -1$.

130. $y = 2x^2 - 5x + 6$, $y = x^2 - 7x + n$; $2x^2 - 5x + 6 = x^2 - 7x + n$; $x^2 + 2x + 6 - n = 0$

$D = 2^2 - 4(6-n) = 0 \Rightarrow n = 5$; $x = -1$; $y = 13/$ Ответ: $n = 5$; (–1; 13).

131. 1) $3a^2 + 5a-2 = 0$; $D = 5^2-4\cdot3\cdot(-2) = 49$;

$a_1 = \frac{-5-7}{6} = -2$, $a_2 = \frac{-5+7}{6} = \frac{1}{3}$;

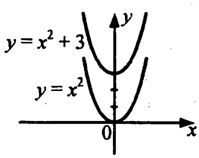
$3a^2 + 5a-2 = 3(a-\frac{1}{3})(a + 2) = (3a-1)(a + 2)$;

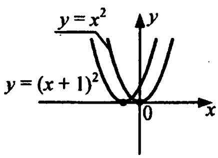
2) $\frac{(1-3a)^2}{3a^2+5a-2} = \frac{(3a-1)^2}{(3a-1)(a+2)} = \frac{3a-1}{a+2}$.

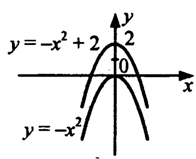
132. а) $y = x^2 + 3$; $E(y) = [3; +\infty)$.

б) $y = (x + 1)^2$; $E(y) = [0; +\infty)$.

в) $y = -x^2 + 2$; $E(y) = (-\infty; 2]$.







133. а) $(x-1)^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2-2x + 2$; $x^2-2x + 1 + x^2 + 2x + 1 =$
$= x^2 + 4x + 4-2x + 2$; $x^2 + 1 + x^2 + 1-x^2-4x-4 + 2x-2 = 0$;
$x^2-2x-4 = 0$; $D = (-2)^2-4\cdot1\cdot(-4) = 20$;

$x_1 = \frac{2-2\sqrt{5}}{2} = 1-\sqrt{5}$, $x_2 = \frac{2+2\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$.

б) $(2x-3)(2x + 3)-1 = 5x + (x-2)^2$; $4x^2-9-1 = 5x + x^2-4x + 4$; $3x^2-x-14 = 0$;

$D = (-1)^2-4\cdot3\cdot(-14) = 169$; $x_1 = \frac{1-\sqrt{169}}{6} = -2$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{169}}{6} = 2\frac{1}{3}$.

134. Обозначим площадь участка x га, тогда $35x$ (т) — соберут в первый раз, $42x$ (т) — соберут во второй раз. Запишем уравнение: $35x + 20 = 42x-50$; $7x = 70$; $x = 10$.

135. Пусть было x машин. Тогда $3{,}5x$ (т) — погрузили в первый раз $4{,}5x$ (т) — погрузили во второй раз. Запишем уравнение: $3{,}5x + 4 = 4{,}5x-4$; $x = 8$.

§ 4. Степенная функция. Корень n-й степени

136. При $x = 3$ $y(3) = 3^{36}$ – больше нуля; при $x = 0$ $y(0) = 0^{36} = 0$; $y(-5) = (-5)^{36}$ – больше нуля.

137. При $x = -9$ $y(-9) = (-9)^{49}$ – меньше нуля; при $x = 7$ $y(0) = 0^{49} = 0$; $y(7) = 7^{49}$ – больше нуля.

138. Функция $f(x) = x^{20}$ — возрастает на промежутке $(0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0)$.

а) Так как $0<3,7<4,2$, то $f(3,7)<f(4,2)$. б) Так как $-6,5<-5,2<0$, то $f(-6,5)>f(-5,2)$.

в) $f(x)$ — четная функция, значит, $f(-7) = f(7)$. $0<6<7$, следовательно, $f(6)<f(7)=f(-7)$.

г) $f(x)$ — четная функция, значит, $f(-28) = f(28)$. $0<28<31$, следовательно, $f(-28)=f(28)<f(31)$.

139. Функция $g(x) = x^{35}$ — возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

а)Так как $8,9>7,6$, то $g(8,9)>g(7,6)$. б) Так как $-4,6>-5,7$, то $g(-4,6)>g(-5,7)$.

в) Так как $-10<7$, то $g(-10)<g(7)$. г) Так как $-63<63$, то $g(-63)<g(63)$.

140. Функция $y(x) = x^4$ — возрастает на промежутке $(0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0)$.

а) Так как $0<1,2<1,5$, то $1,2^4<1,5^4$.

б) Так как $0<0,7<0,8$, то $0,7^4<0,8^4$.

в) Так как $0<0,9<1$, то $0,9^4<1^4 = 1$.

г) Так как $-3,4<-3,2<0$, то $(-3,4)^4>(-3,2)^4$.

д) Функция $y(x) = x^5$ — возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$/

Так как $0,3<0,8 \Rightarrow 0,3^5<0,8^5$.

е) Функция $y(x) = x^5$ — возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$;

$$-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4} \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^5 < \left(-\frac{1}{4}\right)^5.$$

141. а) Функция $y = x^3$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Так как $5,7>5,4$, то $5,7^3>5,4^3$.

б) Функция $y = x^3$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Так как $-4,1>-4,2$, то $(-4,1)^3>(-4,2)^3$.

в) Функция $y = x^3$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Так как $0,8>(-1,3)$, то $0,8^3>(-1,3)^3$.

г) Функция $y = x^6$ возрастает на промежутке $(0; +\infty)$.

Так как $0<1,6<1,8$, то $1,6^6<1,8^6$.

д) Функция $y = x^6$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$.

Так как $-5,3<-4,2<0$, то $(-5,3)^6>(-4,2)^6$.

е) Функция $y = x^6$ возрастает на промежутке $(0; +\infty)$.

Так как $0<2,1<3,1$, то $2,1^6<3,1^6$.

142. $243 = 3^5$, значит, график функции $y = x^5$ проходит через точку A;

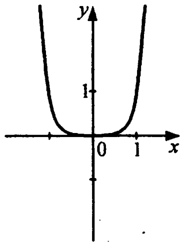
$243 \neq (-3)^5$, значит, график функции $y = x^5$ не проходит через B;

$3125 = 5^5$, значит, график функции $y = x^5$ проходит через C.

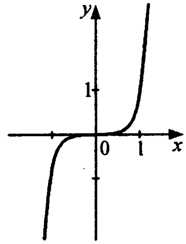
143. $128 = 2^7$, следовательно, точка A принадлежит графику функции $y = x^7$;
$-128 = (-2)^7$, следовательно, точка B принадлежит графику функции $y = x^7$;
$2187 \neq (-3)^7$, следовательно, точка C не принадлежит графику функции $y = x^7$.

144. а) $y = 0{,}72^5 \approx 0{,}19$; б) $y = 2{,}6^5 \approx 118{,}81$; в) $y = (-3{,}4)^5 \approx -454{,}35$.

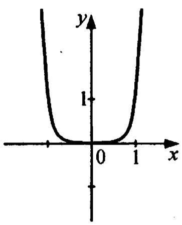
145. а)



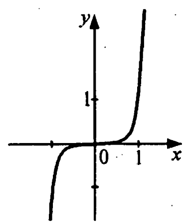
б)



в)



г)



146. а) 40 — четное число, следовательно, график функции $y = x^{40}$ расположен в I и II четвертях.

б) 123 — нечетное число, следовательно, график функции $y = x^{123}$ расположен в I и III четвертях.

147. а) 2 решения; б) 1 решение; в) нет решений; г) 1 решение.

148. а) Если $y = 5$, то $x_1 \approx -1{,}5$; $x_2 \approx 1{,}5$.

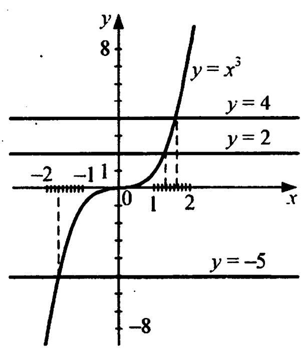
б) Если $y = 3{,}5$, то $x_1 \approx -1{,}4$; $x_2 \approx 1{,}4$.

в) Если $y = 8$, то $x_1 \approx -1{,}7$; $x_2 \approx 1{,}7$.

149. а) $x_1 \approx -1{,}55$; или $x_2 \approx 1{,}55$. б) $x_1 \approx -1{,}7$ или $x_2 \approx 1{,}7$.

150. а) 1) Строим график функции $y = x^3$.

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8



2) Строим график функции $y = 2$ — прямая, параллельная Oz и проходящая через (0,2).

3) Находим точку пересечения.

б) 1) Строим график функции $y = x^3$.

2) Строим график функции $y = 4$ – прямая, параллельная Oz и проходящая через (0,4).

3) Находим точку пересечения.

в) 1) Строим график функции $y = x^3$.

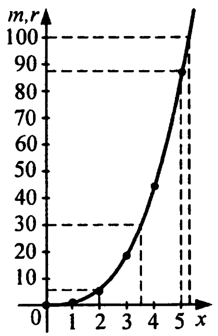
2) Строим график функции $y = -5$ — прямая, параллельная Oz и проходящая через (0; 5).

3) Находим точку пересечения. (а)≈1,3. б)≈1,6. в)≈–1,7).

151. Функция $y = x^6$ возрастает на $(0; +\infty)$. $x = 1001>2, >10, >10^2 = 100, >10^3 = 1000 \Rightarrow y(1001) >2^6, >10^6, >10^{12} = 100^6, >10^{18} = 10006$.

152. Функция $y = x^5$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.
Так как $x = -11<-10, <-3$, то $y(-11)<(-3)^5, <(-10)^5$;
при $x = -10^5$; $y(x) = y(-10^5) = (-10^5)^5 = -10^{25}<-1021$.

153. $f(1) = 1^3 = 1; f(0) = 0^3 = 0; f(2) = 2^3 = 8; f(3) = 3^3 = 27;$
$f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1; f(2) - f(1) = 8 - 1 = 7; f(3) - f(2) = 27 - 8 = 19;$
$f(1) - f(0) < f(2) - f(1) < f(3) - f(2)$.



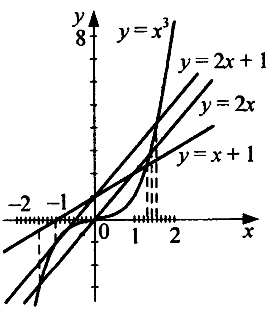
154. $m = \rho V$, где ρ — плотность, V — объем.
Если x — длина ребра, то $V = x^3$,
следовательно, $m = \rho x^3$.
Так как при $x = 10$ см $m = 700$ г,
то $700 = \rho \cdot 10^3$; $\rho = 0,7$ (г/см^3).
Следовательно, $m = 0,7x^3$.
Построим график этой зависимости:

x	0	1	2	3	4	5
m	0	0,7	5,6	18,9	44,8	87,5

По смыслу задачи $x \geq 0$.
Если $x = 2$, то $m = 5,6$;
если $x = 5$, то $m = 87,5$;
если $m = 30$, то $x \approx 3,5$;
если $m = 100$, то $x \approx 5,2$.

155. а) 1) Строим график функции $y = x^3$.

x	–2	–1	0	1	2
y	–8	–1	0	1	8



2) Строим график функции $y = x + 1$ — прямая.
Точки пересечения:

x	0	2
y	1	3

$x_1 = 0$; $x_2 \approx 1,4$; $x_3 \approx -1,4$

б) 1) Строим график функции $y = x^3$.
$x_1 \approx 1,6$; $x_2 \approx -0,6$; $x_3 \approx -1,2$

2) Строим график функции $y = 2x$ – прямая. Точки пересечения:

x	0	2
y	0	4

в) 1) Строим график функции $y = x^3$.

2) Строим график функции $y = 2x + 1$ — прямая.

x	0	2
y	1	5

156. а) $\frac{1-y}{1+y}+\frac{y^2+6y}{y^2-1}:\frac{6+y}{1+y}=\frac{1-y}{1+y}+\frac{y(y+6)(1+y)}{(y-1)(y+1)(6+y)}=$

$=\frac{1-y}{1+y}+\frac{y}{y-1}=\frac{-y^2+2y-1+y+y^2}{y^2-1}=\frac{3y-1}{y^2-1}$.

б) $\frac{4x^2-49}{2x+5}\cdot\frac{1}{4x^2+14x}-\frac{2x+7}{4x^2-10}=\frac{(2x-7)(2x+7)}{(2x+5)\cdot 2x(2x+7)}-\frac{2x+7}{2x(2x-5)}=$

$=\frac{(2x-5)(2x-7)-(2x+7)(2x+5)}{2x(4x^2-25)}=$

$=\frac{4x^2-14x-10x+35-4x^2-10x-14x-35}{2x\left(4x^2-25\right)}=\frac{-48x}{2x(4x^2-25)}=-\frac{24}{4x^2-25}$.

157. $\sqrt{144} = 12$, значит, точка A — принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$.
$\sqrt{169} \neq -13$, значит, точка B — не принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$.
$-100 \notin D_y = [0; +\infty)$, значит, точка C — не принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$.

158. а) $\frac{1}{2} \geq 0$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$;

б) $3 \geq 0$ и $3^3 = 27$;

в) Так как $-2<0$, то не является арифметическим корнем.

г) $0{,}1 \geq 0$, но $0{,}1^5 \neq 0{,}0001$.

159. а) $19 \geq 0$ и $19^2 = 361$;

б) $7 \geq 0$ и $7^3 = 343$;

в) $\frac{1}{2} \geq 0$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$;

г) $\frac{2}{3} \geq 0$ и $\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{2^5}{3^5}=\frac{32}{343}$;

д) $1 \geq 0$ и $1^{10} = 1$;

е) $0 \geq 0$ и $0^7 = 0$;

ж) $2-\sqrt{3} \geq 0$ и $(2-\sqrt{3})^2=2^2-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}$;

з) $\sqrt{5}-2 \geq 0$ и $(\sqrt{5}-2)^2 = 5-4\sqrt{5}+4 = 9-4\sqrt{5}$.

160. а) $\sqrt[4]{16} = = \sqrt[4]{2^4} = 2$.

б) $\sqrt[5]{32} = = \sqrt[5]{2^5} = 2$.

в) $\sqrt[12]{1} = 1$.

г) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=-\sqrt[3]{\frac{1}{2^3}}=-\frac{1}{2}$.

д) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\sqrt[4]{\frac{3^4}{2^4}}=\frac{3}{2}$.

е) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}}=\frac{3}{2}$.

161. а) $\sqrt[9]{512} = = \sqrt[9]{2^9} = 2$.

б) $\sqrt[3]{1331} = \sqrt[3]{11^3} = 11$.

в) $\sqrt[8]{0} = 0$. г) $\sqrt[5]{-243} = \sqrt[5]{-3^5} = -3$.

д) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}} = \sqrt[4]{\frac{2^4}{5^4}} = \frac{2}{5}$. е) $\sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \sqrt[6]{\left(\frac{2}{3}\right)^6} = \frac{2}{3}$.

162. а) $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}7$; б) $\sqrt[3]{-4} \approx -1{,}6$; в) $\sqrt[3]{-1} = -1$; г) $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}25$

163. а) $\sqrt[4]{2} \approx \pm 1{,}2$; б) $\sqrt[4]{5} \approx \pm 1{,}5$; в) $\sqrt[4]{8} \approx \pm 1{,}7$.

164. $\sqrt[4]{81} = 3$, следовательно, точка E не принадлежит графику;
$\sqrt[4]{81} = 3 \neq -3$, следовательно, точка F не принадлежит графику;
$-16 \notin D_y = [0; +\infty)$, следовательно, точка K не принадлежит графику;
$\sqrt[4]{0{,}0001} = 0{,}1$, следовательно, точка L принадлежит графику.

165. $\sqrt[3]{8} = 2$, значит, точка A принадлежит графику;
$\sqrt[3]{216} = 6$, значит, точка B принадлежит графику;
$\sqrt[3]{27} = 3 \neq -3$, значит, точка C не принадлежит графику;
$\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{-125} = -5$, значит, точка D принадлежит графику.

166. а) $\sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{3{,}5} < \sqrt[3]{8}$; $1 < \sqrt[3]{3{,}5} < \sqrt[3]{2^3}$; $1 < \sqrt[3]{3{,}5} < 2$;

б) $\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{20} < \sqrt[3]{27}$; $\sqrt[3]{2^3} < \sqrt[3]{20} < \sqrt[3]{3^3} \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{20} < 3$;

в) $\sqrt[4]{1} < \sqrt[4]{9} < \sqrt[4]{16}$; $1 < \sqrt[4]{9} < \sqrt[4]{2^4} \Rightarrow 1 < \sqrt[4]{9} < 2$;

г) $\sqrt[4]{16} < \sqrt[4]{52} < \sqrt[4]{81}$; $-\sqrt[4]{2^4} < \sqrt[4]{5^2} < \sqrt[4]{3^4} \Rightarrow 2 < \sqrt[4]{52} < 3$.

167. а) $n = 3$ — нечетное $\Rightarrow$ выражение имеет смысл;
б) $n = 7$ — нечетное $\Rightarrow$ выражение имеет смысл;
в) $n = 4$ — четное $\Rightarrow$ выражение не имеет смысла;
г) $n = 5$ — нечетное $\Rightarrow$ выражение имеет смысл;
д) $n = 8$ — четное $\Rightarrow$ выражение не имеет смысла;
е) $(-7)^2 > 0 \Rightarrow$ выражение имеет смысл.

168. а) $2\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -\sqrt[5]{2^5} = -2$.

б) $\sqrt[7]{-1} = -\sqrt[7]{1} = -1$.

в) $-2\sqrt[4]{81} = -2\sqrt[4]{3^4} = -2 \cdot 3 = -6$.

г) $-4\sqrt[3]{27} = -4 \cdot \sqrt[3]{3^3} = -4 \cdot 3 = -12$.

д) $\sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{-8} = 2 - \sqrt[3]{8} = \sqrt[5]{2^5} - \sqrt[3]{2^3} = 2 - 2 = 0$.

е) $\sqrt[4]{625} - \sqrt[3]{-125} = \sqrt[4]{5^4} + \sqrt[3]{5^3} = 5 + 5 = 10$.

169. а) $\sqrt[3]{-31} = -\sqrt[3]{31}$. б) $\sqrt[5]{-17} = -\sqrt[5]{17}$.

в) $\sqrt[11]{-2} = -\sqrt[11]{2}$ г) $\sqrt[17]{-6} = -\sqrt[17]{6}$.

170. а) $\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125} = -\sqrt[3]{5^3} = -5$. б) $\sqrt[6]{0} = 0$.

в) $-5\sqrt[4]{16} = -5\sqrt[4]{2^4} = -5 \cdot 2 = -10$.

г) $-3\sqrt[3]{-64} = -3 \cdot (-\sqrt[3]{4^3}) = -3 \cdot (-4) = 12$.

171. а) $(\sqrt{10})^2 = (10^{\frac{1}{2}})^2 = 10.$

б) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 5.$

в) $\left(-\sqrt[4]{12}\right)^4 = \left(-12^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 12.$

г) $\left(2\sqrt[5]{-2}\right)^5 = 2^5\cdot\left(\sqrt[5]{-2}\right)^5 = 2^5\cdot\left(-\sqrt[5]{2}\right)^5 = -32\cdot\left(2^{\frac{1}{5}}\right)^5 = -32\cdot 2 = -64.$

172. а) $\left(\sqrt[4]{7}\right)^4 = \left(7^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 7.$

б) $\left(\sqrt[7]{-3}\right)^7 = \left(-\sqrt[7]{3}\right)^7 = \left(-3^{\frac{1}{7}}\right)^7 = -3.$

в) $\left(2\sqrt[4]{3}\right)^4 = 2^4\cdot\left(\sqrt[4]{3}\right)^4 = 16\cdot\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 16\cdot 3 = 48.$

г) $\left(-3\sqrt[3]{2}\right)^3 = (-3)^3\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = -27\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = -27\cdot 2 = -54.$

173. а) Равенство верно при $a \ge 0$. б) Равенство верно при $a \le 0$.
в) Равенство верно при любом a.

174. а) $\sqrt[3]{0,5} \approx 0,75$;

б) $\sqrt[3]{4} \approx 1,6$;

в) $\sqrt[3]{-2} \approx -1,25$;

г) $\sqrt[3]{6} \approx 1,85$.

175. а) $\sqrt[3]{7} \approx 1,9$; б) $\sqrt[3]{20} \approx 2,7$; в) $\sqrt[4]{30} \approx 2,3$; г) $\sqrt[5]{-48} \approx -2,2$.

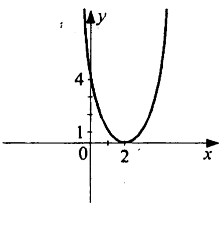
176. а) $\sqrt[3]{10} \approx 2,15$; б) $\sqrt[3]{-38} \approx -3,36$; в) $\sqrt[6]{18} \approx 1,62$; г) $\sqrt[4]{60} \approx 2,78$.

177. а) 1) График функции $y = (x-2)^2$ – парабола, у которой ветви направлены вверх.

2) Найдем координаты вершины:

$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot 1} = 2$; $y_в = 2^2 - 4\cdot 2 + 4 = 0$

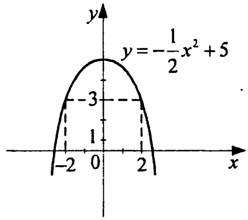
(+ 2; 0) — вершина параболы.



3)

x	-1	0	1	2
y	9	4	1	0

б) 1) График функций $y=-\frac{1}{2}x^2+5$ – парабола, у которой ветви направлены вниз.



2) Найдем координаты вершины параболы:

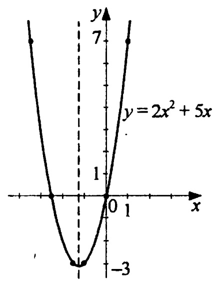
$x_в=-\frac{b}{2a}=\frac{0}{2\cdot\frac{1}{2}}=0$; $y_в=5$;

(0; 5) — вершина параболы.

3)

x	2	3	–2	0
y	3	$\frac{1}{2}$	3	5

в) 1) График функции $y = 2x^2 + 5x$ – парабола, у которой ветви направлены вверх.



2) Найдем координаты вершины параболы:

$y_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{5}{2\cdot2}=-\frac{5}{4}=-1,25$;

$y_в=2\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)^2+5\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)=$

$=\frac{2\cdot25}{16}-\frac{5\cdot5}{4}=-\frac{25}{8}=-3\frac{1}{8}$.

3)

x	0	1	–1	–2,5
y	0	7	–3	0

178. а) Решим уравнение $x^2 + 3x–10 = 0$;

$D = 3^2–4\cdot1\cdot(–10) = 49$;

$x_1=\frac{-3+\sqrt{49}}{2}=2$ или $x_2=\frac{-3-\sqrt{49}}{2}=-5\Rightarrow$

$x^2 + 3x–10 = (x–2)(x + 5)$;

$\frac{x}{x-2}-\frac{8}{x+5}=\frac{14}{(x-2)(x+5)}$; $\frac{x(x+5)-8(x-2)-14}{(x-2)(x+5)}=0$;

$(x–2)(x + 5)\neq0$; $x^2 + 5x–8x + 16–14 = 0$; $x^2–3x + 2 = 0$; $D = 3^2–4\cdot2\cdot1 = 9–8 = 1$;

$x_1=\frac{3+1}{2}=2$ или $x_2=\frac{3-1}{2}=1$. Но $x\neq2$, значит $x = 1$.

б) Решим уравнение $2y^2 + 11y–21 = 0$; $D = 11^2–4\cdot2\cdot(–21) = 289$;

$y_1=\frac{-11+\sqrt{289}}{4}=\frac{3}{2}$ или $y_2=\frac{-11-\sqrt{289}}{4}=-7$;

$2y^2 + 11y–21 = 2\left(y-\frac{3}{2}\right)(y + 7) = (2y–3)(y + 7)$;

$$\frac{y}{2y-3}+\frac{1}{y+7}+\frac{17}{(2y-3)(y+7)}=0;$$

$$\frac{y(y+7)+(2y-3)+17}{(2y-3)(y+7)}=0;\ (2y-3)(y+7)\neq 0;$$

$y^2+7y+2y-3+17=0$; $y^2+9y+14=0$;
$D=9^2-4\cdot 14=81-56=25$;

$$y_1=\frac{-9+\sqrt{25}}{2}=-2 \text{ или } y_2=\frac{-9-\sqrt{25}}{2}=-7.$$

Но $y\neq -7$, значит $y=-2$.

179. 1) $\frac{a-5}{a^2-5a+25}-\frac{12a-61}{a^3+5^3}=\frac{a-5}{a^2-5a+25}-$

$$-\frac{12a-61}{(a+5)(a^2-5a+25)}=\frac{(a-5)(a+5)-(12a-61)}{(a+5)(a^2-5a+25)}=$$

$$=\frac{a^2-25-12a+61}{(a+5)(a^2-5a+25)}=\frac{a^2-12a+36}{(a+5)(a^2-5a+25)}=$$

$$=\frac{(a-6)^2}{(a+5)(a^2-5a+25)}=\frac{(a-6)^2}{a^3+5^3}.$$

2) $\frac{(a-6)^2}{(a+5)(a^2-5a+25)}:\frac{3a-18}{2a^2-10a+50}=$

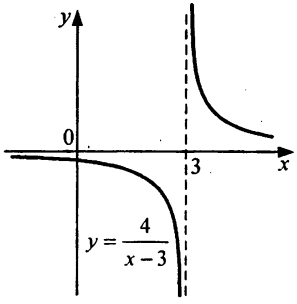
$$=\frac{(a-6)^2}{(a+5)\left(a^2-5a+25\right)}:\frac{3(a-6)}{2\left(a^2-5a+25\right)}=$$

$$=\frac{(a-6)^2\cdot 2(a^2-5a+25)}{(a+5)(a^2-5a+25)\cdot 3(a-6)}=\frac{2(a-6)}{3(a+5)}=\frac{2a-12}{3a+15}.$$

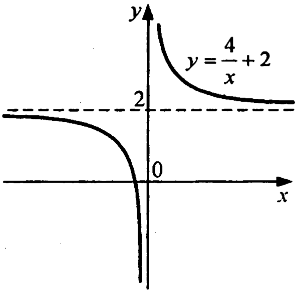
Для тех, кто хочет знать больше.

180. а) $x=3$, $y=-2$.
б) $x=-2$, $y=-3$.

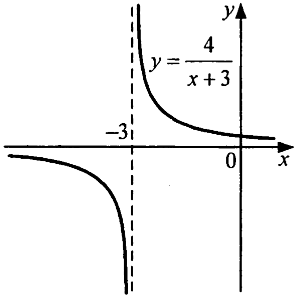
181. а)



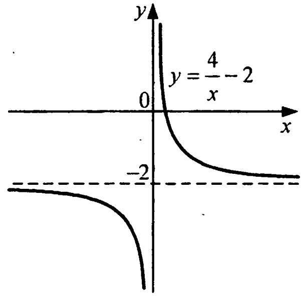
б)



в)



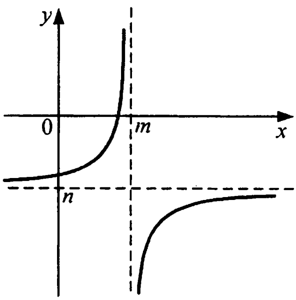
г)



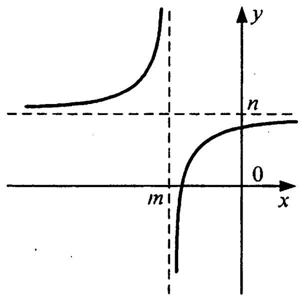
182. а) $y=\frac{x+8}{x-2}=\frac{10}{x-2}+1\Rightarrow x=2,\ y=1$.

б) $y=-\frac{x-8}{x+3}=\frac{11}{x+3}-1\Rightarrow x=-3,\ y=-1$.

183. а) $m>0$, $n<0$

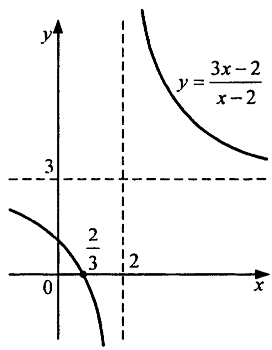


б) $m<0$, $n>0$



184. $y=\frac{3x-2}{x-2}=\frac{4}{x-2}+3$

Функция больше нуля на $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup(2;+\infty)$, меньше нуля на $\left(\frac{2}{3};2\right)$ и равна нулю при $x=\frac{2}{3}$.



185. 1, 3, 4.

186. $y = \dfrac{2x+5}{x-3}$; $(2n+5) = k(n-3),\ n, k \in \mathbb{N}$

$(k-2)(n-3) = 11$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} k-2=1 \\ n-3=11 \end{cases} \\ \begin{cases} k-2=11 \\ n-3=1 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} k=3 \\ n=14 \end{cases} \\ \begin{cases} k=13 \\ n=4 \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: (14; 3) и (4; 13).

187. $y = \dfrac{8x-7}{x}$; $nk = 8n-7,\ n, k \in \mathbb{Z}$

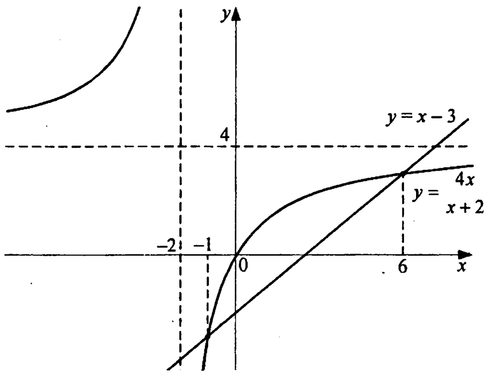
$n(k-8) = -7$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} n=\pm 1 \\ k-8=\mp 7 \end{cases} \\ \begin{cases} n=\pm 7 \\ k-8=\mp 1 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} n=\pm 1 \\ k=8\mp 7 \end{cases} \\ \begin{cases} n=\pm 7 \\ k=8\mp 1 \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: (1; 1), (–1; 15), (7; 7), (–7; 9).

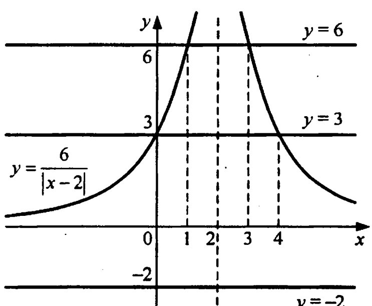
188. $\dfrac{4x}{x+2} = x-3$

Ответ: $x = -1$ и $x = 6$.



189. $y(x) = \dfrac{6}{|x-2|}$

а) $x = 0$ и $x = 4$;
б) $x = 1$ и $x = 3$;
в) $\varnothing$.



190. а) $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}$; $3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$; $5^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{5^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{5^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{125}}=\sqrt[4]{\frac{1}{125}}$;

$0,2^{0,5}=0,2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{0,2}$; $7^{-0,25}=7^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{7}}=\sqrt[4]{\frac{1}{7}}$.

б) $x^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{x^3}$; $y^{-\frac{5}{4}}=y^{\frac{-5}{4}}=\sqrt[4]{y^{-5}}=\sqrt[4]{\frac{1}{y^5}}$; $a^{1,2}=a^{\frac{6}{5}}=\sqrt[5]{a^6}$;

$b^{-0,8}=b^{\frac{-4}{5}}=\sqrt[5]{b^{-4}}=\sqrt[5]{\frac{1}{b^4}}$; $m^{2\frac{2}{3}}=m^{\frac{8}{3}}=\sqrt[3]{m^8}$.

в) $5a^{\frac{1}{3}}=5\sqrt[3]{a}$; $ax^{\frac{3}{5}}=a\sqrt[5]{x^3}$; $-b^{-1,5}=-b^{-\frac{3}{2}}=-\sqrt{b^{-3}}$; $(2b)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2b}$.

г) $(x-y)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(x-y)^2}$; $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}$; $3(a+b)^{\frac{3}{4}}=3\sqrt[4]{(a+b)^3}$;

$4a^{-\frac{2}{3}}+ax^{\frac{2}{3}}=4\sqrt[3]{a^{-2}}+a\sqrt[3]{x^2}$.

191. а) $\sqrt{1,3}=1,3^{\frac{1}{2}}$.

б) $\sqrt{7^{-1}}=\left(7^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}=7^{-\frac{1}{2}}$.

в) $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$.

г) $\sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

д) $\sqrt[7]{a^4}=a^{\frac{4}{7}}$.

е) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}=x^{-\frac{3}{4}}$.

ж) $\sqrt[3]{a^2-b^2}=\left(a^2-b^2\right)^{\frac{1}{3}}$.

з) $\sqrt[5]{(x-y)^2}=(x-y)^{\frac{2}{5}}$.

и) $\sqrt[5]{4ab^2}=\left(4ab^2\right)^{\frac{1}{5}}=4^{\frac{1}{5}}a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{2}{5}}$.

192. а) $27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$.

б) $25^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{25}}=\frac{1}{5}$.

в) $0,16^{\frac{3}{2}}=\sqrt{0,16^3}=0,064$.

г) $0,64^{-1,5}=0,64^{\frac{-3}{2}}=\sqrt{0,64^{-3}}=\sqrt{\frac{1}{0,64^3}}=\frac{1}{(0,8)^3}=\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{125}{64}=1\frac{61}{64}$.

д) $5\cdot 32^{\frac{1}{5}}=5\cdot 2^{\frac{5}{5}}=10$

е) $-64^{\frac{1}{3}}=-4^{\frac{3}{3}}=-4$

ж) $6\cdot 8^{-\frac{1}{3}}=6\cdot 2^{-\frac{3}{3}}=\frac{6}{2}=3$

з) $7\cdot 0{,}04^{-\frac{1}{2}}=7\cdot 0{,}2^{-\frac{2}{2}}=7\cdot\frac{10}{2}=35$

193. а) $c^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}}=c^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=c^{\frac{3+2}{6}}=c^{\frac{5}{6}}$. б) $b^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}=b^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=b^{\frac{-2+3}{6}}=b^{\frac{1}{6}}$.

в) $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}=a^{\frac{4+1}{6}}=a^{\frac{5}{6}}$. г) $d^5d^{\frac{1}{2}}=d^{5+\frac{1}{2}}=d^{5\frac{1}{2}}=d^{\frac{11}{2}}$.

д) $x^{\frac{1}{2}}:x^{\frac{3}{2}}=x^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}=x^{\frac{1-3}{2}}=x^{-1}$.

е) $y^{\frac{5}{6}}:y^{\frac{1}{3}}=y^{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=y^{\frac{5-2}{6}}=y^{\frac{3}{6}}=y^{\frac{1}{2}}$.

ж) $z^{\frac{1}{5}}:z^{-\frac{1}{2}}=z^{\frac{2+5}{10}}=z^{\frac{7}{10}}$. з) $m^{\frac{1}{3}}:m^2=m^{\frac{1}{3}-2}=m^{-1\frac{2}{3}}=m^{-\frac{5}{3}}$.

и) $\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=b^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=b^{\frac{1}{6}}$. к) $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{9}}=a^{\frac{3\cdot 4}{2\cdot 9}}=a^{\frac{2}{3}}$.

л) $\left(c^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=c^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=c^{-\frac{1}{6}}$. м) $\left(p^3\right)^{-\frac{2}{9}}=p^{\frac{-3\cdot 2}{9}}=p^{-\frac{2}{3}}$.

194. а) $(a^{0,4})^{\frac{1}{2}}\cdot a^{0,8}=a^{0,4\cdot\frac{1}{2}}a^{0,8}=a^{0,2}\cdot a^{0,8}=a^{0,2+0,8}=a$.

б) $(x^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{5}}\cdot x^{1,6}=x^{\frac{3\cdot 4}{4\cdot 5}}\cdot x^{1,6}=x^{\frac{3}{5}}\cdot x^{1,6}=x^{0,6}\cdot x^{1,6}=x^{0,6+1,6}=x^{2,2}$.

в) $a(a^{-1,2})^{\frac{3}{4}}=a\cdot a^{-\frac{6\cdot 3}{5\cdot 4}}=a\cdot a^{-\frac{9}{10}}=a^{\frac{10}{10}}-a^{\frac{9}{10}}=a^{\frac{1}{10}}$.

г) $(a^{0,8})^{-\frac{3}{4}}\cdot(a^{-\frac{2}{5}})^{-1,5}=a^{-\frac{4\cdot 3}{5\cdot 4}}\cdot a^{\frac{2\cdot 3}{5\cdot 2}}=a^{-\frac{3}{5}}\cdot a^{\frac{3}{5}}=a^{-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}}=a^0=1$.

195. а) $10^{\frac{2}{5}}\cdot 10^{-\frac{1}{2}}\cdot 10^{0,1}=10^{0,4}\cdot 10^{-0,5}\cdot 10^{0,1}=10^{0,4-0,5+0,1}=10^0=1$.

б) $4^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{1\frac{2}{3}}\cdot 8^{-\frac{1}{9}}=(2^2)^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{3}}\cdot(2^3)^{-\frac{1}{9}}=2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{2+5-1}{3}}=2^2=4$.

в) $3\cdot 9^{0,4}\cdot\sqrt[5]{3}=3\cdot\left(3^2\right)^{0,4}\cdot 3^{\frac{1}{5}}=3\cdot 3^{0,8}\cdot 3^{0,2}=3^{1+0,8+0,2}=3^2=9$.

г) $8^{-\frac{1}{3}}\cdot 16^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}=\left(2^3\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(2^4\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(2^2\right)^{\frac{1}{3}}=2^{-1}\cdot 2^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{-3+4+2}{3}}=2$.

196. а) $x^6=x^{3\cdot 2}=\left(x^3\right)^2; x^{40}=x^{20\cdot 2}=\left(x^{20}\right)^2; x^{23}=x^{\frac{23}{2}\cdot 2}=(x^{\frac{23}{2}})^2=\left(x^{11,5}\right)^2$;

$x^{-14}=x^{-7\cdot 2}=\left(x^{-7}\right)^2; x^5=x^{\frac{5}{2}\cdot 2}=\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^2$; $x^{-3}=x^{-\frac{3}{2}\cdot 2}=\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^2$;

$x=x^{\frac{1}{2}\cdot 2}=\left(x^{0,5}\right)^2; x^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{8}\cdot 2}=(x^{\frac{1}{8}})^2;\ x^{-1}=x^{-\frac{1}{2}\cdot 2}=(x^{-\frac{1}{2}})^2;$

$x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{6}\cdot 2}=(x^{\frac{1}{6}})^2;\ x^{-0,9}=x^{-0,45\cdot 2}=\left(x^{-0,45}\right)^2;\ \sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{6}\cdot 2}=\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2$

б) $y^6=y^{2\cdot 3}=\left(y^2\right)^3; y^{-21}=y^{-7\cdot 3}=\left(y^{-7}\right)^3; y^7=y^{\frac{7}{3}\cdot 3}=\left(y^{\frac{7}{3}}\right)^3;$

$y=y^{\frac{1}{3}\cdot 3}=\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3; y^{\frac{1}{2}}=y^{\frac{1}{6}\cdot 3}=\left(y^{\frac{1}{6}}\right)^3;\ y^{-1,5}=y^{-\frac{3}{2}}=y^{-\frac{1}{2}\cdot 3}=\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^3;$

$y^{-\frac{1}{3}}=y^{-\frac{1}{9}\cdot 3}=(y^{-\frac{1}{9}})^3; y^{0,2}=y^{\frac{1}{5}}=y^{\frac{1}{15}\cdot 3}=(y^{\frac{1}{15}})^3;$

$y^{-\frac{2}{9}}=y^{-\frac{2}{27}\cdot 3}=(y^{-\frac{2}{27}})^3; \sqrt{y}=y^{\frac{1}{2}}=y^{\frac{1}{6}\cdot 3}=(y^{\frac{1}{6}})^3.$

197. а) $\frac{3+3^{\frac{1}{2}}}{3^{-\frac{1}{2}}}=\frac{3^{\frac{1}{2}}(3^{\frac{1}{2}}+1)}{3^{-\frac{1}{2}}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(3^{\frac{1}{2}}+1)=3^{1,5}+3.$

б) $\frac{10}{10-10^{\frac{1}{2}}}=\frac{10}{10^{\frac{1}{2}}(10^{\frac{1}{2}}-1)}=\frac{10^{1-\frac{1}{2}}}{10^{\frac{1}{2}}-1}=\frac{10^{\frac{1}{2}}}{10^{\frac{1}{2}}-1}.$

в) $\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=\frac{(x^{\frac{1}{2}})^2-(y^{\frac{1}{2}})^2}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=\frac{(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}.$

г) $\frac{b^{\frac{1}{2}}-5}{b-25}=\frac{b^{\frac{1}{2}}-5}{(b^{\frac{1}{2}})^2-5^2}=\frac{b^{\frac{1}{2}}-5}{(b^{\frac{1}{2}}-5)(b^{\frac{1}{2}}+5)}=\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}+5}.$

д) $\frac{c+2c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}+d}{c-d}=\frac{(c^{\frac{1}{2}})^2+2c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}+(d^{\frac{1}{2}})^2}{c^{\frac{1}{2}\cdot 2}-d^{\frac{1}{2}\cdot 2}}=\frac{(c^{\frac{1}{2}}+d^{\frac{1}{2}})^2}{(c^{\frac{1}{2}})^2-(d^{\frac{1}{2}})^2}=$

$=\frac{(c^{\frac{1}{2}}+d^{\frac{1}{2}})^2}{(c^{\frac{1}{2}}-d^{\frac{1}{2}})(c^{\frac{1}{2}}+d^{\frac{1}{2}})}=\frac{c^{\frac{1}{2}}+d^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}-d^{\frac{1}{2}}}.$

е) $\frac{m+n}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}=\frac{(m^{\frac{1}{3}})^3+(n^{\frac{1}{3}})^3}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}=\frac{(m^{\frac{1}{3}})^3+(n^{\frac{1}{3}})^3}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}=$

$=\frac{(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}})(m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}})}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}=m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}.$

198. а) $u=\frac{1}{v-1}+1;$ б) $u^4+v^4=4.$

199. $\dfrac{(a+b)^{\frac{1}{2}}+(a-b)^{\frac{1}{2}}}{(a+b)^{\frac{1}{2}}-(a-b)^{\frac{1}{2}}}=2$; $\dfrac{\left((a+b)^{\frac{1}{2}}+(a-b)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{(a+b)-(a-b)}=2$;

($b=\dfrac{4a}{5}$ и $a>0 \Rightarrow a-b>0 \Rightarrow \left((a-b)^{\frac{1}{2}}\right)^2=a-b$)

$2a+2\left(a^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}=4b$; $\left(a^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}=2b-a$; $a^2-b^2=4b^2-4ab+a^2$;

$(5b-4a)b=0$; $b=\dfrac{4a}{5}$.

200. а) $y=\dfrac{1}{6x}+\dfrac{1}{6+x} \Rightarrow x\neq 0$; и $6+x\neq 0$; $x\neq -6$;

$D(y)=(-\infty;-6)\cup(-6;0)\cup(0;+\infty)$.

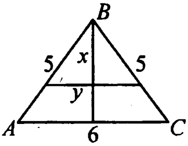
б) $y=\sqrt{x}-\sqrt{x-4}$; $\begin{cases}x\geq 0,\\ x-4\geq 0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geq 0,\\ x\geq 4;\end{cases}$; $D(y)=[4;+\infty)$.

в) $y=\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$; $x\neq 0$; $\dfrac{1}{x}\neq -1 \Rightarrow x\neq -1$; $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;\infty)$.

201. $y=10x$; $D(f)=[0;7]$; $f(0)=0$, $f(7)=70$; $E(f)=[0;70]$.

202. Вычислим высоту треугольника ABC:

$h=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$ (по теореме Пифагора).



Так как $\dfrac{x}{y}=\dfrac{h}{AC}=\dfrac{4}{6}$, то: $y=\dfrac{6}{4}x=1{,}5x$.

Итак, $y=f(x)=1{,}5x$; $D(f)=[0;4]$; $E(f)=[0;6]$.

203. 1) Найдем точку пересечения с Oy:

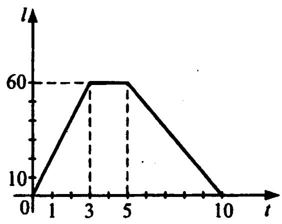
$x=0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{0^2+1}=\dfrac{1}{1}=1 \Rightarrow (0;1)$

2) Найдем точку пересечения с Ox:

$y=0 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+1}=0$ — нет решений $\Rightarrow$ нет точек пересечения с Ox.

3) График функции расположен в I и II координатных четвертях.

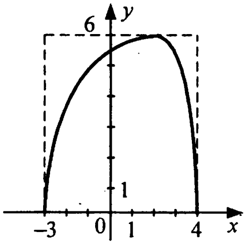
204. Скорость катера на пути от A до B (вниз по течению) равна $16+4=20$ (км/ч), на обратном пути (вверх по течению) его скорость составляет $16-4=12$ (км/ч). Расстояние от A до B катер пройдет за $60:20=3$ (ч), расстояние от B до A — за $60:12=5$ (ч). Получим:



$$l(t)=\begin{cases}20t, & t\in[0;\ 3),\\ 60, & t\in[3;\ 5),\\ 120-12t, & t\in[5;\ 10].\end{cases}$$

На отрезке [0;3] $l(t)$ растет (катер удаляется от A), на [3; 5] $l(t)$ не изменяется (катер на стоянке), на [5; 10] $l(t)$ убывает (катер возвращается в A).

205.



206. а) При $y = 0$: $\dfrac{2x+11}{10} = 0$; $2x + 11 = 0$; $2x = -11$; $x = -\dfrac{11}{2}$.

б) При $y = 0 \Rightarrow \dfrac{6}{8-0,5x} = 0$; нулей функции нет.

в) При $y = 0 \Rightarrow \dfrac{3x^2-12}{4} = 0$; $3x^2-12 = 0$; $3x^2 = 12$; $x^2 = 4$; $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

207. Пусть $x_1 > x_2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(x_1) > f(x_2) \\ g(x_1) > g(x_2) \end{matrix}\right| \Rightarrow$

$f(x_1) + g(x_1) > f(x_2) + g(x_2) \Rightarrow \varphi(x_1) > \varphi(x_2)$.

208. Пусть $f(x) = a$ имеет два различных корня x_1 и x_2, тогда можно считать, что $x_1 > x_2$. Так как $y = f(x)$ — возрастающая функция, то $a = f(x_1) > f(x_2) = a$, чего не может быть. Из противоречия следует, что уравнение $f(x) = a$ имеет один корень.

209. а) $\sqrt{x} + x^2 = 18$

$x \geq 0 \Rightarrow y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ — возрастающие функции, тогда по упражнению 207 $y = \sqrt{x} + x^2$ — возрастающая функция и по упражнению 208 уравнение $\sqrt{x} + x^2 = 18$ имеет единственный корень $x = 4$.

б) аналогично пункту а) имеем $x = 1$.

210. Функция $y = x^2$: $D(y) = (-\infty; +\infty)$; $x^2 \geq 0$ для всех $x \in (-\infty; \infty) \Rightarrow y = x^2$ функция не сохраняет знак.

Функция $y = x^2 + 5$: $D(y) = (-\infty; +\infty)$; $x^2 + 5 > 0$ для всех $x \in (-\infty; \infty) \Rightarrow y = x^2 + 5$ функция не сохраняет знак.

Функция $y = 2x + 5$: $D(y) = (-\infty; +\infty)$; $2x + 5 > 0$ при $x > -\dfrac{5}{2}$ и $2x + 5 < 0$ при $x < -\dfrac{5}{2} \Rightarrow$ функция не сохраняет знак на $D(y)$.

Функция $y = x^3$: $D(y) = (-\infty; +\infty)$; $y \geq 0$ при $x \geq 0$ и $y < 0$ при $x < 0 \Rightarrow$ функция не сохраняет знак на $D(y)$.

Функция $y = -x^2$: $D(y) = (-\infty; +\infty)$; $y \leq 0$ для всех $x \in (-\infty; \infty) \Rightarrow$ функция не сохраняет знак.

Функция $y = -x^2-4$: $D(y) = (-\infty; +\infty)$; $y<0$ для всех $x\in(-\infty; \infty) \Rightarrow$ функция сохраняет знак.

Функция $y = \sqrt{x}$: $D(y) = [0; +\infty)$; $y \geq 0$ для всех $x \geq 0 \Rightarrow$ функция не сохраняет знак.

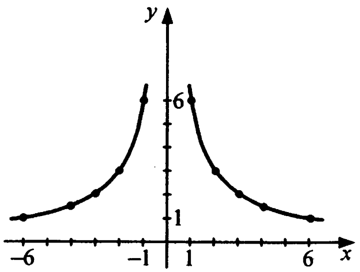
Функция $y = \sqrt{x} + 1$: $D(y) = [0; +\infty)$; $y > 0$ для всех $x \geq 0 \Rightarrow$ функция сохраняет знак.

Функция $y = x^4 + x^2 + 6$: $D(y) = (-\infty; +\infty)$; $y>0$ для всех $x\in(-\infty; \infty) \Rightarrow$ функция сохраняет знак.

211. Изображенная на рисунке функция имеет область определения $D = (-\infty; 1]$. Из данных функций только $y = \sqrt{1-x}$ определена на этой области ($D(\sqrt{x-1}) = [1; +\infty)$; $D(\sqrt{x+1}) = [-1; +\infty)$).

212. Функция $y = |x-2|$ принимает нулевое значение в единственной точке $x = 2$. Следовательно, ей соответствует график, изображенный на рисунке 41,б.

213.



1) Функция не определена только в точке $x = 0$: при $x > 0$ имеем $y = \frac{6}{x}$, при $x < 0$ имеем $y = -\frac{6}{x}$. Функция симметрична относительно оси Oy.

2) Составим таблицу значений функции:

x	-6	-5	-3	-2	-1	1	2	3	5	6
y	1	$\frac{6}{5}$	2	3	6	6	3	2	$\frac{6}{5}$	1

3) Построим график.

4) Функция возрастает на интервале $(-\infty; 0)$, убывает на интервале $(0; +\infty)$, множество ее значении — $(0; +\infty)$.

214. а) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x-2 = 0$; $x^2 + 4x-12 = 0$;

$D = 4^2-4\cdot 1\cdot(-12) = 64$;

$x_1 = \frac{-4+8}{2} = 2$, $x_2 = \frac{-4-8}{2} = -6$.

б) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4} = 0$; $6x^2 - 4x - 3 = 0$;

$D = (-4)^2 - 4\cdot6\cdot(-3) = 88$;

$x_1 = \frac{2+\sqrt{22}}{6}$, $x_2 = \frac{2-\sqrt{22}}{6}$.

в) $-x^2 + 4x - 2\frac{3}{4} = 0$; $4x^2 - 16x + 11 = 0$;

$D = (-16)^2 - 4\cdot4\cdot11 = 80$;

$x_1 = \frac{4+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{4-\sqrt{5}}{2}$.

г) $0{,}4x^2 - x + 0{,}2 = 0$; $2x^2 - 5x + 1 = 0$;

$D = (-5)^2 - 4\cdot2\cdot1 = 17$; $x_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{4}$.

215. а) Например, $(x-2)(x+7) = x^2 + 7x - 2x - 14 = x^2 + 5x - 14$.

б) Например,

$(x - 3 - \sqrt{2})(x - 3 + \sqrt{2}) = x^2 - (3 - \sqrt{2})x - (3 + \sqrt{2})x + (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) =$
$= x^2 - 3x + \sqrt{2}x - 3x - \sqrt{2}x + 9 - 2 = x^2 - 6x + 7$.

216. Так как $x = 0$ — корень трехчлена $2px^2 - 2x - 2p - 3$, то $-2p - 3 = 0 \Rightarrow$ $p = -\frac{3}{2}$.

При $p = -\frac{3}{2}$ имеем: $2(-\frac{3}{2})x^2 - 2x - 2(-\frac{3}{2}) - 3 = -3x^2 - 2x = -x(3x + 2)$, поэтому второй корень трехчлена равен $x = -\frac{2}{3}$.

217. а) $2x^2 - 10x + 3 = 0$;

$D = (-10)^2 - 4\cdot2\cdot3 = 76 > 0$;

по теореме Виета, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-10}{2} = 5$, $x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$.

б) $\frac{1}{3}x^2 + 7x - 2 = 0$; $x^2 + 21x - 6 = 0$;

$D = 21^2 - 4\cdot1\cdot(-6) = 465 > 0$;

по теореме Виета, $x_1 + x_2 = -21$, $x_1x_2 = -6$.

в) $0{,}5x^2 + 6x + 1 = 0$; $D = 6^2 - 4\cdot0{,}5\cdot1 = 34 > 0$;

по теореме Виета, $x_1 + x_2 = -12$, $x_1x_2 = 2$.

г) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} = 0$;

$D = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4\cdot(-\frac{1}{2})\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{9} > 0$; по теореме Виета, $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$, $x_1x_2 = -1$.

218. $(x-p)(x-q) = x^2 - (p+q)x + pq$.

219. $\begin{cases}\alpha\cdot\beta=4\\ \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\cdot\beta=4\\ \alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\cdot\beta=4\\ \alpha+\beta=5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=4\end{cases}\\ \begin{cases}\alpha=4\\ \beta=1\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ: $\alpha=1$, $\beta=4$ или $\alpha=4$, $\beta=1$.

220. Выделим квадрат двучлена:

а) $2x^2-3x+7=2(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2})=$

$=2(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+\frac{7}{2}=2((x-\frac{3}{4})^2-\frac{47}{16})=2(x-\frac{3}{4})^2-5\frac{7}{8}$.

б) $-3x^2+4x-1=-3(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3})=-3(x^2-2\cdot x\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+\frac{1}{3})=$

$=-3((x-\frac{2}{3})^2-\frac{1}{9})=-3(x-\frac{2}{3})^2+\frac{1}{3}$.

в) $5x^2-3x=5(x^2-\frac{3}{5}x)=5(x^2-2x\cdot\frac{3}{10}+\frac{9}{100}-\frac{9}{100})=5((x-\frac{3}{10})^2-\frac{9}{100})=$

$=5(x-\frac{3}{10})^2-\frac{9}{20}$.

г) $-4x^2+8x=-4(x^2-2x)=-4(x^2-2\cdot x\cdot 1+1-1)=-4((x-1)^2-1)=-4(x-1)^2+4$.

221. а) Выделим квадрат двучлена:
$-x^2+20x-103=-(x^2-20x+103)=-(x^2-2\cdot x\cdot 10+100-100+103)=$
$=-((x-10)^2+3)<0$.
б) Выделим квадрат двучлена:
$x^2-16x+65=x^2-2\cdot x\cdot 8+64-64+65=(x-8)^2+1>0$.

222. а) Выделим квадрат двучлена: $3x^2-4x+5=3(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3})=$

$=3(x^2-2x\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+\frac{5}{3})=3((x-\frac{2}{3})^2+\frac{11}{9})=3(x-\frac{2}{3})^2+\frac{11}{3}\Rightarrow$ наибольшего

значения нет; наименьшее $3\frac{2}{3}$ при $x=\frac{2}{3}$.

б) Выделим квадрат двучлена:
$-3x^2+12x=-(x^2-4x)=-3(x^2-2\cdot x\cdot 2+4-4)=-3((x-2)^2-4)=-3(x-2)^2+12\Rightarrow$
наименьшего значения нет; наибольшее 12. При $x=2$

223. Так как по условию, $a+b=40$ то $a=40-b$, тогда их произведение равно $ab=b(40-b)=-b^2+40b=-(b^2-40b+400-400)=-(b-20)^2+400$.
Наибольшее значение этого выражения достигается при $b=20$; тогда и $a=40-b=40-20=20$.

224. а) $0{,}8x^2-19{,}8x-5=0$. Найдем корни: $D=392{,}04-4\cdot 0{,}8\cdot(-5)=408{,}04$;
$x=25$ или $x=-\frac{1}{4}$; $0{,}8x^2-19{,}8x-5=\frac{4}{5}(x+\frac{1}{4})(x-25)=(4x+1)(\frac{1}{5}x-5)$.

б) $3{,}5-3\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}x^2=0.$

Найдем корни: $D=\frac{100}{9}-4\cdot3{,}5\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{9}$; $x=\frac{3\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}\cdot2}=\frac{7}{2}$ или $x=\frac{3\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}\cdot2}=\frac{3}{2}$;

$3{,}5-3\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}x^2=\frac{2}{3}\ (x-\frac{3}{2})(x-\frac{7}{2}).$

в) $x^2+x\sqrt{2}-2=0.$

Найдем корни: $D=2-4\cdot1\cdot(-2)=10$; $x=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$ или $x=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$

$x^2+x\sqrt{2}-2=(x-\frac{-\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2})(x-\frac{-\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}).$

г) $x^2-x\sqrt{6}+1=0.$

Найдем корни: $D=6-4\cdot1\cdot1=2$; $x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ или $x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$x^2-x\sqrt{6}+1=(x-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2})(x-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}).$

225. $mx^2+(m-3)x-3=0$

$D=(m-3)^2+4\cdot3\cdot m=(m+3)^2$

$x_{1,2}=\frac{3-m\pm(m+3)}{2m}\Rightarrow x_1=\frac{3}{m}$ и $x_2=-1.$

Ответ: -1 и 1; -1 и 3; -1 и -3; -1 и -1.

226. $(n-3)x^2+(n+1)x+9-2n$

$\begin{cases}n-3\ge1\\9-2n\ge1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n\ge4\\n\le4\end{cases}\Leftrightarrow n=4$

Ответ: x^2+5x+1.

227. а) 1) $m^2+6m+8=0$;

$D=6^2-4\cdot1\cdot8=4$; $m_1=\frac{-6+2}{2}=-2$, $m_2=\frac{-6-2}{2}=-4$;

$m^2+6m+8=(m+2)(m+4).$

2) $\frac{2m^2-8}{m^2+6m+8}=\frac{2(m^2-4)}{(m+2)(m+4)}=\frac{2(m-2)(m+2)}{(m+2)(m+4)}=\frac{2(m-2)}{m+4}$.

б) 1) $2m^2-5m+2=0$;

$D=(-5)^2-4\cdot2\cdot2=9$; $m_1=\frac{5+3}{4}=2$, $m_2=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$;

$2m^2-5m+2=2(m-2)(m-\frac{1}{2})=(m-2)(2m-1)$;

2) $\frac{2m^2-5m+2}{mn-2n-3m+6}=\frac{(m-2)(2m-1)}{n(m-2)-3(m-2)}=\frac{(m-2)(2m-1)}{(m-2)(n-3)}=\frac{2m-1}{n-3}.$

228. а) 1) $4x^2-3x-1=0$;

$D=(-3)^2-4\cdot4\cdot(-1)=25$; $x_1=\dfrac{3+5}{8}=1$, $x_2=\dfrac{3-5}{8}=-\dfrac{1}{4}$;

$4x^2-3x-1=4(x-1)(x+\dfrac{1}{4})=(x-1)(4x+1)$;

2) $\dfrac{x+4}{x-1}-\dfrac{37x-12}{4x^2-3x-1}=\dfrac{x+4}{x-1}-\dfrac{37x-12}{(x-1)(4x+1)}=$

$=\dfrac{(x+4)(4x+1)-(37x-12)}{(x-1)(4x+1)}=\dfrac{4x^2+16x+x+4-37x+12}{(x-1)(4x+1)}=$

$=\dfrac{4(x^2-5x+4)}{(x-1)(4x+1)}$

3) $4x^2-20x+16=0$; $x^2-5x+4=0$;

$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot4=9$; $x_1=\dfrac{5+3}{2}=4$, $x_2=\dfrac{5-3}{2}=1$;

$4x^2-20x+16=4(x-4)(x-1)$;

4) $\dfrac{4(x^2-5x+4)}{(x-1)(4x+1)}=\dfrac{4(x-4)(x-1)}{(x-1)(4x+1)}=\dfrac{4(x-4)}{4x+1}$.

б) 1) $x^2+3x+2=0$;

$D=3^2-4\cdot1\cdot2=1$; $x_1=\dfrac{-3+1}{2}=-1$, $x_2=\dfrac{-3-1}{2}=-2$;

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$;

2) $\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{1-x}{x^2+3x+2}=\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{1-x}{(x+1)(x+2)}=(x-1)\left(\dfrac{1}{(x+2)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}\right)=$

$=(x-1)\dfrac{x+1+1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{x-1}{x+1}$

в) 1) $x^2-3x-4=0$;

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)=25$; $x_1=\dfrac{3+5}{2}=4$, $x_2=\dfrac{3-5}{2}=-1$;

$x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$;

2) $\dfrac{2x^2-7}{x^2-3x-4}-\dfrac{x+1}{x-4}=\dfrac{2x^2-7}{(x+1)(x-4)}-\dfrac{x+1}{x-4}=\dfrac{2x^2-7-(x+1)(x+1)}{(x-4)(x+1)}=$

$=\dfrac{2x^2-7-(x^2+2x+1)}{(x-4)(x+1)}=\dfrac{2x^2-7-x^2-2x-1}{(x-4)(x+1)}=\dfrac{x^2-2x-8}{(x-4)(x+1)}$

3) $x^2-2x-8=0$;

$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-8)=36$; $x_1=\dfrac{2+6}{2}=4$, $x_2=\dfrac{2-6}{2}=-2$;

$x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$;

4) $\dfrac{x^2-2x-8}{(x-4)(x+1)}=\dfrac{(x-4)(x+2)}{(x-4)(x+1)}=\dfrac{x+2}{x+1}$.

г) 1) $3x^2-5x+2=0$;

$D=(-5)^2-4\cdot3\cdot2=1$; $x_1=\dfrac{5+1}{6}=1$, $x_2=\dfrac{5-1}{6}=\dfrac{2}{3}$;

$3x^2-5x+2=3(x-1)(x-\dfrac{2}{3})=(x-1))(3x-2)$;

2) $\dfrac{2+x-x^2}{2-5x+3x^2}+\dfrac{10x}{3x-2}=\dfrac{2+x-x^2}{(x-1)(3x-2)}+\dfrac{10x}{3x-2}=\dfrac{2+x-x^2+10x(x-1)}{(x-1)(3x-2)}=$

$=\dfrac{2+x-x^2+10x(x-1)}{(x-1)(3x-2)}=\dfrac{2+x-x^2+10x^2-10x}{(x-1)(3x-2)}=\dfrac{9x^2-9x+2}{(x-1)(3x-2)}$;

3) $9x^2-9x+2=0$;

$D=(-9)^2-4\cdot9\cdot2=9$; $x_1=\dfrac{9+3}{18}=\dfrac{2}{3}$, $x_2=\dfrac{9-3}{18}=\dfrac{1}{3}$;

$9x^2-9x+2=9(x-\dfrac{2}{3})(x-\dfrac{1}{3})=(3x-2)(3x-1)$;

4) $\dfrac{9x^2-9x+2}{(x-1)(3x-2)}=\dfrac{(3x-2)(3x-1)}{(x-1)(3x-2)}=\dfrac{3x-1}{x-1}$

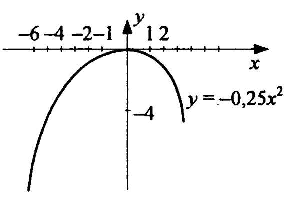
229. а) $x=5$; $y=-7\Rightarrow a\cdot5^2=-7$; $25a=-7$; $a=-\dfrac{7}{25}$.

б) $x=-\sqrt{3}$; $y=9\Rightarrow a\cdot(-\sqrt{3})^2=9$; $3a=9$; $a=3$.

в) $x=-\dfrac{1}{2}$; $y=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow a\cdot(-\dfrac{1}{2})^2=-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{4}a=-\dfrac{1}{2}$; $a=-\dfrac{1\cdot4}{2\cdot1}=-2$

г) $x=100$; $y=10\Rightarrow a\cdot100^2=10$; $10000a=10$; $a=\dfrac{10}{10000}=\dfrac{1}{1000}=0{,}001$.

230. 1) График функции $y=-0{,}25x^2$ – парабола, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицательный).



2) Найдем координаты вершины:

$x_в=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{0}{2\cdot(-0{,}25)}=0$; $y_в=0$; $(0;0)$.

3)

x	2	–2	3	–3	1	–1	–6
y	–1	–1	–2,25	–2,25	–0,25	–0,25	–9

4) Наибольшее значение равно 0, наименьшее значение равно $y(-6)=-9$.

231. а) При $a>0$ имеем: $y=ax^2\ge0\Rightarrow E(y)=[0;+\infty)$;

б) при $a<0$ имеем: $y=ax^2\le0\Rightarrow E(y)=(-\infty;0]$.

232. $y=ax^2$; $y=ax$.

Найдем точки пересечения: $ax^2=ax$; $ax^2-ax=0$; $ax(x-1)=0$; $x=0$ или $x-1=0$; $x=1$. При $x=0$ получим точку пересечения $(0;0)$, при $x=1$ получим $(1;a)$.

233. Перенеся параболу $y = 7x^2$ вверх на 5 единиц, получим новую параболу — график функции $y = 7x^2 + 5$.

Перенеся ее влево на 8 единиц, получим параболу — график функции $y = 7(x + 8)^2 + 5$.

Итак, $y = 7(x + 8)^2 + 5$.

234. а) График функции $y = -x^3$ получается из графика функции $y = x^3$ вертикальным отражением относительно оси Ox.

График функции $y = (x-3)^3$ получается из графика функции $y = x^3$ при сдвиге на 3 единицы вправо.

График функции $y = x^3 + 4$ получается из графика функции $y = x^3$ при сдвиге вверх на 4 единицы.

б) График функции $y = -\sqrt{x}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ при отражении относительно оси Ox.

График функции $y = \sqrt{x+5}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ при сдвиге на 5 единиц влево.

График функции $y = \sqrt{x} - 1$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ при сдвиге на 1 единицу вниз.

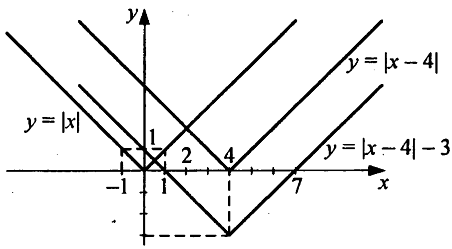
235.

1) Строим график функций

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

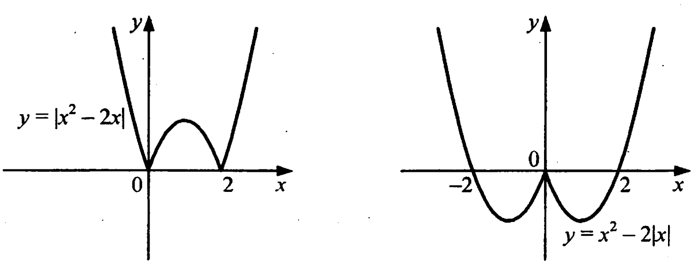
2) График функции $y = |x-4|$ получается из построенного графика при сдвиге на 4 единицы вправо.

3) График функции $y = |x-4|-3$ получается из графика функции $y = |x-4|$ при сдвиге на 3 единицы вниз.



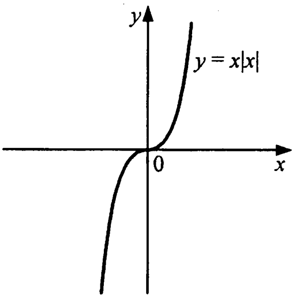
236.

а) б)

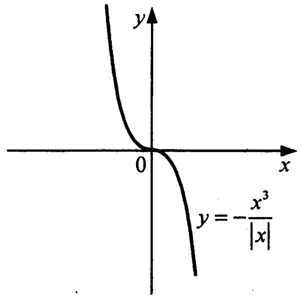


237.

а)



б)



238. График функции $y = x^2-6x + c$ есть парабола, у которой ветви направлены вверх.

Координаты вершины: $x_в = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$; $y_в = 9-18 + c = c-9$.

График функции располагается выше данной горизонтальной прямой, если выше нее будет расположена вершина параболы.

а) График располагается выше прямой $y = 4$ при $c-9>4$, т.е. при $c>13$.

б) График располагается выше прямой $y = -1$ при $c-9>-1$ т.е. при $c>8$.

239. Вычислим координаты вершины параболы:

$x_в = -\frac{b}{2}$, $y_в = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + c = \ = c - \frac{b^2}{4}$.

Чтобы вершина оказалась в точке (6; –12), положим:

$-\frac{b}{2} = 6$, $b = -12$; $c - \frac{b^2}{4} = -12$, $c = \frac{b^2}{4} - 12$,

так как $b = -12$, $c = \frac{144}{4} - 12 = 36 - 12 = 24$.

240. Прямая является осью симметрии параболы, когда на этой прямой лежит вершина параболы.

$x_в = \frac{16}{2a} = \frac{8}{a}$; должно быть $\frac{8}{a} = 4$, т.е. $a = 2$.

241. $y = ax^2 + c$; $y = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0$; $ax^2 = -c$; $x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow$ уравнение имеет решения при

1) $a>0$, $c\le 0$ 2) $a<0$, $c\ge 0$ 3) $a = 0$, $c = 0$.

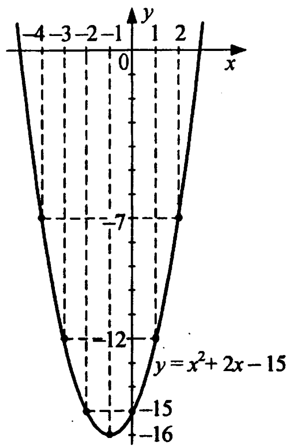
242. Так как график проходит через $M(1; 2)$, имеем: $2 = a + b-18$.

Так как он проходит через $N(2; 10)$, имеем: $10 = 4a + 2b-18$.

Из первого уравнения получим $a = 20-b$;

из второго получим $10 = 4(20-b) + 2b-18$; $28 = 80-4b + 2b$; $b = 40-14 = 26$, откуда $a = 20-26 = -6$.

243. а) 1) Графиком функции $y = x^2 + 2x - 15$ является парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положительный).



2) Найдем координаты вершины:

$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1;$$

$y_в = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 15 = -16;$

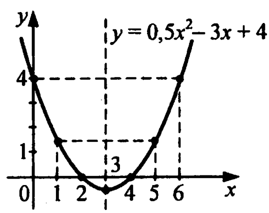
$(-1; -16)$.

3)

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	−12	−15	−16	−15	−12	−7

б) 1) Графиком функции $y = 0{,}5x^2 - 3x + 4$ является парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положительный).

2) Найдем координаты вершины:



$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \cdot 0{,}5} = 3;$$

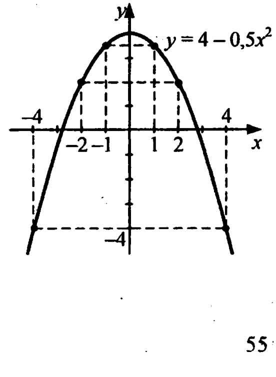
$$y_в = \frac{1}{2} \cdot 9 - 9 + 4 = -\frac{1}{2};$$

$\left(3; -\frac{1}{2}\right)$.

3)

x	−1	0	1	2	3	4	5
y	$7\frac{1}{2}$	4	1,5	0	$-\frac{1}{2}$	0	1,5

в) 1) Графиком функции $y = 4 - 0{,}5x^2$ является парабола, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицательный).



2) Найдем координаты вершины:

$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot (-0{,}5)} = 0;$$

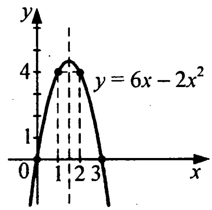
$y_в = 0 + 4 = 4;$

$(0; 4)$ — координаты вершины.

3)

x	0	1	−1	2	−2
y	4	3,5	3,5	2	2

г) 1) Графиком функции $y = 6x - 2x^2$ является парабола, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицательный).



2) Найдем координаты вершины:

$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\cdot(-2)} = 1{,}5;$$

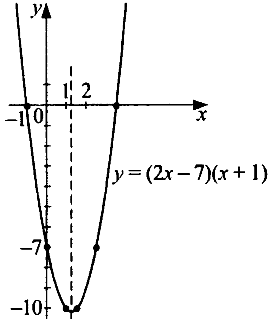
$$y_в = 6\cdot\frac{3}{2} - 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4{,}5;$$

(1,5; 4,5).

3)

x	1	2	0	3	−1	−2
y	4	4	0	0	−8	−20

д) $y = (2x-7)(x+1) = 2x^2 - 7x + 2x - 7 =$
$= 2x^2 - 5x - 7$.



1) Графиком функции $y = (2x-7)(x+1)$ является парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положительный).

2) Найдем координаты вершины:

$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2\cdot 2} = 1{,}25;$$

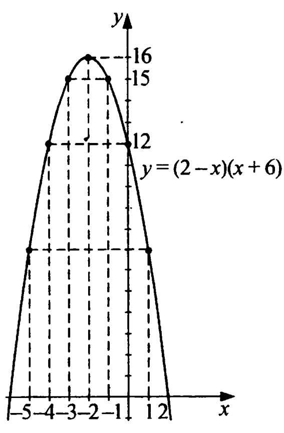
$$y_в = 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5\frac{5}{4} - 7 = -10\frac{1}{8};$$

$\left(1\frac{1}{4}; -10\frac{1}{8}\right)$.

3)

x	1	0	−1	2	−2
y	−10	−7	0	−9	11

е) $y = (2-x)(x+6) = 2x - x^2 + 12 - 6x =$
$= -x^2 - 4x + 12$.



1) Графиком функции $y = (2-x)(x+6)$ является парабола, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицательный).

2) Найдем координаты вершины:

$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot(-1)} = -2;$$

$y_в = -(-2)^2 - 4\cdot(-2) + 12 = 16$; (−2; 16).

3)

x	−1	−3	0	−4	2	−2
y	15	15	12	12	0	16

244. а) Графиком функции является парабола, у которой ветви направлены вверх. Найдем координаты вершины:

$$x_в = \frac{0,5}{2\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{12},$$

$$y_в = 3\cdot\frac{1}{144} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} + \frac{1}{16} = \frac{1}{48} - \frac{1}{24} + \frac{1}{16} = \frac{1-2+3}{48} = \frac{1}{24}$$

Так как $y_в = \frac{1}{24}$, $E(y) = [\frac{1}{24}; +\infty)$.

б) Графиком функции является парабола, у которой ветви направлены вверх. Найдем координаты вершины:

$$x_в = -\frac{1,2}{4} = -0,3;\ y_в = 2\cdot 0,09 + 1,2\cdot(-0,3) + 2 = 0,18-0,36 + 2 = 2,18-0,36 = 1,82.$$

Следовательно, $E(y) = [1,82; +\infty)$.

в) Графиком функции является парабола, у которой ветви направлены вниз. Найдем координаты вершины:

$$x_в = \frac{4}{2\cdot\frac{1}{2}} = 4,\ y_в = -\frac{1}{2}16 + 4\cdot 4-5,5 = -8 + 16-5,5 = 8-5,5 = 2,5.$$

Следовательно, $E(y) = (-\infty; 2,5]$.

г) Графиком функции является парабола, у которой ветви направлены вниз. Найдем координаты вершины:

$$x_в = -\frac{2}{2\cdot 3} = -\frac{1}{3},$$

$$y_в = -3\cdot\frac{1}{9} + 2\cdot\frac{1}{3} - \frac{14}{3} = = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{14}{3} = \frac{-1+2-14}{3} = -\frac{13}{3} = -4\frac{1}{3}.$$

Следовательно, $E(y) = (-\infty; -4\frac{1}{3}]$.

245. График зависимости высоты от времени — парабола, у которой ветви направлены вниз.

Найдем координаты ее вершины: $t_в = \frac{-24}{-2\cdot 4,9} = \frac{12}{4,9} = \frac{120}{49} = 2\frac{22}{49}(c)$.

Максимальная высота, на которую поднялся мяч, — это ордината вершины $h_в$: $h_в = 24\cdot\frac{120}{49} - 4,9\cdot\left(\frac{120}{49}\right)^2 = \frac{24\cdot 120}{49} - \frac{49\cdot 120^2}{10\cdot 49^2} =$

$$= \frac{24\cdot 120}{49} - \frac{120\cdot 12}{49} = \frac{24\cdot 120 - 12\cdot 120}{49} = \frac{12\cdot 120}{49} = \frac{1440}{49} = 29\frac{19}{49}\ (м).$$

Заметим, что мяч поднимался в промежутке времени $[0; 2\frac{22}{49}]$. Найдем момент падения мяча: $h(t) = 0$; $24t-4,9t^2 = 0$.

Мяч упадет при $24-4,9t = 0$ (при $t = 0$ его бросили).

$4,9t = 24$; $t = \frac{240}{49} = 4\frac{44}{49}(c)$.

Итак, мяч падал в промежуток времени $[2\frac{22}{49}; 4\frac{44}{49}]$ и при $t = 4\frac{44}{49}$ упал на землю.

246. а) График такой функции — парабола, у которой ветви направлены вверх, а абсцисса вершины равна –3. Например, функция $y = (x + 3)^2$ удовлетворяет условию задачи.

б) График этой функции — парабола, у которой ветви направлены вниз, а абсцисса вершины равна 6. Например, функция $y = -(x-6)^2$ удовлетворяет условию задачи.

247. а) $y = 0$ при $x = 3$ и $x = 4 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 9+3p+q=0, \\ 16+4p+q=0; \end{cases} \begin{cases} q=-3(p+3), \\ 16+4p-3(p+3)=0; \end{cases} \begin{cases} q=-3(p+3), \\ 16+p-9=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} q=-3(p+3), \\ p=-7; \end{cases} \begin{cases} q=12, \\ p=-7; \end{cases}$$

б) При $x = 0$ имеем $y = 6$, при $x = 2$ имеем $y = 0 \Rightarrow q = 6$;

$4 + 2p + q = 0 \Rightarrow 4 + 2p + 6 = 0$; $2p = -10$; $p = -5$.

Итак, $q = 6$, $p = -5$.

в) При $x = 6$ функция достигает наименьшего значения $\Rightarrow$ координаты вершины параболы, являющейся ее графиком, (6; 24).

Поскольку $x_в = -\frac{b}{2a}$, имеем: $6 = -\frac{p}{2}$, т.е. $p = -12$.

Поскольку $y_в = 24$, имеем:

$36 + 6p + q = 24 \Rightarrow 36 - 6\cdot12 + q = 24$; $12 - 6\cdot12 = -q$, $-q = -5\cdot12$, $q = 60$.

Итак, $q = 60$, $p = -12$.

248. а) Ветви параболы направлены вниз, значит, $a < 0$.

Выделим квадрат двучлена:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a((x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c.$$

Заметим, что сдвиг вдоль оси Ox зависит от знаков a и b: если они совпадают, это — сдвиг влево на $\frac{b}{2a}$ единиц, если они разных знаков, это — сдвиг вправо на $\frac{b}{2a}$ единиц. В данном случае график сдвинут вправо от $y = 0$, значит, b и a имеют разные знаки, т.е. $b>0$. Так как $ax^2 + bx + c = x(b + ax) + c$, коэффициент c определяет сдвиг вдоль оси Oy графика функции $x(b + ax)$. В нашем случае у a и b разные знаки, значит, один нуль квадратичной функции $x(b + ax)$ равен 0, а второй лежит правее нуля. Так как на данном графике оба корня лежат правее нуля, произошел сдвиг вниз, следовательно, $c<0$.

б) Ветви параболы направлены вверх, следовательно, $a>0$. График сдвинут вправо от оси Oy, значит, a и b разных знаков, т.е. $b<0$. Так как a и b разных знаков, второй нуль функции $ax^2 + bx$ правее $x = 0$. Т.к. на данном графике оба нуля лежат правее оси Oy, значит, произошел сдвиг вверх, т.е. $c>0$. Итак, $a>0$, $b<0$, $c>0$.

249. а) Функция $y = x^{100}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, значит, $5^{100} > 4^{100}$.

б) Т.к. $0{,}87<0{,}89$ и функция $y = x^{100}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, значит, $0{,}87^{100} < 0{,}89^{100}$.

в) Функция $y = x^{261}$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$, значит, $1{,}5^{261} < 1{,}6^{261}$.

г) Функция $y = x^{261}$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$, значит, $\left(\frac{2}{3}\right)^{261} > \left(\frac{3}{5}\right)^{261}$.

250. а) Функция $y = x^{10}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, значит, $2^{10} < 3^{10}$.

б) Функция $y = x^5$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$, значит, $0{,}3^5>0{,}2^5$.

в) Функция $y = x^{17}$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$, значит, $\left(\frac{4}{5}\right)^{17} < \left(\frac{8}{9}\right)^{17}$.

г) $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^{10} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$;

д) $8^7 = (2^3)^7 = 2^{21}$; $y = x^{21}$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$, значит, $3^{21}>2^{21}$, т.е. $3^{21}>8^7$.

е) $36^6 = (36^2)^3 = 1296^3$. Функция возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$ и $1250<1296$, $1296^3>1250^3$, т.е. $36^6>1250^3$.

251. а) Функция $f(x) = x^7$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty) \Rightarrow$ $f(25) > f(12) \Rightarrow f(25) - f(12)>0$.

б) Функция $f(x) = x^7$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty) \Rightarrow f(-30) < f(-20) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(-30)-f(-20)<0$.

в) $f(0) = 0 \Rightarrow f(0)\cdot f(60) = 0$.

г) Функция $g(x) = x^{10}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty) \Rightarrow g(17) - g(5)>0$.

д) $g(-9)>0$; $g(-17)>0 \Rightarrow g(-9)\cdot g(-17)>0$.

е) Функция $g(x) = x^{10}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty) \Rightarrow g(38) > g(0) \Rightarrow$ $g(38)-g(0)>0$.

252. а) Рассмотрим разность $x^{n+1}-x^n = x^n(x-1)$.

Так как $x \in [0; 1]$, то $x^n \geq 0$, $x - 1 \leq 0$, следовательно, $x^{n+1} - x^n \leq 0$, то есть $x^{n+1} \leq x^n$.

б) Рассмотрим разность $x^{n+1} - x^n = x^n(x - 1)$.

Так как $x \in (1; +\infty)$, то $x^n \geq 0$, $x - 1 > 0$, следовательно, $x^{n+1} - x^n > 0$, то есть $x^{n+1} > x^n$.

253. а) $8 = 2^n$, значит, $n = 3$.

б) $12{,}25 = 3{,}5^n$, значит, $n = 2$.

в) $81 = (-3)^n$, значит, $n = 4$.

г) $-32 = (-2)^n$, значит, $n = 5$.

254. а) $5 = 2^n$, $y = 2^n$ возрастает. $2^2 = 4<5<8^2 = 2^3$, значит, не существует.

б) $81 = (\sqrt{3})^n$, значит, $n = 8$.

в) $415 = (-5)^n$, значит, $n = 2m$. $415 = (-5)^{2m} = 25^m$. $y = 25^m$ — возрастает.

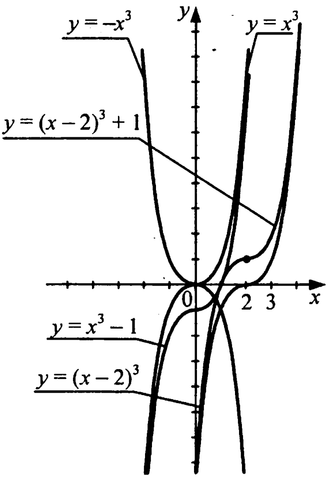
$25^1 = 25<415<625 = 25^2$, значит, не существует.

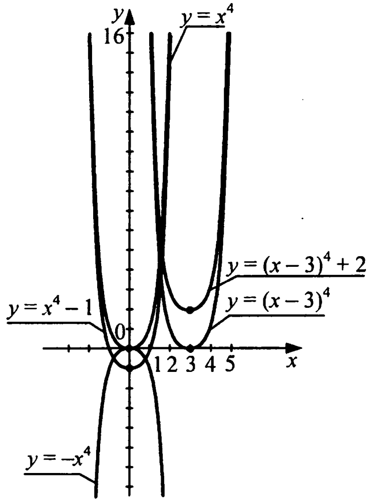
г) $-343 = (-7)^n$, значит, $n = 3$.

255. I. Построим график функции $y = x^3$. II. Построим график функции $y = x^3$.

x	-1	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3
y	-1	-8	$-\frac{1}{8}$	0	1	8	9

x	-1	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	$\frac{1}{2}$
y	-1	-16	$-\frac{1}{16}$	0	1	16	$\frac{1}{16}$





а) График функции $y = -x^3$ можно получить из графика функции $y = x^3$, пользуясь симметрией относительно оси x.

б) График функции $y = x^3-1$ можно получить из графика функции $y = x^3$ при помощи параллельного переноса на 1 единицу вниз вдоль оси y.

в) График функции $y = (x-2)^3$ можно получить из графика функции $y = x^3$ при помощи параллельного переноса на 2 единицы вправо вдоль оси x.

г) График функции $y = (x-2)^3 + 1$ можно получить из графика функции $y = x^3$ при помощи двух параллельных переносов — сдвига $y = x^3$ на 2 единицы вправо и на 1 единицу вверх.

д) График функции $y = -x^4$ можно получить из графика функции $y = x^4$, пользуясь симметрией относительно оси x.

е) График функции $y = x^4-1$ можно получить из графика функции $y = x^3$ при помощи параллельного переноса на 1 единицу вниз вдоль оси y.

ж) График функции $y = (x-3)^4$ можно получить из графика функции $y = x^4$ при помощи параллельного переноса на 3 единицы вправо вдоль оси x.

з) График функции $y = (x-3)^4 + 2$ можно получить из графика функции $y = x^3$ при помощи двух параллельных переносов — сдвига $y = x^4$ на 3 единицы вправо и на 2 единицу вверх.

256. а) 2 корня: $x_{1,2} = \pm\sqrt[10]{2}$; б) 1 корень: $x = 0$; в) нет корней;

г) 1 корень: $x = \sqrt[7]{5}$; д) 1 корень: $x = 0$; е) 1 корень: $x = \sqrt[7]{-1}$.

257. а) $-0,5\sqrt[10]{1024} = -0,5\cdot\sqrt[10]{2^{10}} = -0,5\cdot 2 = -1.$

б) $-\frac{2}{3}\sqrt[7]{-2187} = \frac{2}{3}\sqrt[7]{2187} = \frac{2}{3}\sqrt[7]{3^7} = \frac{2}{3}\cdot 3 = 2.$

в) $1,5\sqrt[9]{512} = 1,5\sqrt[9]{2^9} = 1,5\cdot 2 = 3.$

г) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}\cdot\sqrt{5\frac{4}{9}} = \sqrt[5]{\frac{243}{32}}\cdot\sqrt{\frac{49}{9}} = \sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^5}\cdot\frac{7}{3} = \frac{3\cdot 7}{2\cdot 3} = \frac{7}{2}.$

д) $\sqrt[3]{-125}\cdot\sqrt[7]{0,1^7} = -\sqrt[3]{5^3}\cdot 0,1 = -5\cdot 0,1 = -0,5.$

е) $\sqrt[4]{16^{-2}}\cdot\sqrt[3]{0,125^3} = \sqrt[4]{\frac{1}{16^2}}\cdot\sqrt[3]{0,125^3} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^4}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1\cdot 1}{4\cdot 8} = \frac{1}{32}.$

258. а) $\sqrt{x} = 0,2;\ (\sqrt{x})^2 = 0,2^2;\ \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 0,04 \Rightarrow x = 0,04.$

б) $\sqrt[3]{y} = \frac{1}{2};(\sqrt[3]{y})^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3;\ \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow y = \frac{1}{8}.$

в) $\sqrt[4]{\epsilon} = -1$; нет решений, т.к. корень 4-ой степени из любого числа есть число неотрицательное.

г) $\sqrt[4]{b} = 2;\ (\sqrt[4]{b})^4 = 2^4;\ \left(b^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 2^4 \Rightarrow b = 16.$

д) $\sqrt[8]{x} = 1;\ (\sqrt[8]{x})^8 = 1^8;\ \left(x^{\frac{1}{8}}\right)^8 = 1^8 \Rightarrow x = 1.$

е) $\sqrt[3]{y} = -2;\ (\sqrt[3]{y})^3 = (-2)^3 = -8;\ (y^{\frac{1}{3}})^3 = (-2)^3 \Rightarrow y = -8.$

259. а) При $x-2\ge 0$; $x\ge 2$ выражение имеет смысл. б) При $\frac{9-x}{5}\ge 0$; $x\le 9$.

в) При любом x выражение имеет смысл.

г) $a\ge\frac{5}{3}$; д) $y\le\frac{6}{5}$; е) $b\ge\frac{3}{2}$.

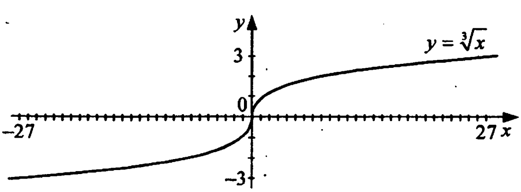
260. Построим график функции $y = \sqrt[3]{x}$

x	0	1	8	-1	-27
y	0	1	2	-1	-3

а) $\sqrt[3]{23} < \sqrt[3]{27}$;

б) $\sqrt[3]{-5} < \sqrt[3]{-4}$;

в) $\sqrt[3]{-0,1} < \sqrt[3]{-0,01}$.



261. а) Так как 6<7, то $\sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{7}$, следовательно, $\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{7}$ <0.

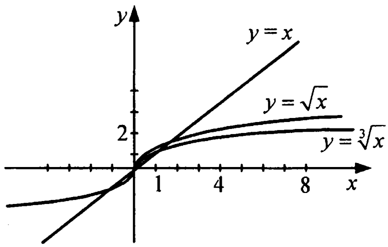
б) Так как $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, то $\sqrt[5]{\frac{1}{2}} > \sqrt[5]{\frac{1}{3}}$, следовательно, $\sqrt[5]{\frac{1}{2}} - \sqrt[5]{\frac{1}{3}}$ >0.

в) Так как 1>0,99, то 1> $\sqrt[4]{0,99}$, следовательно, 1– $\sqrt[4]{0,99}$ >0.

г) Так как $0,28 = \frac{7}{25} < \frac{2}{7}$, то $\sqrt[6]{0,28} < \sqrt[6]{\frac{2}{7}}$, следовательно, $\sqrt[6]{0,28} - \sqrt[6]{\frac{2}{7}}$ <0.

262. а) $x \geq 20$; б) $x \leq 2,5$; в) $x \geq -0,125$.

263.



а) $\sqrt{x} = x$, значит,

$x = x^2$; $x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1^{\frac{1}{2}} = 0, x_2^{\frac{1}{2}} = 1$, т.е. $x_1 = 0, x_2 = 1$

$\sqrt{x} < x$, значит, $x>0$; т.к. корень 2-ой степени число неотрицательное.

$\sqrt{x} > x$, значит, $x(x-1)<0$, т.е. $0<x<1$.

б) $\sqrt[3]{x} = x$, значит, $x = x^3$,

т.е. $x(x^2-1) = 0$; $x(x-1)(x+1) = 0$,

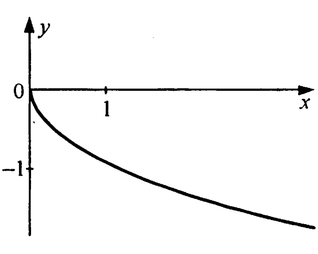
т.е. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$.

$\sqrt[3]{x} < x$, значит, $x<x^3$; $x(x^2-1)>0$; $-1<x<0$ или $x>1$.

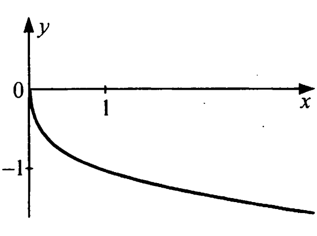
$\sqrt[3]{x} > x$, значит, $x>x^3$; $x(x^2-1)<0$; $x<-1$ или $0<x<1$.

264.

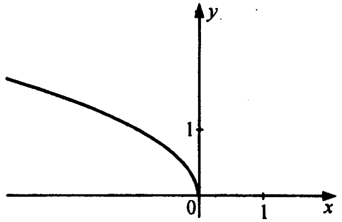
а) $y = -\sqrt{x}$;



б) $y = -\sqrt[3]{x}$;



в) $y=\sqrt{-x}$;



г) $y=\sqrt[3]{-x}$;

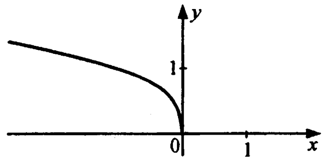


График функции $y=\sqrt{-x}$ лежит во II четверти и симметричен графику функции $y=-\sqrt{x}$ (III четверть) относительно оси Ox.

График функции $y=-\sqrt[3]{x}$ не отличается от графика функции $y=\sqrt[3]{-x}$ и они лежат во II и IV четвертях.

ГЛАВА II. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 5. Уравнения с одной переменной

265. а) 5; б) 6; в) 5; г) $(x+8)(x-7)=x^2+8x-7x-56=0$, его степень 2; д) 1;
е) $5x^3-5x(x^2+4)=17 \Rightarrow 5x^3-5x^3-20x=17 \Rightarrow -20x-17=0$, его степе
равна 1.

266. а) $(8x-1)(2x-3)-(4x-1)^2=38$; $16x^2-2x-24x+3-(16x^2-8x+1)=38$;
$16x^2-2x-24x+3-16x^2+8x-1-38=0$; $-18x-36=0$; $-18x=36$; $x=-2$.

б) $\dfrac{(15x-1)(1+15x)}{3}=2\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{(15x-1)(1+15x)}{3}=\dfrac{8}{3}$;

$225x^2-1=8$; $225x^2=9$; $x^2=\dfrac{9}{225}$; $x_1=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$, $x_2=-\dfrac{3}{15}=-\dfrac{1}{5}$.

в) $0{,}5y^3-0{,}5y(y+1)(y-3)=7$;
$0{,}5y^3-0{,}5y(y^2+y-2y-3)-7=0$;
$y^2+1{,}5y-7=0$;

$D=2{,}25+28=30{,}25$; $y_1=\dfrac{-1{,}5+5{,}5}{2}=2$, $y_2=\dfrac{-1{,}5-5{,}5}{2}=-3{,}5$.

г) $x^4-x^2=\dfrac{(1+2x^2)(2x^2-1)}{4}$; $4(x^4-x^2)=(1+2x^2)(2x^2-1)$;
$4x^4-4x^2=4x^4-1$; $4x^4-4x^2-4x^4=-1$;
$4x^2=1$; $x^2=\dfrac{1}{4}$; $x_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_2=\dfrac{1}{2}$.

267. а) $(6-x)(x+6)-(x-11)x=36$;
$36-x^2-(x^2-11x)-36=0$; $36-x^2-x^2+11x-36=0$;
$-2x^2+11x=0$; $x(-2x+11)=0$;
$x=0$ или $-2x+11=0$, т.е. $-2x=-11$, $x=5{,}5$.

б) $\dfrac{1-3y}{11}-\dfrac{3-y}{5}=0$; $\dfrac{5(1-3y)-11(3-y)}{55}=0$; $55\neq0 \Rightarrow$
$5-15y-33+11y=0$; $-4y=28$; $y=-7$.

в) $9x^2-\dfrac{(12x-11)(3x+8)}{4}=1$; $36x^2-(36x^2-33x+96x-88)-4=0$;

$36x^2-36x^2+33x-96x+88-4=0$; $-63x=-84$; $x=\dfrac{4}{3}=1\dfrac{1}{3}$.

г) $\dfrac{(y+1)^2}{12}-\dfrac{1-y^2}{24}=4$; $\dfrac{(y+1)^2}{12}-\dfrac{1-y^2}{24}-4=0$;

$\dfrac{2(y+1)^2-(1-y)^2-96}{24}=0$;

$24\neq0 \Rightarrow 2(y^2+2y+1)-1+y^2-96=0$; $3y^2+4y-95=0$;

$D=4^2-4\cdot3\cdot(-95)=1156$; $y_1=\dfrac{-4+34}{6}=5$, $y_2=\dfrac{-4-34}{6}=-6\dfrac{1}{3}$.

268. $5x^6 + 6x^4 + x^2 = -4$. В левую часть уравнения x входит только в четной степени $\Rightarrow$ число неотрицательное, а в правой части — число отрицательное, значит уравнение корней не имеет.

269. Пусть существует корень $x_0 < 0$.

Так как отрицательное число в нечетной степени есть число отрицательное, найдем знак левой части: $12x_0^5 + 7x_0^3 + 11x_0 - 3 < 0$, а в правой части $121 > 0$. Т.е. равенство не выполняется ни при каких x, т.е. нет корней.

270. $(a + 3)^3 = a^3 + 513$

$a^3 + 9a^2 + 27a + 27 = a^3 + 513$

$a^2 + 3a - 54 = 0$

$a = 6$

271. $\begin{cases} a = b + 5 \\ a^3 = b^3 + 3185 \end{cases}$

$(b + 5)^3 = b^3 + 3185$

$b^3 + 15b^2 + 75b + 125 = b^3 + 3185$

$b^2 + 5b - 204 = 0$

$\left[\begin{array}{l} b = 12 \\ b = -17 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 17 \\ a = -12 \end{array}\right.$

Ответ: $a = 17$ и $b = 12$ или $a = -12$ и $b = -17$.

272. а) $y^3 - 6y = 0$; $y(y^2 - 6) = 0$;

$y_1 = 0$ или $y^2 - 6 = 0$, $y^2 = 6$, $y_2 = \sqrt{6}$, $y_3 = -\sqrt{6}$.

б) $6x^4 + 3{,}6x^2 = 0$;

$x^2(6x^2 + 3{,}6) = 0$;

$x_1 = 0$ или $6x^2 + 3{,}6 = 0$, т.е. $6x^2 = -3{,}6$, $x^2 = -0{,}6$.

Во втором случае нет решений, т.к. квадрат любого числа есть число неотрицательное.

в) $x^3 + 3x = 3{,}5x^2$; $x(x^2 - 3{,}5x + 3)$; $x_1 = 0$ или $x^2 - 3{,}5x + 3 = 0$;

$D = 12{,}25 - 4 \cdot 3 = 0{,}25$; $x_2 = \dfrac{3{,}5 + 0{,}5}{2} = 2$, $x_3 = \dfrac{3{,}5 - 0{,}5}{2} = 1{,}5$.

г) $x^3 - 0{,}1x = 0{,}3x^2$; $x(x^2 - 0{,}3x - 0{,}1) = 0$;

$x_1 = 0$; $x^2 - 0{,}3x - 0{,}1 = 0$;

$D = 0{,}09 - 4 \cdot 1(-0{,}1) = 0{,}49$; $x_2 = \dfrac{0{,}3 + 0{,}7}{2} = 0{,}5$; $x_3 = \dfrac{0{,}3 - 0{,}7}{2} = -0{,}2$.

д) $9x^3 - 18x^2 - x + 2 = 0$;

$(9x^3 - 18x^2) + (-x + 2) = 0$; $9x^2(x - 2) - (x - 2) = 0$;

$(x - 2)(9x^2 - 1) = 0$; $(x - 2)(3x - 1)(3x + 1) = 0$;

$x - 2 = 0$ или $3x - 1 = 0$ или $3x + 1 = 0$;

$x_1 = 2$; $x_2 = \dfrac{1}{3}$; $x_3 = -\dfrac{1}{3}$.

е) $y^4 - y^3 - 16y^2 + 16y = 0$; $y^3(y - 1) - 16y(y - 1) = 0$; $(y - 1)(y^3 - 16y) = 0$;

$y(y - 1)(y^2 - 16) = 0$; $y(y - 1)(y - 4)(y + 4) = 0$;

$y = 0$ или $y - 1 = 0$ или $y - 4 = 0$ или $y + 4 = 0$;

$y_1 = 0$; $y_2 = 1$; $y_3 = 4$; $y_4 = -4$.

ж) $p^3-p^2=p-1$; $p^3-p^2-p+1=0$; $(p^3-p^2)+(-p+1)=-0$;
$p^2(p-1)-(p-1)=0$; $(p^2-1)x$
$x(p-1)=0$; $(p-1)(p+1)(p-1)=0$; $(p-1)^2(p+1)=0$;
$p-1=0$ или $p+1=0$;
$p_1=1$; $p_2=-1$.
з) $x^4-x^2=3x^3-3x$;
$x^4-x^2-3x^3+3x=0$; $x^2(x^2-1)-3x(x^2-1)=0$;
$(x^2-1)(x^2-3x)=0$;
$x(x-1)(x+1)(x-3)=0$;
$x=0$ или $x-1=0$ или $x+1=0$ или $x-3=0$;
$x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=-1$; $x_4=3$.
273. а) $0{,}7x^4-x^3=0$; $x^3(0{,}7x-1)=0$;
$x_1=0$ или $0{,}7x-1=0$; $0{,}7x=1$, $x_2=1\frac{3}{7}$.
б) $0{,}5x^3-72x=0$; $x(0{,}5x^2-72)=0$;
$x_1=0$ или $0{,}5x^2-72=0$, т.е. $0{,}5x^2=72$,
$x^2=144$, $x_2=12$ или $x_3=-12$.
в) $x^3+4x=5x^2$; $x^3+4x-5x^2=0$; $x(x^2-5x+4)=0$;
$D=25-4\cdot4=9$; $x_2=\frac{5+3}{2}=4$ или $x_3=\frac{5-3}{2}=1$.
г) $3x^3-x^2+18x-6=0$; $x^2(3x-1)+6(3x-1)=0$;
$(3x-1)(x^2+6)=0$; $3x-1=0$ или $x^2+6=0$; $3x=1$, $x=\frac{1}{3}$ или $x^2=-6$.
Нет решения, т.к. квадрат любого числа есть число неотрицательное.
д) $2x^4-18x^2=5x^3-45x$;
$2x^4-18x^2-5x^3+45x=0$; $2x^2(x^2-9)-5x(x^2-9)=0$;
$(x^2-9)(2x^2-5x)=0$; $x(x-3)(x+3)(2x-5)=0$;
$x_1=0$ или $x-3=0$ или $x+3=0$ или $2x-5=0$;
$x_2=3$; $x_3=-3$; $x_4=2{,}5$.
е) $3y^2-2y=2y^3-3$; $3y^2-2y-2y^3+3=0$; $y^2(3-2y)+(3-2y)=0$;
$(3-2y)(y^2+1)=0$;
$3-2y=0$ или $y^2+1=0$;
$2y=3$, $y=1{,}5$ или $y^2=-1$ — нет решений, т.к. квадрат любого числа есть число неотрицательное.
274. а) $x^3+7x^2-6=0$; $(x+1)(x^2+6x-6)=0$
$D=6^2+4\cdot6=60$; $x_1=\frac{-6+2\sqrt{15}}{2}=-3+\sqrt{15}$ и $x_2=\frac{-6-2\sqrt{15}}{2}=-3-\sqrt{15}$
Ответ: -1, $-3\pm\sqrt{15}$.
б) $x^3+4x^2-5=0$; $(x-1)(x^2+5x+5)=0$
$D=5^2-4\cdot5=5$; $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$
Ответ: 1, $\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$.

275. $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

С осью Оx: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$(x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$; $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$; $x = 1, x = 2, x = 3$

С осью Оy: $y = -6$.

Ответ: $(1; 0); (2; 0); (3; 0); (0; -6)$.

276. а) $(2x^2 + 3)^2 - 12(2x^2 + 3) + 11 = 0$.

Обозначим $2x^2 + 3 = v \Rightarrow v^2 - 12v + 11 = 0$;

$D = (-12)^2 - 4 \cdot 11 = 100$;

$v_2 = \dfrac{12+10}{2} = 11$ или $v_1 = \dfrac{12-10}{2} = 1$;

$2x^2 + 3 = 11$ или $2x^2 + 3 = 1$.

1) $2x^2 = 8$; $x^2 = 4$; $x_2 = 2$ или $x_1 = -2$;

2) $2x^2 = -2$; $x^2 = -1$ — нет решений, т.к. квадрат любого числа есть число неотрицательное.

б) $(t^2 - 2t)^2 - 3 = 2(t^2 - 2t)$.

Обозначим $t^2 - 2t = v \Rightarrow v^2 - 3 = 2v$; $v^2 - 2v - 3 = 0$;

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$; $v_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$ или $v_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$;

$t^2 - 2t = 3$ или $t^2 - 2t = -1$; $t^2 - 2t - 3 = 0$ или $t^2 - 2t + 1 = 0$;

$t_1 = \dfrac{2+4}{2} = 3$, $t_2 = \dfrac{2-4}{2} = -1$; $t_3 = \dfrac{2+0}{2} = 1$.

в) $(x^2 + x - 1)(x^2 + x + 2) = 40$.

Обозначим $x^2 + x = v \Rightarrow$

$(v-1)(v+2) = 30$; $v^2 - v + 2v - 2 - 40 = 0$; $v^2 + v - 42 = 0$;

$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-42) = 169$;

$v_2 = \dfrac{-1+\sqrt{169}}{2} = 6$ или $v_1 = \dfrac{-1-\sqrt{169}}{2} = -7$;

$x^2 + x = 6$ или $x^2 + x = -7$;

$x^2 + x - 6 = 0$ или $x^2 + x + 7 = 0$;

$x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$, $x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$.

Второе уравнение не имеет корней, т.к. $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -27 < 0$.

г) $(2x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 4) + 2 = 0$.

Обозначим $2x^2 + x = v \Rightarrow (v-1)(v-4) + 2 = 0$;

$v^2 - v - 4v + 4 + 2 = 0$; $v^2 - 5v + 6 = 0$;

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$; $v_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3$, $v_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2$;

$2x^2 + x = 3$ или $2x^2 + x = 2$; $2x^2 + x - 3 = 0$ или $2x^2 + x - 2 = 0$;

$x_1 = \dfrac{-1+5}{4} = 1$ или $x_2 = \dfrac{-1-5}{4} = -\dfrac{3}{2}$; $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$; $x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$.

277. а) $(x^2 + 3)^2 - 11(x^2 + 3) + 28 = 0$.

Обозначим $x^2 + 3 = v \Rightarrow v^2 - 11v + 28 = 0$;

$D = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28 = 9$; $v_2 = \dfrac{11+3}{2} = 7$;

$v_1 = \dfrac{11-3}{2} = 4 \Rightarrow$

$x^2 + 3 = 7$ или $x^2 + 3 = 4$; $x^2 = 4$ или $x^2 = 1$;

$x_1 = 2$ или $x_2 = -2$; $x_3 = 1$ или $x_4 = -1$.

б) $(x^2 - 4x)^2 + 9(x^2 - 4x) + 20 = 0$.

Обозначим $x^2 - 4x = v \Rightarrow v^2 + 9v + 20 = 0$;

$D = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 1$; $v_2 = \dfrac{-9+1}{2} = -4$ или $v_1 = \dfrac{-9-1}{2} = -5$;

$x^2 - 4x = -4$ или $x^2 - 4x = -5$;

$x^2 - 4x + 4 = 0$ или $x^2 - 4x + 5 = 0$;

$x = \dfrac{4+0}{2} = 2$; второе уравнение решений не имеет, т.к. $D < 0$.

в) $(x^2 + x)(x^2 + x - 5) = 84$.

Обозначим $x^2 + x = v \Rightarrow v(v - 5) = 84$; $v^2 - 5v - 84 = 0$;

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-84) = 361$; $v_2 = \dfrac{5+19}{2} = 12$ или $v_1 = \dfrac{5-19}{2} = -7$;

$x^2 + x = 12$ или $x^2 + x = -7$;

$x^2 + x - 12 = 0$ или $x^2 + x + 7 = 0$;

$x_1 = \dfrac{-1-7}{2} = 3$ или $x_2 = \dfrac{-1-7}{2} = -4$; у второго уравнения нет корней, т.к. $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -27 < 0$.

278. а) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$. Обозначим $x^2 = v \Rightarrow v^2 - 5v - 36 = 0$;

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 169$; $v_2 = \dfrac{5+13}{2} = 9$ или $v_1 = \dfrac{5-13}{2} = -4 \Rightarrow$

$x^2 = 9$ или $x^2 = -4$; из первого уравнения $x = 3$ или $x = -3$; у второго уравнения нет решений, т.к. квадрат любого числа неотрицателен.

б) $y^4 - 6y^2 + 8 = 0$. Обозначим $y^2 = v \Rightarrow v^2 - 6v + 8 = 0$;

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4$; $v_2 = \dfrac{6+2}{2} = 4$ или $v_1 = \dfrac{6-2}{2} = 2$;

$y^2 = 4$ или $y^2 = 2$; $y_1 = 2$ или $y_2 = -2$; $y_3 = \sqrt{2}$ или $y_4 = -\sqrt{2}$.

в) $t^4 + 10t^2 + 25 = 0$. Обозначим $t^2 = v \Rightarrow v^2 + 10v + 25 = 0$;

$D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0$; $v = \dfrac{-10+0}{2} = -5$; $t^2 = -5$; нет корней.

г) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$. Обозначим $x^2 = v \Rightarrow 4v^2 - 5v + 1 = 0$;

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$; $v_2 = \dfrac{5+3}{8} = 1$ или $v_1 = \dfrac{5-3}{8} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$

$x^2 = 1$ или $x^2 = \dfrac{1}{4}$; $x_1 = 1$ или $x_2 = -1$; $x_4 = \dfrac{1}{2}$ или $x_3 = -\dfrac{1}{2}$.

д) $9x^4 - 9x^2 + 2 = 0$. Обозначим $x^2 = v \Rightarrow 9v^2 - 9v + 2 = 0$;

$D = (-9)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 2 = 9$; $v_2 = \dfrac{9+3}{18} = \dfrac{2}{3}$ или $v_1 = \dfrac{9-3}{18} = \dfrac{1}{3}$;

$x^2 = \frac{2}{3}$ или $x^2 = \frac{1}{3}$;

$x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ или $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$; $x_3 = \sqrt{\frac{1}{3}}$; $x_4 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$.

е) $16y^4 - 8y^2 + 1 = 0$. Обозначим $y^2 = v \Rightarrow 16v^2 - 8v + 1 = 0$;

$D = (-8)^2 - 4\cdot 16\cdot 1 = 0$; $v = \frac{8+0}{32} = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$y^2 = \frac{1}{4}$; $y_2 = \frac{1}{2}$; $y_1 = -\frac{1}{2}$.

279. а) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$. Обозначим $x^2 = v \Rightarrow v^2 - 25v + 144 = 0$;

$D = (-25)^2 - 4\cdot 1\cdot 144 = 49$; $v_2 = \frac{25+\sqrt{49}}{2} = 16$; $v_1 = \frac{25-\sqrt{49}}{2} = 9 \Rightarrow$

$x^2 = 16$ или $x^2 = 9$;

$x_1 = 4$; $x_2 = -4$; $x_3 = 3$; $x_4 = -3$.

б) $y^4 + 14y^2 + 48 = 0$. Обозначим $y^2 = v \Rightarrow v^2 + 14v + 48 = 0$;

$D = 14^2 - 4\cdot 1\cdot 48 = 4$; $v_2 = \frac{-14+2}{2} = -6$; $v_1 = \frac{-14-2}{2} = -8 \Rightarrow$

$y^2 = -6$ или $y^2 = -8$; — нет корней, т.к. квадрат любого числа неотрицателен.

в) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$. Обозначим $x^2 = v$; $v^2 - 4v + 4 = 0$;

$D = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 0$; $v = \frac{4+0}{2} = 2$; $x^2 = 2$; $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$.

г) $t^4 - 2t^2 - 3 = 0$. Обозначим $t^2 = v$; $v^2 - 2v - 3 = 0$;

$D = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 16$; $v_2 = \frac{2+4}{2} = 3$ или $v_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \Rightarrow$

$t^2 = 3$ или $t^2 = -1$;

$t_1 = \sqrt{3}$ или $t_2 = -\sqrt{3}$; у второго нет корней, т.к. квадрат любого числа неотрицателен.

д) $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$. Обозначим $x^2 = v \Rightarrow 2v^2 - 9v + 4 = 0$;

$D = 9^2 - 4\cdot 2\cdot 4 = 49$; $v_2 = \frac{9+7}{4} = 4$; $v_1 = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 4$ или $x^2 = \frac{1}{2}$;

$x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$; $x_4 = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

е) $5y^4 - 5y^2 + 2 = 0$. Обозначим $y^2 = v \Rightarrow 5v^2 - 5v + 2 = 0$;

$D = (-5)^2 - 4\cdot 5\cdot 2 = -15 < 0$ — нет корней.

280. а) $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

Точка пересечения с Оy. $x = 0 \Rightarrow y = 0^4 - 5\cdot 0^2 + 4 = 4 \Rightarrow (0; 4)$.

Точка пересечения с Оx $y = 0 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

обозначим $x^2 = v \Rightarrow v^2 - 5v + 4 = 0$;

$D = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 9$; $v_2 = \frac{5+3}{2} = 4$ или $v_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \Rightarrow x^2 = 4$ или $x^2 = 1/$

Из первого уравнения $x_1 = 2$ или $x_2 = -2$ из второго $x_3 = 1$ или $x_4 = -1$.
(2; 0); (– 2; 0); (1; 0); (– 1; 0).
б) $y = x^4 + 3x^2 - 10$.
Найдем точку пересечения с Оy:
если $x = 0 \Rightarrow y = 0^4 + 3\cdot 0^2 - 10 = -10; \Rightarrow (0; -10)$.
Если $y = 0 \Rightarrow x^4 + 3x^2 - 10 = 0$; обозначим $x^2 = v \Rightarrow v^2 + 3v - 10 = 0$;
$D = 3^2 - 4\cdot 1\cdot(-10) = 49$; $v_2 = \dfrac{-3+7}{2} = 2$ или $v_1 = \dfrac{-3-7}{2} = -5 \Rightarrow$
$x^2 = 2$ или $x^2 = -5$
Из первого уравнения $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$, у второго уравнения корней нет.
$(\sqrt{2};0);(-\sqrt{2};0)$ — точки пересечения с Оx.
в) $y = x^4 - 20x^2 + 100$.
Найдем точку пересечения с Оy:
если $x = 0 \Rightarrow y = 0^4 - 20\cdot 0^2 + 100 = 100 \Rightarrow (0; 100)$.
Если $y = 0 \Rightarrow x^4 - 20x^2 + 100 = 0$;
обозначим $x^2 = v \Rightarrow y = v^2 - 20v + 100 = 0$; $D = (-20)^2 - 4\cdot 1\cdot 100 = 0$;
$v = \dfrac{20+0}{2} = 10 \Rightarrow x^2 = 10$; $x_1 = \sqrt{10}$; $x_2 = -\sqrt{10}$.
$(\sqrt{10};0);(-\sqrt{10};0)$ — точки пересечения с Оx.
г) $y = 4x^4 + 16x^2$.
Найдем точку пересечения с Оу: если $x = 0 \Rightarrow y = 4\cdot 0 + 16\cdot 0 = 0 \Rightarrow (0; 0)$.
Если $y = 0 \Rightarrow 4x^4 + 16x^2 = 0$; $4x^2(x^2 + 4) = 0$, $x = 0$;
(0; 0) — точка пересечения с Оx.
281. а) $x^4 - 47x^2 - 98 = (x^2 - 49)(x^2 + 2) = (x-7)(x+7)(x^2+2)$
б) $x^4 - 85x^2 + 1764 = (x^2 - 36)(x^2 - 49) = (x-6)(x+6)(x-7)(x+7)$
282. а) $(x^2 - 1)(x^2 + 1) - 4(x^2 - 11) = 0$;
$x^4 - 1 - 4x^2 + 44 = 0$; $x^4 - 4x^2 + 43 = 0$;
обозначим $x^2 = v \Rightarrow v^2 - 4v + 43 = 0$;
$D = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 43 < 0$. Нет корней.
б) $3x^2(x-1)(x+1) - 10x^2 + 4 = 0$;
$3x^2(x^2 - 1) - 10x^2 + 4 = 0$;
$3x^4 - 3x^2 - 10x^2 + 4 = 0$;
обозначим $x^2 = v \Rightarrow 3v^2 - 13v + 4 = 0$;
$D = (-13)^2 - 4\cdot 3\cdot 4 = 121$; $v_2 = \dfrac{13+\sqrt{121}}{6} = 4$ или $v_1 = \dfrac{13-\sqrt{121}}{6} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$
$x^2 = 4$ или $x^2 = \dfrac{1}{3}$; из первого уравнения $x_1 = 2$ или $x_2 = -2$; из второго
$x_3 = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}$; $x_4 = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$.
283. а) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 5x + 5 = 0$; $x^4(x+1) - 6x^2(x+1) + 5(x+1) = 0$;
$(x+1)(x^4 - 6x^2 + 5) = 0$; $x + 1 = 0$, $x_1 = -1$ или $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$.
Обозначим $x^2 = v \Rightarrow v^2 - 6v + 5 = 0$;

$D=(-6)^2-4\cdot1\cdot5=16;\ v_2=\frac{6+4}{2}=5$ или $v_1=\frac{6-4}{2}=1\Rightarrow$

$x^2=5$ или $x^2=1$

Из первого уравнения $x_2=-\sqrt{5}$; $x_3=\sqrt{5}$; из второго $x_4=1$; $x_5=-1$.

б) $x^4(x-1)-2x^2(x-1)-3(x-1)=0$;

$(x-1)(x^4-2x^2-3)=0$;

$x-1=0$, $x_1=1$ или $x^4-2x^2-3=0$.

Обозначим $x^2=y\Rightarrow y^2-2y-3=0$;

$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=16$;

$y_2=\frac{2+4}{2}=3$ или $y_1=\frac{2-4}{2}=-1\Rightarrow$

$x^2=3$ или $x^2=-1$. Из первого уравнения $x_2=-\sqrt{3}$; $x_3=\sqrt{3}$, у второго уравнения корней нет, т.к. квадрат любого числа неотрицателен.

284. а) $y^7-y^6+8y=8$; $(y-1)(y^6+8)=0$; $y=1$

б) $u^7-u^6=64u-64$; $(u-1)(u^6-64)=0$

$$\left[\begin{array}{l}u=1\\u^6=64\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=1\\u=\pm2\end{array}\right.$$

285. а) $3x^2-25x-28=(3x-28)(x+1)$

$$D=25^2+4\cdot3\cdot28=961=31^2\Rightarrow x_1=\frac{25+31}{6}=\frac{28}{3}\ \text{и}\ x_2=\frac{25-31}{6}=-1$$

б) $2x^2+13x-7=(2x-1)(x+7)$

$$D=13^2+4\cdot2\cdot7=225=15^2\Rightarrow x_1=\frac{-13+15}{4}=\frac{1}{2}\ \text{и}\ x_2=\frac{-13-15}{4}=-7$$

286. а) $13(5x-1)-15(4x+2)<0$; $5x-43<0$; $x<8{,}6$;

б) $6(7-0{,}2x)-5(8-0{,}4x)>0$; $0{,}8x+2>0$; $x>-2{,}5$.

287. $$\begin{cases}\frac{q}{v_1}=\frac{q}{v_2}+11\\q=30(v_1+v_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}30\left(v_2^2-v_1^2\right)=11v_1v_2\\\frac{q}{v_1}=30\left(1+\frac{v_2}{v_1}\right)\\\frac{q}{v_2}=\frac{q}{v_1}-11\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}30\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2-11\left(\frac{v_2}{v_1}\right)-30=0\\\frac{q}{v_1}=30\left(1+\frac{v_2}{v_1}\right)\\\frac{q}{v_2}=\frac{q}{v_1}-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{v_2}{v_1}=1{,}2\\\frac{q}{v_1}=66\\\frac{q}{v_2}=55\end{cases}$$

Ответ: 66 ч и 55 ч.

288. а) $\dfrac{a^3-9a}{a^2+a-12}=\dfrac{a(a^2-9)}{(a+4)(a-3)}=\dfrac{a(a+3)}{a+4}=0\Rightarrow a=0$ или $a=-3$;

б) $\dfrac{a^5+2a^4}{a^3+a+10}=\dfrac{a^4(a+2)}{(a+2)(a^2-2a+5)}=\dfrac{a^4}{a^2-2a+5}=0\Rightarrow a=0$;

в) $\dfrac{a^5-4a^4+4a^3}{a^4-16}=\dfrac{(a-2)^2a^3}{(a^2-4)(a^2+4)}=\dfrac{(a-2)a^3}{(a+2)(a^2+4)}=0$ и

$(a-2)\neq 0\Rightarrow\ a=0$.

289. а) $\dfrac{5y^3-15y^2-2y+6}{y^2-9}=0$

$\dfrac{(y-3)(5y^2-2)}{y^2-9}=0$

$5y^2-2=0$

$y=\pm\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

б) $\dfrac{3y^3-12y^2-y+4}{9y^4-1}=0$

$\dfrac{(y-4)(3y^2-1)}{9y^4-1}=0$

$y-4=0$

$y=4$

290. а) $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{10}{x+3}=\dfrac{50}{x^2+x-6}-1$

$\dfrac{2(x+3)-10(x-2)-50+x^2+x-6}{(x-2)(x+3)}=0$

$\dfrac{x^2-7x-30}{(x-2)(x+3)}=0$; $\quad\dfrac{(x-10)(x+3)}{(x-2)(x+3)}=0$; $\quad x=10$

б) $\dfrac{x+5}{x-1}+\dfrac{2x-5}{x-7}-\dfrac{30-12x}{8x-x^2-7}=0$

$\dfrac{(x+5)(x-7)+(2x-5)(x-1)+30-12x}{(x-1)(x-7)}=0$

$\dfrac{3x^2-21x}{(x-1)(x-7)}=0$; $\quad\dfrac{x(x-7)}{(x-1)(x-7)}=0$; $\quad x=0$

291. а) $\dfrac{3x-2}{x-1}-\dfrac{2x+3}{x+3}=\dfrac{12x+4}{x^2+2x-3}$

$\dfrac{(3x-2)(x+3)-(2x+3)(x-1)-12x-4}{(x-1)(x+3)}=0$

$\dfrac{x^2-6x-7}{(x-1)(x+3)}=0$; $\quad\dfrac{(x-7)(x+1)}{(x-1)(x+3)}=0$; $\quad x_1=7$ и $x_2=-1$

б) $\dfrac{5x-1}{x+7}-\dfrac{2x+2}{x-3}+\dfrac{63}{x^2+4x-21}=0$

$\dfrac{(5x-1)(x-3)-(2x+2)(x+7)+63}{(x+7)(x-3)}=0$

$$\frac{3x^2-32x+52}{(x+7)(x-3)}=0$$

$D=32^2-4\cdot3\cdot52=20^2$; $\qquad x_{1,2}=\frac{32\pm20}{6}\Rightarrow x_1=8\frac{2}{3}$ и $x_2=2$

в) $\frac{x}{x^2+4x+4}=\frac{4}{x^2-4}-\frac{16}{x^3+2x^2-4x-8}$

$$\frac{x(x-2)-4(x+2)+16}{(x+2)^2(x-2)}=0$$

$\frac{x^2-6x+8}{(x+2)^2(x-2)}=0$; $\qquad \frac{(x-2)(x-4)}{(x+2)^2(x-2)}=0$; $\quad x=4$

292. а) $\frac{a+1}{a-2}+\frac{a-4}{a+1}=\frac{3a+3}{a^2-a-2}$

$\frac{(a+1)^2+(a-4)(a-2)-3a-3}{(a-2)(a+1)}=0$; $\qquad \frac{(a-2)(2a-3)}{(a-2)(a+1)}=0$; $\qquad a=1,5$

б) $\frac{3a-5}{a^2-1}-\frac{6a-5}{a-a^2}=\frac{3a+2}{a^2+a}$

$$\frac{a(3a-5)+(6a-5)(a+1)-(3a+2)(a-1)}{a(a-1)(a+1)}=0$$

$\frac{6a^2-3a-3}{a(a-1)(a+1)}=0$; $\qquad \frac{2a^2-a-1}{a(a-1)(a+1)}=0$; $\qquad \frac{(2a+1)(a-1)}{a(a-1)(a+1)}=0$

$a=-\frac{1}{2}$

293. а) $\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x-9}\Big|\cdot(x-1)(x-7)(x-9)(x-10)\neq0$

$6(x-9)(x-10)=(x-1)(x-7)$

$5x^2-106x+533=0$

$D=106^2-4\cdot5\cdot533=576=24^2 \qquad x_{1,2}=\frac{106\pm24}{10}\Rightarrow x_1=13$ и $x_2=8,2$

б) $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+9}=\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+21}\Big|\cdot(x+3)(x+5)(x+9)(x+21)\neq0$

$6(x+5)(x+21)=16(x+3)(x+9)$

$5x^2+18x-99=0$

$D=18^2+4\cdot5\cdot99=2304=48^2$; $\qquad x_{1,2}=\frac{-18\pm48}{10}\Rightarrow x_1=3$ и $x_2=-6,6$.

294. а) $\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x-5}$

$\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-2}$; $\qquad \frac{8}{x^2-16}=\frac{3}{x^2-7x+10}$

$8(x^2-7x+10)=3(x^2-16)$, $x \neq 4, 2, 5$; $5x^2-56x+128=0$

$D=56^2-4\cdot5\cdot128=576=24^2$; $x_{1,2}=\dfrac{56\pm24}{10} \Rightarrow x_1=8$ и $x_2=3{,}2$

б) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{x+28}+\dfrac{1}{x}$; $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+28}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}$;

$\dfrac{27}{x^2+29x+28}=\dfrac{3}{x^2+3x}$;

$9(x^2+3x)=x^2+29x+28$, $x \neq 0, -1, -3, -28$

$8x^2-2x-28=0$; $4x^2-x-14=0$

$D=1+4\cdot4\cdot14=225=15^2$; $x_{1,2}=\dfrac{1\pm15}{8} \Rightarrow x_1=2$ и $x_2=-1{,}75$

295. а) $x^2+x-9=\dfrac{9}{x}$

$x^3+x^2-9x-9=0$, $x \neq 0$; $(x+1)(x^2-9)=0$

$x_1=-1, x_2=3, x_3=-3 \Rightarrow y_1=-9, y_2=3, y_3=-3$

Ответ: $(-1;-9)$; $(3;3)$; $(-3;-3)$.

б) $x^2+6x-4=\dfrac{24}{x}$;

$x^3+6x^2-4x-24=0$, $x \neq 0$

$(x+6)(x^2-4)=0$

$x_1=-6; x_2=2, x_3=-2 \Rightarrow y_1=-4, y_2=12, y_3=-12$.

Ответ: $(-6;-4)$; $(2;12)$; $(-2;-12)$.

296. а) $\dfrac{5a+7-28a^2}{20a}=a^2$;

$20a^3+28a^2-5a-7=0$, $a \neq 0$;

$(5a+7)(4a^2-1)=0$; $a_1=-1{,}4$; $a=\pm0{,}5$.

б) $\dfrac{2-18a^2-a}{3a}=-3a^2$;

$9a^3-18a^2-a+2=0$, $a \neq 0$;

$(a-2)(9a^2-1)=0$; $a=2$, $a=\pm\dfrac{1}{3}$.

297. а) $\dfrac{12}{x^2-2x+3}=x^2-2x-1$; $t=x^2-2x+3 \Rightarrow \dfrac{12}{t}=t-4$

$t^2-4t-12=0$, $t \neq 0$

$t=6 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=3$ и $x=-1$

$t=-2 \Rightarrow x^2-2x+5=0 \Rightarrow$ нет корней. Ответ: 3 и – 1.

б) $\dfrac{.12}{x^2+x-10}-\dfrac{6}{x^2+x-6}=\dfrac{5}{x^2+x-11}$

$t=x^2+x-6$; $\dfrac{12}{t-4}-\dfrac{6}{t}=\dfrac{5}{t-5}$

$$\frac{6(t+4)}{t(t-4)}=\frac{5}{t-5}$$

$6(t^2-t-20)=5(t^2-4t),\ t\neq 0,\ 4,\ 5.$

$t^2+14t-120=0$

$t=-20\ \Rightarrow\ x^2+x+14=0\ \Rightarrow$ нет корней

$t=6\ \Rightarrow\ x^2+x-12=0\ \Rightarrow\ x=-4$ и $x=3.$ Ответ: -4 и 3.

в) $\dfrac{16}{x^2-2x}-\dfrac{11}{x^2-2x+3}=\dfrac{9}{x^2-2x+1}$

$t=x^2-2x+1=(x-1)^2$

$\dfrac{16}{t-1}-\dfrac{11}{t+2}=\dfrac{9}{t}$; $\dfrac{5t+43}{(t-1)(t+2)}=\dfrac{9}{t}$

$5t^2+43t=9(t^2+t-2),\ t\neq 0,\ 1,\ -2.$

$4t^2-34t-18=0;\ 2t^2-17t-9=0$

$D=17^2+4\cdot2\cdot9=19^2\Rightarrow t_{1,2}=\dfrac{17\pm19}{4}\Rightarrow t=9$ и $t=-\dfrac{1}{2}$

$(x-1)^2=9\Rightarrow x=4$ и $x=-2.$

Ответ: 4 и -2.

298. а) $\left(\dfrac{x+2}{x-4}\right)^2+16\left(\dfrac{x-4}{x+2}\right)^2=17$; $t=\left(\dfrac{x+2}{x-4}\right)^2$

$t+\dfrac{16}{t}=17\Rightarrow t^2-17t+16=0\Rightarrow t=1$ и $t=16$

$t=1\Rightarrow\dfrac{x+2}{x-4}=\pm1\Rightarrow\dfrac{x+2}{x-4}=-1\Rightarrow x=1$

$t=16\Rightarrow\dfrac{x+2}{x-4}=\pm4$

$\dfrac{x+2}{x-4}=4\Rightarrow x=6$; $\dfrac{x+2}{x-4}=-4\Rightarrow x=2{,}8$. Ответ: 1; 6; 2,8.

б) $\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^2+18\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^2=11$; $t=\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^2$

$t+\dfrac{18}{t}=11\Rightarrow t^2-11t+18\Rightarrow t=2$ и $t=9$

$t=2\Rightarrow\dfrac{x+1}{x-3}=\pm\sqrt{2}\Rightarrow x=7\pm4\sqrt{2}$

$t=9\Rightarrow\dfrac{x+1}{x-3}=\pm3\Rightarrow x=2$ и $x=5.$ Ответ: 2; 5; $7\pm4\sqrt{2}$.

299. а) $x^2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=3\dfrac{1}{2}$; $t=x-\dfrac{1}{x}$

$t^2+2-\dfrac{1}{2}t=3\dfrac{1}{2}$

$2t^2-t-3=0 \Rightarrow t_1=1{,}5$ и $t_2=-1$

$x-\frac{1}{x}=1{,}5 \Rightarrow 2x^2-3x-2=0 \Rightarrow x=2$ и $x=-0{,}5$

$x-\frac{1}{x}=-1 \Rightarrow x^2+x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ Ответ: 2; –0,5; $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

б) $x^2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{x}\right)=8$; $t=x+\frac{1}{x}$

$t^2-2-\frac{1}{3}t=8$

$3t^2-t-30=0 \Rightarrow t_1=\frac{10}{3}$ и $t_2=-3$

$x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3} \Rightarrow 3x^2-10x+3=0 \Rightarrow x=3$ и $x=\frac{1}{3}$

$x+\frac{1}{x}=-3 \Rightarrow x^2+3x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ Ответ: 3; $\frac{1}{3}$; $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

300. $13\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$; $t=x+\frac{1}{x} \Rightarrow t \ge 2$, т.к. $x>0$

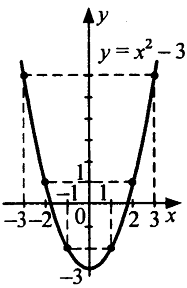
$13t=t^3-3t$; $t^3-16t=0 \Rightarrow t=0, t=\pm 4$

$x+\frac{1}{x}=4 \Rightarrow x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=2\pm\sqrt{3}$. Ответ: $2\pm\sqrt{3}$.

301. а) $\frac{12-5x-2x^2}{15-10x}=\frac{(x+4)(3-2x)}{5(3-2x)}=\frac{1}{5}(x+4)$

б) $\frac{3x^2-36x-192}{x^2-256}=\frac{3(x-16)(x+4)}{(x-16)(x+16)}=\frac{3x+12}{x+16}$.

302. 1) График функции $y=x^2-3$ – параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).



2) Найдем координаты вершины:

$x_b=-\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2\cdot 1} = 0$;

$y_b=0-3=-3$; $(0; -3)$, $x=0$ — ось симметрии.

3)

x	1	–1	2	–2	0
y	–2	–2	1	1	–3

Возрастает на $[0; +\infty)$; убывает на $(-\infty; 0]$.

а) Функция положительна на $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$;

б) Функция отрицательна на $\left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$.

303. $\begin{cases} 5(v_1+v_2)+9v_1=Q \\ \dfrac{Q}{v_2}=\dfrac{Q}{v_1}-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q=\dfrac{12\cdot v_1\cdot v_2}{v_2-v_1} \\ 5\left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)^2-3\left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)-14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} Q=\dfrac{12\cdot v_1\cdot v_2}{v_2-v_1} \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{v_2}{v_1}=2 \\ \dfrac{v_2}{v_1}=-1{,}4 \end{array}\right. \end{array}\right.$

$\dfrac{Q}{v_1}$ — ?, $\dfrac{Q}{v_2}$ — ?

$\dfrac{Q}{v_2}=\dfrac{12}{\dfrac{v_2}{v_1}-1}=12 \Rightarrow \dfrac{Q_1}{v_1}=24$

Ответ: 24 и 12.

§ 6. Неравенства с одной переменной

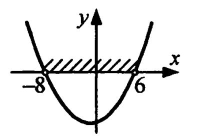
304. а) 1) График функции $y = x^2 + 2x–48$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

2) Решим уравнение $x^2 + 2x–48 = 0$;

$D = 2^2–4\cdot1\cdot(–48) = 196$;

$x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{196}}{2} = 6$,

$x_2 = \dfrac{-2-\sqrt{195}}{2} = -8$.



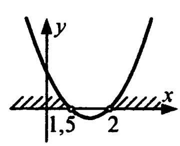
3) (–8; 6).

б) 1) График функции $y = 2x^2–7x + 6$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

2) Найдем корни уравнения $2x^2–7x + 6 = 0$;

$D = (-7)^2–4\cdot2\cdot6 = 1$;

$x_1 = \dfrac{7-1}{4} = 1{,}5$, $x_2 = \dfrac{7+1}{4} = 2$.



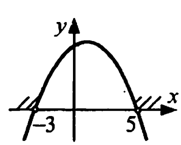
3) $(-\infty; 1{,}5)\cup(2; \infty)$.

в) 1) График функции $y = -x^2 + 2x + 15$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).

2) Решим уравнение $-x^2 + 2x + 15 = 0$;

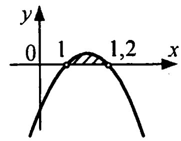
$D = 2^2–4\cdot(–1)\cdot15 = 64$;

$x = \dfrac{2+8}{2} = 5$ или $x = \dfrac{2-8}{2} = -3$.



3) $(-\infty; -3)\cup(5; \infty)$.

г) 1) График функции $y = -5x^2 + 11x-6$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).



2) Решим уравнение $-5x^2 + 11x-6 = 0$;

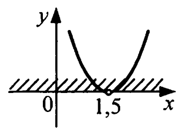
$5x^2-11x + 6 = 0$;

$D = (-11)^2-4\cdot5\cdot6 = 1$;

$x = \dfrac{11+1}{10} = 1{,}2$ или $x = \dfrac{11-1}{10} = 1$.

3) $(1;\ 1{,}2)$.

д) 1) График функции $y = 4x^2-12x + 9$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).



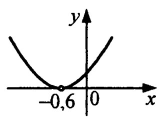
2) Решим уравнение $4x^2-12x + 9 = 0$;

$D = (-12)^2-4\cdot4\cdot9 = 0$;

$x = \dfrac{12+0}{8} = 1{,}5$

3) $(-\infty;\ 1{,}5)\cup(1{,}5;\ \infty)$.

е) 1) График функции $y = 25x^2 + 30x + 9$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).



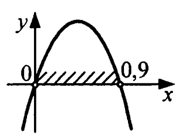
2) Решим уравнение $25x^2 + 30x + 9 = 0$;

$D = 30^2-4\cdot25\cdot9 = 0$;

$x = \dfrac{-30+0}{50} = -0{,}6$

3) нет решений.

ж) 1) График функции $y = -10x^2 + 9x$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).



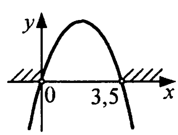
2) Решим уравнение $-10x^2 + 9x = 0$;

$x(-10x + 9) = 0$;

$x = 0$ или $-10x + 9 = 0$; $10x = 9$; $x = 0{,}9$.

3) $(0;\ 0{,}9)$.

з) 1) График функции $y = -2x^2 + 7x$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).

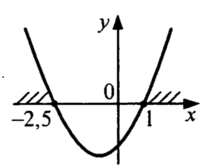


2) Решим уравнение $-2x^2 + 7x = 0$; $x(-2x + 7) = 0$;

$x = 0$ или $-2x + 7 = 0$; $2x = 7$; $x = 3{,}5$.

3) $(-\infty;0)\cup(3{,}5;\ \infty)$.

305. а) 1) График функции $y = 2x^2 + 3x-5$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).



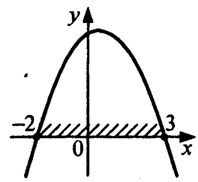
2) Решим уравнение $2x^2 + 3x-5 = 0$;

$D = 3^2-4\cdot2\cdot(-5) = 49$;

$x = \dfrac{-3+7}{4} = 1$ или $x = \dfrac{-3-7}{4} = -2{,}5$

3) $(-\infty;\ -2{,}5]\cup[1;\ +\infty)$.

б) 1) График функции $y = -6x^2 + 6x + 36$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).



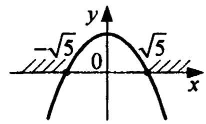
2) Решим уравнение $-6x^2 + 6x + 36 = 0$; $x^2-x-6 = 0$

$D = 1^2-4\cdot1\cdot(-6) = 25$;

$x = \dfrac{1+5}{2} = 3$ или $x = \dfrac{1-5}{2} = -2$

3) [-2; 3]

в) 1) График функции $y = -x^2 + 5$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).

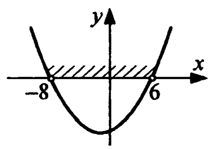


2) Решим уравнение $-x^2 + 5 = 0$;

$x^2 = 5$; $x = \sqrt{5}$ или $x = -\sqrt{5}$

3) $(-\infty; -\sqrt{5}\,]\cup[\,\sqrt{5}\,; +\infty)$

306. а) 1) График функции $y = 2x^2 + 13x-7$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).



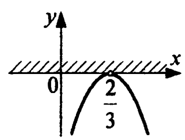
2) Решим уравнение $2x^2 + 13x-7 = 0$;

$D = 13^2-4\cdot2\cdot(-7) = 225$;

$x = \dfrac{-13+15}{4} = 0{,}5$ или $x = \dfrac{-13-15}{4} = -7$.

3) $(-\infty; -7)\cup(0{,}5; \infty)$.

б) 1) График функции $y = -9x^2 + 12x-4$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т. к коэффициент при x^2 отрицателен).

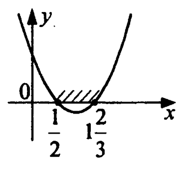


2) Решим уравнение $-9x^2 + 12x-4 = 0$; $9x^2-12x + 4 = 0$;

$D = 12^2-4\cdot9\cdot4 = 0$; $x = \dfrac{12+0}{18} = \dfrac{2}{3}$.

3) $(-\infty; \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; \infty)$.

в) 1) График функции $y = 6x^2-13x + 5$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

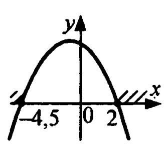


2) Решим уравнение $6x^2-13x + 5 = 0$;

$D = 13^2-4\cdot6\cdot5 = 49$; $x = \dfrac{13+7}{12} = 1\dfrac{2}{3}$ или $x = \dfrac{13-7}{12} = \dfrac{1}{2}$.

3) $[\,\frac{1}{2}; 1\frac{2}{3}\,]$.

г) 1) Графиком функции $y = -2x^2-5x + 18 = 0$; является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).



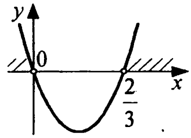
2) Решим уравнение $-2x^2-5x + 18 = 0$; $2x^2 + 5x-18 = 0$;

$D = 5^2-4\cdot2\cdot(-18) = 169$;

$x = \dfrac{-5+13}{4} = 2$ или $x = \dfrac{-5-13}{4} = -4{,}5$.

3) $(-\infty; -4{,}5]\cup[2; \infty)$.

д) 1) График функции $y = 3x^2–2x$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

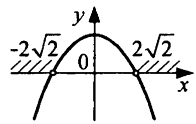


2) Решим уравнение $3x^2–2x = 0$;

$x(3x–2) = 0$; $x = 0$ или $3x–2 = 0$; $3x = 2$; $x = \frac{2}{3}$.

3) $(-\infty; 0)\cup(\frac{2}{3}; \infty)$.

е) 1) График функции $y = -x^2 + 8$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).

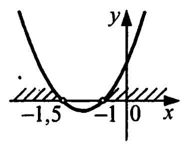


2) Решим уравнение $8–x^2 = 0$; $x^2 = 8$;

$x = 2\sqrt{2}$ или $x = -2\sqrt{2}$

3) $(-\infty; -2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2}; \infty)$.

307. а) 1) График функции $y = 2x^2 + 5x + 3$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).



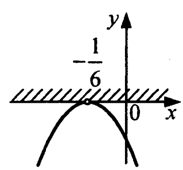
2) Решим уравнение $2x^2 + 5x + 3 = 0$;

$D = 5^2–4\cdot2\cdot3 = 1$;

$x = \frac{-5+1}{4} = -1$ или $x = \frac{-5-1}{4} = -1,5$.

3) $(-\infty; -1,5)\cup(-1; +\infty)$.

б) 1) График функции $y = -x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{36}$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).



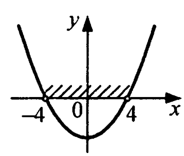
2) Решим уравнение $-x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{36} = 0$;

$x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} = 0$;

$D = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{36} = 0$; $x = \frac{-\frac{1}{3}+0}{2} = -\frac{1}{6}$.

3) $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$

308. а) 1) График функции $y = x^2–16$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

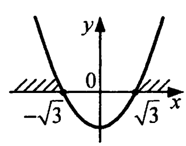


2) Решим уравнение $x^2–16 = 0$; $(x–4)(x + 4) = 0$;

$x–4 = 0$; $x = 4$ или $x + 4 = 0$; $x = –4$.

3) $(–4; 4)$.

б) 1) График функции $y = x^2–3$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

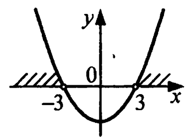


2) Решим уравнение $x^2–3 = 0$; $x^2 = 3$;

$x = \sqrt{3}$ или $x = -\sqrt{3}$.

3) $(-\infty; -\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3}; +\infty)$.

в) 1) График функции $y = 0{,}2x^2-1{,}8$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).



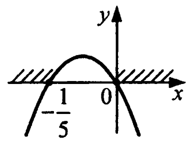
2) Решим уравнение

$0{,}2x^2-1{,}8 = 0$; $0{,}2x^2 = 1{,}8$; $x^2 = 9$;

$x = 3$ или $x = -3$.

3) $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

г) 1) график функции $y = -5x^2-x$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).

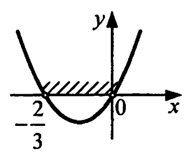


2) Решим уравнение $-5x^2-x = 0$;$-x(5x+1) = 0$;

$x = 0$ или $5x + 1 = 0$, т.е. $5x = -1$, $x = -\frac{1}{5}$.

3) $(-\infty;-\frac{1}{5}]\cup[0;+\infty)$

д) 1) График функции $y = 3x^2 + 2x$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

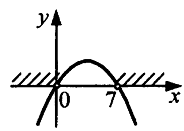


2) Решим уравнение $3x^2 + 2x = 0$; $x(3x+2) = 0$;

$x = 0$ или $3x + 2 = 0$, т.е. $3x = -2$, $x = -\frac{2}{3}$

3) $\left(-\frac{2}{3};0\right)$σ

е) 1) График функции $y = 7x-x^2$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).

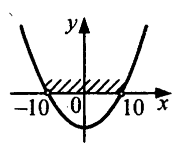


2) Решим уравнение $7x-x^2 = 0$; $x(7-x) = 0$;

$x = 0$ или $7-x = 0$, т.е. $x = 7$.

3) $(-\infty;0)\cup(7;+\infty)$.

309. а) 1) График функции $y = 0{,}01x^2-1$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

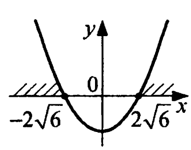


2) Решим уравнение $0{,}01x^2-1 = 0$; $0{,}01x^2 = 1$;

$x^2 = 100$; $x = 10$ или $x = -10$.

3) $[-10;10]$.

б) 1) График функции $y = \frac{1}{2}x^2-12$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).



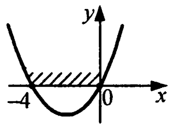
2) Решим уравнение $\frac{1}{2}x^2-12 = 0$;

$\frac{1}{2}x^2 = 12$; $x^2 = 24$;

$x = 2\sqrt{6}$ или $x = -2\sqrt{6}$.

3) $(-\infty;-2\sqrt{6})\cup(2\sqrt{6};+\infty)$.

в) 1) График функции $y = x^2 + 4x$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен)

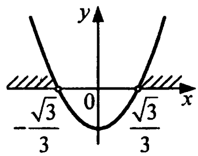


2) Решим уравнение $x^2 + 4x = 0$; $x(x + 4) = 0$;

$x = 0$ или $x + 4 = 0$, т.е. $x = -4$.

3) $[-4; 0]$.

г) 1) График функции $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).



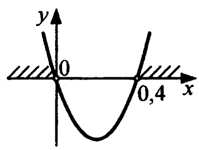
2) Решим уравнение $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9} = 0$;

$\frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{9}$; $x^2 = \frac{1}{3}$;

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ или $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3) $(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$.

д) 1) График функции $y = 5x^2 - 2x$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).



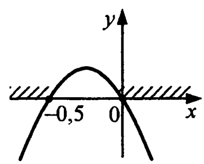
2) Решим уравнение $5x^2 - 2x = 0$;

$x(5x - 2) = 0$;

$x = 0$ или $5x - 2 = 0$ т.е. $5x = 2$, $x = 0{,}4$.

3) $(-\infty; 0) \cup (0{,}4; +\infty)$.

е) 1) График функции $y = -0{,}6x^2 - 0{,}3x$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).



2) Решим уравнение $-0{,}6x^2 - 0{,}3x = 0$;

$-0{,}3x(2x+1) = 0$;

$x = 0$ или $2x+1 = 0$ т.е. $2x = -1$, $x = -0{,}5$.

3) $(-\infty; -0{,}5) \cup (0; +\infty)$.

310. а) Чтобы уравнение имело 2 корня, необходимо, чтобы $D > 0$.

$2x^2 + 6x + b = 0$;

$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot b = 36 - 8b > 0$; $36 - 8b > 0$; $-8b > -36$; $b < 4{,}5$.

б) $D = (2b)^2 - 4 \cdot 15 = 4b^2 - 60 > 0$; $b^2 - 15 > 0$; $\left(-\infty; -\sqrt{15}\right) \cup \left(\sqrt{15}; +\infty\right)$.

в) Чтобы уравнение имело 2 корня, необходимо, чтобы $D > 0$.

$3x^2 + bx + 3 = 0$;

$D = b^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = b^2 - 36 > 0$; $(b - 6)(b + 6) > 0$. $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$.

г) Чтобы уравнение имело 2 корня, необходимо, чтобы $D > 0$.

$x^2 + bx + 5 = 0$;

$D = b^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = b^2 - 20 > 0$;

$(b - 2\sqrt{5})(b + 2\sqrt{5}) > 0$; $(-\infty; -2\sqrt{5}) \cup (2\sqrt{5}; +\infty)$.

311. а) Уравнение не имеет корней, если $D < 0$. $6x^2 + tx + 6 = 0$;
$D = t^2 – 4 \cdot 6 \cdot 6 = t^2 – 144 < 0$; $(t–12)(t + 12) < 0$; $–12 < t < 12$.

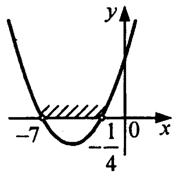
б) $D = (4t)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 16(t^2 - 9) < 0$; $t^2 < 9$; $(–3; 3)$.

в) Уравнение не имеет корней, если $D < 0$. $2x^2 – 15x + t = 0$;

$D = 225 – 4 \cdot 2 \cdot t = 225 – 8t < 0$; $225 < 8t$; $t > \frac{225}{8}$; $t > 28\frac{1}{8}$.

г) Уравнение не имеет корней, если $D < 0$. $2x^2 + tx + 18 = 0$;
$D = t^2 – 4 \cdot 2 \cdot 18 = t^2 – 144 < 0$; $(t–12)(t + 12) < 0$; $–12 < t < 12$.

312. а) $3x^2 + 40x + 10 < –x^2 + 11x + 3$;
$3x^2 + 40x + 10 + x^2 – 11x – 3 < 0$;
$4x^2 + 29x + 7 < 0$.

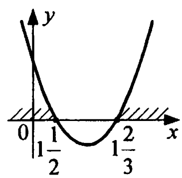


1) График функции $y = 4x^2 + 29x + 7$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).
2) Решим уравнение $4x^2 + 29x + 7 = 0$;
$D = 29^2 – 4 \cdot 4 \cdot 7 = 729$;

$x = \frac{-29 + 27}{8} = -\frac{1}{4}$ или $x = \frac{-29 - 27}{8} = -7$.

3) $(–7; -\frac{1}{4})$.

б) $9x^2 – x + 9 \geq 3x^2 + 18x – 6$;
$9x^2 – x + 9 – 3x^2 – 18x + 6 \geq 0$; $6x^2 – 19x + 15 \geq 0$.

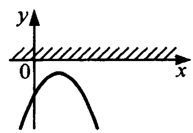


1) График функции $y = 6x^2 – 19x + 15$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).
2) Решим уравнение $6x^2 – 19x + 15 = 0$;
$D = 19^2 – 360 = 1$;

$x = \frac{19 + 1}{12} = 1\frac{2}{3}$ или $x = \frac{19 - 1}{12} = 1\frac{1}{2}$.

3) $(–\infty; 1\frac{1}{2}] \cup [1\frac{2}{3}; +\infty)$.

в) $2x^2 + 8x – 111 < (3x - 5)(2x + 6)$;
$2x^2 + 8x – 111 < 6x^2 - 10x + 18x - 30$;
$2x^2 + 8x - 111 - 6x^2 + 10x - 18x + 30 < 0$; $–4x^2 – 81 < 0$.

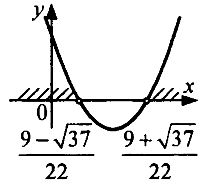


1) График функции $y = –4x^2 – 81$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).

2) Решим уравнение $-4x^2 – 81 = 0$; $–4x^2 = 81$; $x^2 = -\frac{81}{4}$

Нет корней, т.к. квадрат любого числа есть число неотрицательное.
3) $(–\infty; +\infty)$.
г) $(5x + 1)(3x – 1) > (4x – 1)(x + 2)$;
$15x^2 + 3x – 5x – 1 > 4x^2 – x + 8x – 2$;
$15x^2 – 4x^2 + 3x – 5x – 8x + x – 1 + 2 > 0$; $11x^2 – 9x + 1 > 0$.

1) График функции $y = 11x^2 - 9x + 1$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).



2) Решим уравнение $11x^2 - 9x + 1 = 0$;

$D = 9^2 - 44 = 37$;

$x = \dfrac{9+\sqrt{37}}{22}$ или $x = \dfrac{9-\sqrt{37}}{22}$.

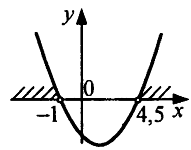
3) $(-\infty;\ \dfrac{9-\sqrt{37}}{22}) \cup (\dfrac{9+\sqrt{37}}{22};\ +\infty)$.

313. а) $2x(3x-1) > 4x^2 + 5x + 9$;

$6x^2 - 2x > 4x^2 + 5x + 9$;

$6x^2 - 2x - 4x^2 - 5x - 9 > 0$; $2x^2 - 7x - 9 > 0$.

1) График функции $y = 2x^2 - 7x - 9$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).



2) Решим уравнение $2x^2 - 7x - 9 = 0$;

$D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 121$;

$x = \dfrac{7+11}{4} = 4{,}5$ или $x = \dfrac{7-11}{4} = -1$.

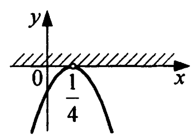
3) $(-\infty; -1) \cup (4{,}5; +\infty)$.

б) $(5x + 7)(x - 2) < 21x^2 - 11x - 13$;

$5x^2 + 7x - 10x - 14 - 21x^2 + 11x + 13 < 0$;

$-16x^2 + 8x - 1 < 0$.

1) График функции $y = -16x^2 + 8x - 1$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).



2) Решим уравнение $-16x^2 + 8x - 1 = 0$;

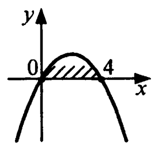
$16x^2 - 8x + 1 = 0$;

$D = 8^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 0$; $x = \dfrac{8+0}{32} = \dfrac{1}{4}$

3) $(-\infty;\ \dfrac{1}{4}) \cup (\dfrac{1}{4};\ +\infty)$.

314. а) $y = \sqrt{12x - 3x^2}$ т.к. подкоренное выражение должно быть неотрицательно $\Rightarrow 12x - 3x^2 \geq 0$.

1) График функции $y = -3x^2 + 12x$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).



2) Решим уравнение $-3x^2 + 12x = 0$;

$3x(-x + 4) = 0$; $x = 0$ или $-x + 4 = 0$ т.е. $x = 4$.

3) $[0; 4]$.

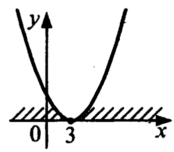
б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - 12x + 18}}$

Т.к. подкоренное выражение должно быть неотрицательно, значит, $2x^2 - 12x + 18 \geq 0$.

Но $2x^2 - 12x + 18 \geq 0$ стоит в знаменателе $\Rightarrow 2x^2 - 12x + 18 \neq 0$.

Значит, $2x^2 - 12x + 18 > 0$

1) График функции $y = 2x^2 - 12x + 18$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

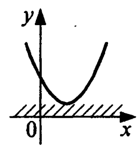


2) Решим уравнение $2x^2 - 12x + 18 = 0; x^2 - 6x + 9 = 0;$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0; x = \dfrac{6+0}{2} = 3.$

3) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

315. а) 1) График функции $y = 7x^2 - 10x + 7$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

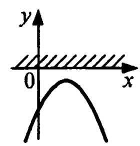


2) Решим уравнение $7x^2 - 10x + 7 = 0$;

$D = (-10)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 7 = -96 < 0.$

3) x — любое.

б) 1) График функции $f(y) = -6y^2 + 11y - 10$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при y^2 отрицателен).

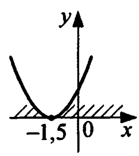


2) Решим уравнение $-6y^2 + 11y - 10 = 0$;

$6y^2 - 11y + 10 = 0; D = (-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 10 = -119 < 0.$

3) y — любое.

в) 1) График функции $y = 4x^2 + 12x + 9$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

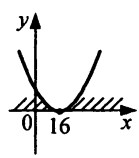


2) Решим уравнение $4x^2 + 12x + 9 = 0$;

$D = 144 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0; x = \dfrac{-12+0}{8} = -1{,}5.$

3) x — любое.

г) 1) График функции $y = \dfrac{1}{4}x^2 - 8x + 64$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

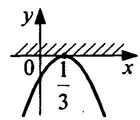


2) Решим уравнение $\dfrac{1}{4}x^2 - 8x + 64 = 0$;

$D = 64 - 4 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot 64 = 0; x = \dfrac{8+0}{\frac{1}{2}} = 16.$

3) x — любое.

д) 1) График функции $f(y) = -9y^2 + 6y - 1$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при y^2 отрицателен).

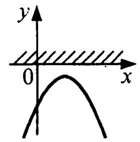


2) Решим уравнение $-9y^2 + 6y - 1 = 0$; $9y^2 - 6y + 1 = 0$;

$D = 36 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0; y = \dfrac{6+0}{18} = \dfrac{1}{3}.$

3) x — любое.

е) 1) График функции $y = -5x^2 + 8x-5$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).



2) Решим уравнение $-5x^2 + 8x-5 = 0$;

$5x^2-8x + 5 = 0$;

$D = 64-4\cdot5\cdot5 = -36 < 0$.

3) x — любое.

316. 1. $(y-2)(y-3)-4 = y^2-5y+2$

2. $(5-y)(1-y)+4 = y^2-6y+9$

3. $(5-y)(1-y)+10 = y^2-6y+15 = (y-3)^2+6 > 0$

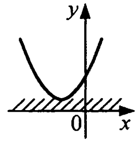
4. $(y-8)(y-7)-60 = y^2-15y-4$

Ответ: 3.

317. а) $x^2 + 7x + 1 > -x^2 + 10x-1$;

$x^2 + 7x + 1 + x^2-10x + 1 > 0$; $2x^2-3x + 2 > 0$.

1) График функции $y = 2x^2-3x + 2$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).



2) Решим уравнение $2x^2-3x + 2 = 0$;

$D = (-3)^2-4\cdot2\cdot2 = -7 < 0$.

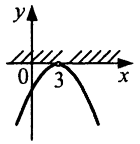
3) x — любое.

б) $-2x^2 + 10x < 18-2x$;

$-2x^2 + 10x-18 + 2x < 0$;

$-2x^2 + 12x-18 < 0$.

1) График функции $y = -2x^2 + 12x-18$ является параболой, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).



2) Решим уравнение $-2x^2 + 12x-18 = 0$:

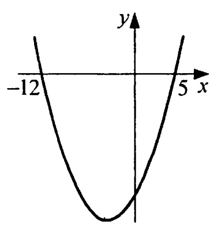
$x^2-6x + 9 = 0$;

$D = (-6)^2-4\cdot1\cdot9 = 0$;

$x = \dfrac{6+0}{2} = 3$.

3) $x \neq 3$.

318. Обозначим длину большей стороны прямоугольника x см, тогда длина меньшей стороны $(x-7)$ см, а площадь прямоугольника $x(x-7)$ см^2.



Получим $x(x-7) < 60$.

Решим уравнение $x^2 - 7x - 60 = 0$;

$D = (-7)^2 - 4\cdot(-60) = 289$;

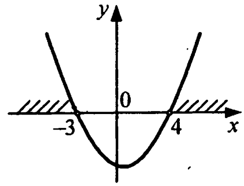
$x_1 = \dfrac{7+17}{2} = 12$; $x_2 = \dfrac{7-17}{2} = -5$.

Из графика видно, что $x^2 - 7x - 60 < 0$ при $x \in (-5; 12)$.

Так как меньшая сторона должна быть больше 7 см, то окончательно получаем: $7 < x < 12$.

319. Обозначим ширину прямоугольника x см, тогда его длина $(x + 5)$ см, а $x(x + 5)$ см^2 — площадь. По условию, $x(x + 5) > 36$.

Решим $x^2 + 5x - 36 > 0$.



1) График функции $y = x^2 + 5x - 36$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

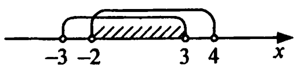
2) Решим уравнение $x^2 + 5x - 36 = 0$;

$D = 25 - 4\cdot(-36) = 169$;

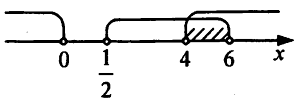
$x = \dfrac{-5+13}{2} = 4$ или $x = \dfrac{-5-13}{2} = -9$.

3) $x > 4$ см.

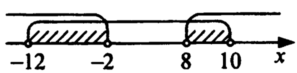
320. а) $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 < 0 \\ x^2 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x+2) < 0 \\ |x| < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 3$



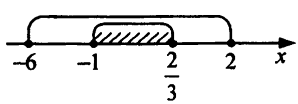
б) $\begin{cases} 2x^2 - 13x + 6 < 0 \\ x^2 - 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(2x-1) < 0 \\ x(x-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x < 6$



в) $\begin{cases} x^2 - 6x - 16 > 0 \\ x^2 + 2x - 120 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-8)(x+2) > 0 \\ (x+12)(x-10) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -12 < x < -2 \\ 8 < x < 10 \end{array}\right.$



г) $\begin{cases} 3x^2 + x - 2 \le 0 \\ x^2 + 4x - 12 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2)(x+1) \le 0 \\ (x+6)(x-2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le \dfrac{2}{3}$



д) $\begin{cases} 2x^2 + 4x + 15 \ge 0 \\ x^2 - 9x + 8 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{(x-1)(x-8) \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 8$

е) $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 < 0 \\ 3x^2 + x + 11 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(x+3) < 0 \\ \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

321. а) $\begin{cases} 25-x^2 \ge 0 \\ 9x-x^2-14 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le 5 \\ (x-2)(x-7) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \le x \le 5 \\ 2 \le x \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x \le 5$

Ответ: 2; 3; 4; 5.

б) $\begin{cases} 8x-x^2-12 \ge 0 \\ 16-x^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-6) \le 0 \\ |x| \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 6 \\ -4 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x \le 4$

Ответ: 2; 3; 4.

322. 1) $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{0,5\cdot 0-2}{3}=-\dfrac{2}{3} \Rightarrow$

$(0;\ -\frac{2}{3})$ точка пересечения с Oy.

2) $y=0 \Rightarrow \dfrac{0,5x-2}{3}=0;$

$0,5x-2=0;\ 0,5x=2;$

$x=4 \Rightarrow (4;\ 0)$ — точка пересечения с Ox

3) Функция возрастающая.

323. а) $y^4-24y^2-25=0$

$(y^2-25)(y^2+1)=0$

$y^2=25;\ \ y=\pm 5$

б) $x^4-9x^2+18=0;$ $(x^2-6)(x^2-3)=0$

$\left[\begin{array}{l} x^2=6 \\ x^2=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{6} \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

324. $m_о+m_с=3$

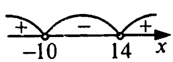
$\dfrac{m_о}{3}=0,8;\ \dfrac{m_с}{3}=0,2 \Rightarrow m_о=2,4$ и $m_с=0,6.$

$\dfrac{m_о+x}{3+x}=0,94=\dfrac{x+2,4}{x+3} \Rightarrow x=7$

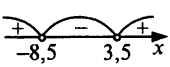
Ответ: 7 кг.

325. а) 

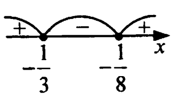
$(-\infty;-8)\cup(5;+\infty)$

б) 

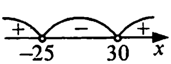
$(-10;\ 14)$

в) 

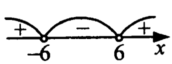
$(-\infty;\ -8,5]\cup[3,5;+\infty)$

г) 

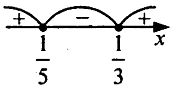
$[-\frac{1}{3};-\frac{1}{8}]$

326. а) 

$(-25;\ 30)$

б) 

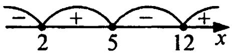
$(-\infty;-6)\cup(6;+\infty)$

в) 

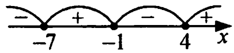
$[\frac{1}{5};\frac{1}{3}]$

г) 

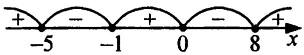
$(-\infty; -6{,}3;] \cup [-0{,}1; +\infty)$

327. а) 

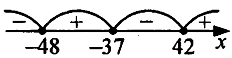
$(2;5) \cup (12; +\infty)$

б) 

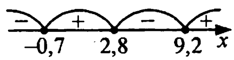
$(-\infty; -7) \cup (-1; 4)$

в) 

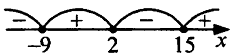
$(-\infty;-5) \cup (-1; 0) \cup (8; +\infty)$

328. а) 

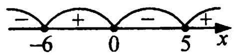
$(-48; 37) \cup (42; \infty)$

б) 

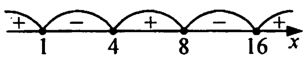
$(-\infty; -0{,}7) \cup (2{,}8; 9{,}2)$

329. а) 

$(-\infty; -9) \cup (2; 15)$

б) 

$(-6; 0) \cup (5; +\infty)$

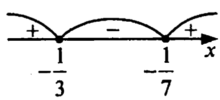
в) 

$(1; 4) \cup (8; 16)$

330. а) $5(x-13)(x+24) < 0$;

$(x-13)(x+24) < 0$; $(-24; 13)$.

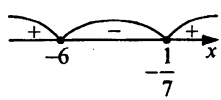
б) $-(x+\frac{1}{7})(x+\frac{1}{3}) \geq 0$;



$(x+\frac{1}{7})(x+\frac{1}{3}) \leq 0$; $\left[-\frac{1}{3};-\frac{1}{7}\right]$

в) $(x+12)(3-x) > 0$; $-(x+12)(x-3) > 0$;
$(x+12)(x-3) < 0$; $(-12; 3)$

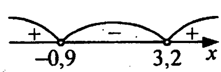
г) $(6+x)(3x-1) \leq 0$; $3(x+6)(x-\frac{1}{3}) \leq 0$;



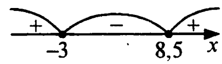
$(x+6)(x-\frac{1}{3}) \leq 0$; $\left[-6;\frac{1}{3}\right]$

331. а) $2(x-18)(x-19) > 0$; $(x-18)(x-19) > 0$;
$(-\infty; 18) \cup (19; \infty)$

б) $-4(x+0{,}9)(x-3{,}2) < 0$; $(x+0{,}9)(x-3{,}2) > 0$;
$(-\infty; -0{,}9) \cup (3{,}2; \infty)$



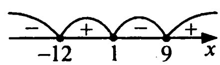
в) $(7x + 21)(x - 8,5) \le 0$;
$7(x + 3)(x-8,5) \le 0$; $(x + 3)(x - 8,5) \le 0$;
$[-3; 8,5]$



г) $(8 - x)(x - 0,3) \ge 0$;
$-(x - 8)(x - 0,3) \ge 0$;
$(x - 8)(x - 0,3) \le 0$; $[0,3; 8]$

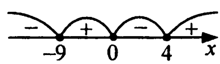
332. а) Т.к. выражение под знаком радикала должно быть неотрицательным $\Rightarrow (5 - x)(x + 8) \ge 0$;
$-(x-5)(x + 8) \ge 0$;
$(x-5)(x + 8) \le 0$; $[-8; 5]$

б) Т.к. выражение под знаком радикала должно быть неотрицательным $\Rightarrow (x + 12)(x - 1)(x - 9) \ge 0$;
$[-12; 1] \cup [9; +\infty)$.



333. а) Т.к. выражение под знаком радикала должно быть неотрицательным $\Rightarrow (2x + 5)(x - 17) \ge 0$;
$2(x + 2,5)(x - 17) \ge 0$; $(x + 2,5)(x - 17) \ge 0$;
$(-\infty; -2,5] \cup [17; +\infty)$

б) Т.к. выражение под знаком радикала должно быть неотрицательным $\Rightarrow x(x + 9)(2x - 8) \ge 0$;
$2x(x + 9)(x - 4) \ge 0$;
$x(x + 9)(x - 4) \ge 0$;
$[-9; 0] \cup [4; +\infty)$.

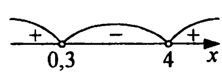


334. а) $\dfrac{x - 5}{x + 6} < 0 \Rightarrow$
$(x-5)(x + 6) < 0$; $(-6; 5)$

б) $\dfrac{1,4 - x}{x + 3,8} < 0 \Rightarrow (1,4-x)(x + 3,8) < 0$;
$-(x-1,4)(x + 3,8) < 0$;
$(x - 1,4)(x + 3,7) > 0$;
$(-\infty; -3,8) \cup (1,4; +\infty)$

в) $\dfrac{2x}{x - 1,6} > 0 \Rightarrow 2x(x-1,6) > 0$; $x(x-1,6) > 0$;
$(-\infty; 0) \cup (1,6; +\infty)$

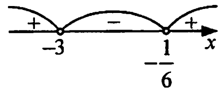
г) $\dfrac{5x - 1,5}{x - 4} > 0 \Rightarrow (5x-1,5)(x-4) > 0$;
$5(x-0,3)(x-4) > 0$; $(x-0,3)(x-4) > 0$;
$(-\infty; 0,3) \cup (4; +\infty)$



335. а) $\dfrac{x - 21}{x + 7} < 0 \Rightarrow (x-21)(x + 7) < 0$;
$(-7; 21)$

б) $\dfrac{x + 4,7}{x - 7,2} > 0 \Rightarrow (x + 4,7)(x-7,2) > 0$;
$(-\infty; -4,7) \cup (7,2; +\infty)$

в) $\frac{6x+1}{3+x} > 0 \Rightarrow (6x+1)(3+x) > 0;$



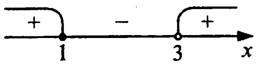
$6(x+\frac{1}{6})(x+3) > 0;\ (x+\frac{1}{6})(x+3) > 0;$

$(-\infty; -3)\cup(-\frac{1}{6}; +\infty)$

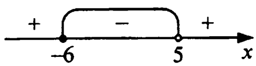
г) $\frac{5x}{4x-12} < 0 \Rightarrow 5x(4x-12) < 0;$

$x(4x-12) < 0;\ 4x(x-3) < 0;$
$x(x-3) < 0;\ (0; 3)$

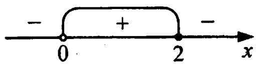
336. а) $\frac{x-1}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x > 3 \end{array}\right.$



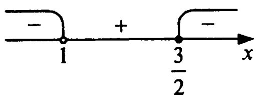
б) $\frac{x+6}{x-5} \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq x < 5$



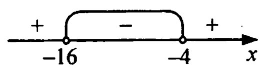
в) $\frac{2-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 2$



г) $\frac{3-2x}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{array}\right.$

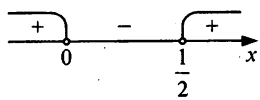


337. а) $\frac{x-8}{x+4} > 2 \Leftrightarrow \frac{x+16}{x+4} < 0 \Leftrightarrow -16 < x < -4$

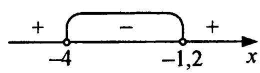


б) $\frac{3-x}{x-2} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 2{,}5 \end{array}\right.$

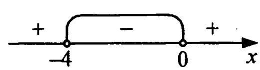
в) $\frac{7x-1}{x} > 5 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > \frac{1}{2} \end{array}\right.$



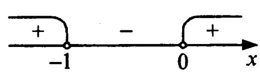
г) $\frac{6-2x}{x+4} > 3 \Leftrightarrow \frac{5x+6}{x+4} < 0 \Leftrightarrow -4 < x < -1{,}2$



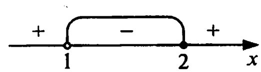
338. а) $\frac{5x+4}{x} < 4 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x} < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 0$



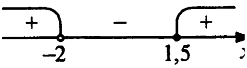
б) $\frac{6x+1}{x+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{5x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 0 \end{array}\right.$



в) $\frac{x}{x-1} > 2 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow 1 < x \leq 2$



г) $\frac{3x-1}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x \geq 1{,}5 \end{array}\right.$



339. а) $\frac{y}{2{,}4} = -\frac{x}{0{,}6}$; $y = -4x$.

б) $\frac{y-4}{0-4} = \frac{x-0}{-2{,}5-0}$; $y - 4 = 4 \cdot \left(\frac{x}{-2{,}5}\right)$; $y = 1{,}6x + 4$

340. $\begin{cases} v_1 + 1 = v_2 \\ 0{,}1 \cdot v_1 + 0{,}2 \cdot v_2 = 0{,}16(v_1 + v_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = v_1 + 1 \\ 4v_2 = 6v_1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = v_1 + 1 \\ 6v_1 = 4v_1 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 2 \\ v_2 = 3 \end{cases}$

Для тех, кто хочет знать больше.

341. $x^4 - x^3 - 51x^2 + 49x + 98 = 0$.

Применим схему Торнера:

	1	−1	−51	49	98
−1	1	−2	−49	98	0
2	1	0	−49	0	
7	1	7	0		
−7	1	0			

Ответ: -1; 2; ± 7.

342. а) $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x^2 - 2x - 1) = 0$; $D = 2^2 + 4 = 8$

$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{array}\right.$

б) $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$;

$(x-1)(x^3 + 3x^2 - 4x - 12) = 0$;

$(x-1)(x-2)(x^2 + 5x + 6) = 0$;

$(x-1)(x-2)(x-2)(x+3) = 0$

$x = 1$, $x = \pm 2$ и $x = -3$.

343. а) $p^3 - p^2 = 8p - 12$; $\quad p^3 - p^2 - 8p + 12 = 0$

$(p-2)(p^2 + p - 6) = 0$

$(p-2)(p+3)(p-2) = 0$

$p = 2$ и $p = -3$

б) $p^3 - 3p = p^2 + 1$; $\quad p^3 - p^2 - 3p - 1 = 0$;

$(p+1)(p^2 - 2p - 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} p = -1 \\ p = 1 \pm \sqrt{2} \end{array}\right.$

344. $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$; $\quad (x-1)(x^2 + 5x + 6) = 0$;

$(x-1)(x+2)(x+3) = 0$

$x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$

Ответ: (1; 0); (−2; 0); (−3; 0); (0; −6).

345. $y = x^4 - ax^3 - 10x^2 + 80x - 96$
$x = 4, y = 0 \Rightarrow a = 5$
$x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 80x - 96 = 0$
$(x-4)(x^3 - x^2 - 14x + 24) = 0$
$(x-4)(x-3)(x^2 + 2x - 8) = 0$
$(x-4)(x-3)(x+4)(x-2) = 0$
Ответ: $a = 5$ и (3; 0); (–4; 0); (2; 0).
346. а) $718x^4 - 717x^2 - 1 = 0$; $(718x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$; $x^2 = 1$; $x = \pm 1$
б) $206x^4 - 205x^2 - 1 = 0$; $(206x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$; $x^2 = 1$; $x = \pm 1$
347. а) $(x^2 + 8x)^2 - 4(x+4)^2 = 256$; $t = (x+4)^2 - 16$
$t^2 - 4t - 320 = 0$
$t = 20$ и $t = -16$

$(x+4)^2 - 16 = 20 \Rightarrow x + 4 = \pm 6 \Rightarrow x = 2$ и $x = -10$

$(x+4)^2 - 16 = -16 \Rightarrow x = -4$

Ответ: –10; –4; 2.
б) $2(x^2 - 6x)^2 - 120(x-3)^2 = 8$; $t = (x-3)^2 - 9$
$2t^2 - 120t - 1088 = 0$; $t^2 - 60t - 544 = 0$; $t = 68$ и $t = -8$

$(x-3)^2 - 9 = 68 \Rightarrow x - 3 = \pm\sqrt{77} \Rightarrow x = \pm\sqrt{}$

$(x-3)^2 - 9 = -8 \Rightarrow x - 3 = \pm 1 \Rightarrow x = 4$ и $x = 2$

Ответ: 2; 4; $3 \pm \sqrt{77}$.
348. а) $x^3 + 11x - 108 = 0$; $(x-4)(x^2 + 4x + 27) = 0$
$x = 4$
$x^2 + 4x + 27 = 0 \Rightarrow$ нет корней
Ответ: $x = 4$.
б) $x^5 + 6x + 44 = 0$
$(x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 22) = 0$
$x = -2$

$$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 22 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^4 + 2{,}5x^2 - 7{,}5x + 22 - \frac{1}{16} > 0$$

Ответ: $x = -2$.
349. 1. $x^3 - x + 3 = 0 \Rightarrow$ нет целых корней по теореме 2.
2. $x^4 + x^2 - 20 = 0$; $(x^2 - 4)(x^2 + 5) = 0$; $x = \pm 2$
3. $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$; $(x^2 + 1)(x^2 + 4) = 0$. Нет корней.
4. $x^3 - 5x + 4 = 0$; $(x-1)(x^2 + x - 4) = 0$;
$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17 \Rightarrow$ один целый корень: $x = 1$.
Ответ: 4.
350. $10x^4 - 77x^3 + 150x^2 - 77x + 10 = 0$

$$10\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 77\left(x + \frac{1}{x}\right) + 150 = 0; \qquad t = x + \frac{1}{x}$$

$10t^2 - 20 - 77t + 150 = 0$
$10t^2 - 77t + 130 = 0$

$$D = 77^2 - 4 \cdot 10 \cdot 130 = 729 = 27^2 \Rightarrow t = \frac{77 + 27}{20} = 5{,}2 \text{ и } t = \frac{77 - 27}{20} = 2{,}5$$

$x+\frac{1}{x}=5,2 \Rightarrow 5x^2-26x+5=0$

$D=26^2-4\cdot5\cdot5=576=24^2 \Rightarrow x_1=\frac{26+24}{10}=5$ и $x_2=\frac{26-24}{10}=\frac{1}{5}$

$x+\frac{1}{x}=2,5 \Rightarrow 2x^2-5x+2=0$

$D=5^2-4\cdot2\cdot2=9 \Rightarrow x_3=2$ и $x_4=\frac{1}{2}$

Ответ: 2; $\frac{1}{2}$; 5; $\frac{1}{5}$.

351. $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$

$am^4+bm^3+cm^2+bm+a=0 \mid : m^4$

$a+b\left(\frac{1}{m}\right)+c\left(\frac{1}{m}\right)^2+b\left(\frac{1}{m}\right)^3+a\left(\frac{1}{m}\right)^4=0 \Rightarrow \frac{1}{m}$ — корень этого уравнения.

352. а) $x^3(x^2-1)=0$; $x^3(x+1)(x-1)=0$; $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$.

б) $x^6-4x^4=0$; $x^4(x^2-4)=0$; $x^4(x+2)(x-2)=0$; $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-2$.

в) $0,5x^3-32x=0$; $x(0,5x^2-32)=0$; $0,5x(x+8)(x-8)=0$; $x_1=0$, $x_2=8$, $x_3=-8$.

г) $0,2x^4-4x^2=0$; $x^2(0,2x^2-4)=0$; $0,2x^2(x+2\sqrt{5})(x-2\sqrt{5})=0$; $x_1=0$, $x_2=2\sqrt{5}$, $x_3=-2\sqrt{5}$.

353. а) $(a^2-4)(a^2+4)=25a^2-16$; $a^4-16-25a^2+16=0$; $a^4-25a^2=0$;

$a^2(a^2-25)=0$; $a_1=0$ или $a^2-25=0$, $a^2=25$, $a_2=5$ или $a_3=-5$.

б) $(x^2-1)(x^2+1)=6x^2-1$; $x^4-1-6x^2+1=0$

$x^2(x^2-6)=0$; $x_1=0$ или $x^2-6=0$, $x^2=6$, $x_2=\sqrt{6}$ или $x_3=-\sqrt{6}$.

354. а) $x^2(x-1)-4(x-1)^2=0$;

$(x-1)(x^2-4(x-1))=0$;

$x-1=0$ или $x^2-4x+4=0$;

из первого уравнения $x_1=1$;

из второго $D=(-4)^2-4\cdot1\cdot4=0$; $x_2=\frac{4+0}{2}=2$.

б) $2y^2(y+1)-(y+1)^2=0$; $(y+1)(2y^2-(y+1))=0$;

$y+1=0$ или $2y^2-y-1=0$;

из первого уравнения $y_1=-1$;

из второго $D=1-4\cdot2(-1)=9$; $y_2=\frac{1+3}{4}=1$ или $y_3=\frac{1-3}{4}=-0,5$.

в) $\left(5x^3+40\right)-\left(19x^2+38x\right)=0;\ \ 5\left(x^3+2^3\right)-19x\left(x+2\right)=0$;

$5\left(x+2\right)\left(x^2-2x+4\right)-19x\left(x+2\right)=0;$

$\left(x+2\right)\left(5\left(x^2-2x+4\right)-19x\right)=0;$

$x+2=0$ или $5x^2-10x+20-19x=0;$

из первого уравнения $x_1=-2;$

из второго $5x^2-29x+20=0;$

$D=(-29)^2-4\cdot5\cdot20=441;\ \ x_2=\dfrac{29+21}{10}=5$ или $x_3=\dfrac{29-21}{10}=0{,}8.$

г) $\left(6x^3+6\right)-\left(31x^2+31x\right)=0;\ \ 6\left(x^3+1\right)-31x\left(x+1\right)=0;$

$\left(x+1\right)\left(6\left(x^2-x+1\right)-31x\right)=0;$

$x+1=0$ или $6x^2-6x+6-31x=0;$

из первого уравнения $x_1=-1;$

из второго $6x^2-37x+6=0;$

$D=(-37)^2-4\cdot6\cdot6=1225;\ \ x_3=\dfrac{37+35}{12}=6$ или $x_2=\dfrac{37-35}{12}=\dfrac{1}{6}.$

355. а) $x^3+2x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x^2+x+2)=0$

$x=-1;\ x^2+x+2=0\ \Rightarrow$ нет корней.

Ответ: $x=-1$

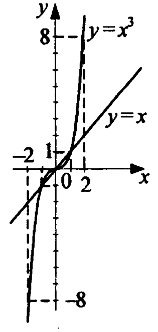
б) $x^3+4x^2-3x-6=0$

$(x+1)(x^2+3x-6)=0$

$x=-1;\ \ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$

Ответ: $x=-1,\ \dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2}.$

356. 1) Графиком функции $y=x^3$ является кубическая парабола, расположенная в I и III четвертях.



x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

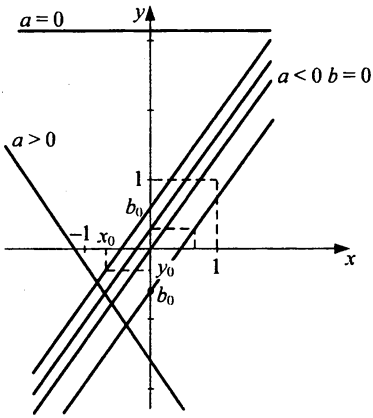
2) Графиком функции $y=x$ является прямая.

3) $x^3-x=0;\ \ x(x^2-1)=0;$

$x(x+1)(x-1)=0;$

$x_1=0,\ \ x_3=1,\ \ x_2=-1.$

357. Уравнение эквивалентно такому: $x^3 = -ax - b$; количество решений равно количеству точек пересечения у кубической параболы $y = x^3$ и прямой $y = -ax - b$.



1) $a = 0$. Прямая $y = -b$ имеет одну точку пересечения с кубической параболой. 2) $a > 0$. Прямая $y = -ax - b$ имеет одну точку пересечения с кубической параболой. 3) $a < 0$.

а) $b = 0$. Прямая $y = -ax$ пересекает кубическую параболу в трех точках.

б) Рассмотрим всевозможные прямые, параллельные $y = -ax$. Существует такая прямая, которая пересечет параболу ровно в двух точках. Симметричная ей относительно точки О прямая также пересекает параболу в двух точках. Эти прямые имеют коэффициент $b = b_0 > 0$ и $-b < 0$. При $b > b_0$ и $b < -b_0$ прямая пересекает кубическую параболу в одной точке. При $-b_0 < b < b_0$ прямая пересекает параболу в трех точках.

358. а) Обозначим $x^2 + 6x = t \Rightarrow t^2 - 5t - 24 = 0$;

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 121$ $t_1 = \frac{5+11}{2} = 8$ или $t_2 = \frac{5-11}{2} = -3$;

$x^2 + 6x = 8$; $x^2 + 6x - 8 = 0$; $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 68$;

$x_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{17}}{2} = -3 + \sqrt{17}$ или $x_2 = \frac{-6 - 2\sqrt{17}}{2} = -3 - \sqrt{17}$

или $x^2 + 6x = -3$; $x^2 + 6x + 3 = 0$; $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 24$;

$x_3 = \frac{-6 + 2\sqrt{6}}{2} = -3 + \sqrt{6}$ или $x_4 = \frac{-6 - 2\sqrt{6}}{2} = -3 - \sqrt{6}$.

б) Обозначим $x^2 - 2x - 5 = t \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$;

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$; $t_1 = \frac{2+4}{2} = 3$ или $t_2 = \frac{2-4}{2} = -1$;

$x^2 - 2x - 5 = 3$; $x^2 - 2x - 8 = 0$; $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$;

$x_1 = \frac{2+6}{2} = 4$ или $x_2 = \frac{2-6}{2} = -2$;

или $x^2 - 2x - 5 = -1$; $x^2 - 2x - 4 = 0$;

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 20$; $x_3 = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$ или $x_4 = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{2} = 1 - \sqrt{5}$.

в) Обозначим $x^2+3x-25=t \Rightarrow t^2-2t+7=0$;

$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot7=-24<0 \Rightarrow$ нет корней.

г) Обозначим $(y+2)^2=t \Rightarrow t^2-t-12=0$;

$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-12)=49$; $t_1=\frac{1+7}{2}=4$ или $t_2=\frac{1-7}{2}=-3$;

$(y+2)^2=4$; $y^2+4y=0$; $y(y+4)=0$; $y_1=0$ или $y_2=-4$; или $(y+2)^2=-3$ нет решений.

д) Обозначим $x^2+2x+1=t \Rightarrow (t-1)(t+1)=3$; $t^2=4$; $t_1=2$ или $t_2=-2$;

$(x+1)^2=2$; $x=-1+\sqrt{2}$ или $x=-1-\sqrt{2}$; или $(x+1)^2=-2$ — нет корней.

е) Обозначим $x^2-x=t \Rightarrow (t-16)(t+2)=88$; $t^2-14t-120=0$;

$D=(-14)^2-4\cdot1\cdot(-120)=676$; $t_1=\frac{14+26}{2}=20$ или $t_2=\frac{14-26}{2}=-6$;

$x^2-x=20$; $x^2-x-20=0$;

$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-20)=81$; $x_1=\frac{1+9}{2}=5$ или $x_2=\frac{1-9}{2}=-4$;

или $x^2-x=-6$; $x^2-x+6=0$; $D=(-1)^2-4\cdot1\cdot6=-23<0$ — нет корней..

ж) Обозначим $2x^2+7x=t \Rightarrow (t-8)(t-3)-6=0$;

$t^2-11t+18=0$; $D=(-11)^2-4\cdot1\cdot18=49$; $t_1=\frac{11+7}{2}=9$; $t_2=\frac{11-7}{2}=2$;

$2x^2+7x=9$; $2x^2+7x-9=0$;

$D=7^2-4\cdot2\cdot(-9)=121$; $x_2=\frac{-7+11}{4}=1$ или $x_1=\frac{-7-11}{4}=-4,5$;

или $2x^2+7x=2$; $2x^2+7x-2=0$;

$D=7^2-4\cdot2\cdot(-2)=65$; $x_4=\frac{-7+\sqrt{65}}{4}$ или $x_3=\frac{-7-\sqrt{65}}{4}$.

359. а) $y^7-y^6+y=1$; $(y-1)(y^6+1)=0$; $y=1$

б) $y^7+y^6-27y=27$; $(y+1)(y^6-27)=0$; $y=-1$; $y=\pm\sqrt{3}$

360. а) $2x^7+x^6+2x^4+x^3+2x+1=0$;

$(2x+1)(x^6+x^3+1)=0$; $x=-\frac{1}{2}$

$(x^3)^2+x^3+1=0 \Rightarrow$ нет корней.

Ответ: $x=-\frac{1}{2}$.

б) $x^7-2x^6+2x^4-4x^3+x-2=0$;

$(x-2)(x^6+2x^3+1)=0$

$(x-2)(x^3+1)^2=0$; $x=2, x=-1$ Ответ: $x=2$; $x=-1$.

361. а) Обозначим $x^2 = t \Rightarrow t^2 - 9t + 18 = 0$;

$D = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 9$; $t_1 = \dfrac{9+3}{2} = 6$ или $t_2 = \dfrac{9-3}{2} = 3$;

$x^2 = 6$, откуда $x_1 = \sqrt{6}$ или $x_2 = -\sqrt{6}$;

$x^2 = 3$, откуда $x_3 = \sqrt{3}$ или $x_4 = -\sqrt{3}$;

$-\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{3} = 0$.

б) Обозначим $x^2 = t \Rightarrow t^2 + 3t - 10 = 0$;

$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49$; $t_1 = \dfrac{-3+7}{2} = 2$ или $t_2 = \dfrac{-3-7}{2} = -5$;

$x^2 = 2$, откуда $x_1 = \sqrt{2}$ или $x_2 = -\sqrt{2}$; $x^2 = -5$ — нет корней;

$\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0$.

в) Обозначим $x^2 = t \Rightarrow 4t^2 - 12t + 1 = 0$;

$D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 128$;

$t_1 = \dfrac{12 + 8\sqrt{2}}{8} = 1{,}5 + \sqrt{2}$ или $t_2 = \dfrac{12 - 8\sqrt{2}}{8} = 1{,}5 - \sqrt{2}$;

$x^2 = 1{,}5 + \sqrt{2}$, откуда $x_1 = \sqrt{1{,}5 + \sqrt{2}}$ или $x_2 = -\sqrt{1{,}5 + \sqrt{2}}$;

$x^2 = 1{,}5 - \sqrt{2}$, откуда $x_3 = \sqrt{1{,}5 - \sqrt{2}}$ или $x_4 = -\sqrt{1{,}5 - \sqrt{2}}$;

$\sqrt{1{,}5 + \sqrt{2}} - \sqrt{1{,}5 + \sqrt{2}} + (\sqrt{1{,}5 - \sqrt{2}} - \sqrt{1{,}5 - \sqrt{2}}) = 0$.

г) Обозначим $y^2 = t \Rightarrow 12t^2 - t - 1 = 0$;

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-1) = 49$; $t_1 = \dfrac{1+7}{24} = \dfrac{1}{3}$ или $t_2 = \dfrac{1-7}{24} = -\dfrac{1}{4}$; $y^2 = \dfrac{1}{3}$,

откуда $y_1 = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ или $y_2 = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}$; или $y^2 = -\dfrac{1}{4}$, — нет корней; $\sqrt{\dfrac{1}{3}} - \sqrt{\dfrac{1}{3}} = 0$.

362. а) Подставим $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ в уравнение: $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^4 - 6\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 + 3 = 0$.

$(3+\sqrt{5})^2 - 6(3+\sqrt{5}) + 3 = 9 + 6\sqrt{5} + 5 - 18 - 6\sqrt{5} + 3 = -1 \neq 0$.

б) Подставим $\sqrt{5-\sqrt{2}}$ в уравнение: $(\sqrt{5-\sqrt{2}})^4 - 10(\sqrt{5-\sqrt{2}})^2 + 23 = 0$.

$(5-\sqrt{2})^2 - 10(5-\sqrt{2}) + 23 = 25 - 10\sqrt{2} + 2 - 50 + 10\sqrt{2} + 23 = 0$.

363. а) Сделаем замену $t = x^2$.

Рассмотрим квадратный трехчлен $t^2 - 20t + 64$; решим уравнение

$t^2 - 20t + 64 = 0$.

$D = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64 = 144$; $t = \dfrac{20 \pm 12}{2}$, $t_1 = 16$ или $t_2 = 4$.

Поэтому $t^2 - 20t + 64 = (t-16)(t-4)$;

$(x^2 - 16)(x^2 - 4) = (x+4)(x-4)(x+2)(x-2)$.

б) $t = x^2$.

Решим уравнение: $t^2 - 17t + 16 = 0$;

$D = (-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 225$; $t = \dfrac{17 \pm 15}{2}$; $t_1 = 16$ или $t_2 = 1$.

Поэтому $t^2 - 17t + 16 = (t - 16)(t - 1)$;

$\left(x^2 - 16\right)\left(x^2 - 1\right) = (x + 4)(x - 4)(x + 1)(x - 1)$.

364. а) $\dfrac{3y^3 + 12y^2 - 27y - 108}{y^2 - 16} = 0$; $\quad (y + 4)(3y^2 - 27) = 0$, $y \neq \pm 4$

$y^2 = 9$; $y = \pm 3$

б) $\dfrac{y^3 + 6y^2 - y - 6}{y^3 - 36y} = 0$; $\quad (y + 6)(y^2 - 1) = 0$, $y \neq 0$, $y \neq \pm 6$

$y^2 = 1$; $y = \pm 1$

365. $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+4} = \dfrac{1}{x+8} - \dfrac{1}{x+20}$; $\quad \dfrac{2}{x^2 + 6x + 8} = \dfrac{12}{x^2 + 28x + 160}$

$2(x^2 + 28x + 160) = 12(x^2 + 6x + 8)$

$10x^2 + 16x - 224 = 0$; $5x^2 + 8x - 112 = 0$;

$D = 8^2 + 4 \cdot 5 \cdot 112 = 48^2$; $\quad x_1 = \dfrac{-8 + 48}{10} = 4$ и $x_2 = \dfrac{-8 - 48}{10} = -5{,}6$

Ответ: 4; –5,6.

366. а) $\dfrac{x^2 - 5x + 3}{x - 5} - \dfrac{x^2 + 5x + 1}{x + 5} = \dfrac{1}{4}$; $\quad x + \dfrac{3}{x - 5} - x - \dfrac{1}{x + 5} = \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{2x + 20}{x^2 - 25} = \dfrac{1}{4}$; $\quad x^2 - 8x - 105 = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} x = 15 \\ x = -7 \end{array}\right.$

Ответ: 15; –7.

б) $\dfrac{x^2 + 6x + 10}{x + 3} - \dfrac{x^2 - 6x + 7}{x - 3} = 7\dfrac{1}{8}$; $\quad x + 3 + \dfrac{1}{x + 3} - (x - 3) + \dfrac{2}{x - 3} = 7\dfrac{1}{8}$

$\dfrac{3x + 3}{x^2 - 9} = \dfrac{9}{8}$; $\quad 3x^2 - 8x - 35 = 0$

$D = 8^2 + 4 \cdot 3 \cdot 35 = 22^2$; $\quad x_1 = \dfrac{8 + 22}{6} = 5$ и $x_2 = \dfrac{8 - 22}{6} = -2\dfrac{1}{3}$

Ответ: 5; $-2\dfrac{1}{3}$.

367. а) $\dfrac{1}{x^2 - 6x + 8} - \dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{10}{x^2 - 4} = 0$

$x + 2\left(1 - (x - 4)\right) + 10(x - 4) = 0$, $x \neq \pm 2$, $x \neq 4$

$-x^2 + 13x - 30 = 0$; $x^2 - 13x + 30 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = 3 \end{array}\right.$ $\quad$ Ответ: 10; 3.

б) $\dfrac{3}{x^2-x-6}+\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{7}{x^2-9}$

$3(x+3)(1+x-3)=7(x+2),\ x\neq-2,\ x\neq\pm3$

$3x^2-4x-32=0$

$D=4^2+4\cdot3\cdot32=20^2;\qquad x_1=\dfrac{4+20}{6}=4$ и $x_2=\dfrac{4-20}{6}=-2\dfrac{2}{3}$

Ответ: 4; $-2\dfrac{2}{3}$.

368. $\dfrac{1}{x^3-x^2+x-1}+\dfrac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}=\dfrac{4x^3-3x^2-14x-4}{x^4-1}\Bigg|\cdot(x^4-1)\neq0$

$x+1+(4x^2+21)(x-1)=4x^3-3x^2+14x-4,\ x\neq\pm1$

$x^2-8x+16=0;\ (x-4)^2=0;\ x=4$

Ответ: 4.

369. а) $x^2=\dfrac{7x-4}{4x-7}$

$4x^3-7x^2-7x+4=0;\qquad (x+1)(4x^2-11x+4)=0$

$D=11^2-4\cdot4\cdot4=57\Rightarrow x_1=-1$ и $x_{2,3}=\dfrac{11\pm\sqrt{57}}{8}$

Ответ: -1; $\dfrac{11\pm\sqrt{57}}{8}$.

б) $x^2=\dfrac{5x-3}{3x-5}$

$3x^3-5x^2-5x+3=0$

$(x+1)(3x^2-8x+3)=0$

$D=8^2-4\cdot3\cdot3=28\Rightarrow x_1=-1$ и $x_{2,3}=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$

Ответ: -1; $\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$.

370. а) Обозначим $\dfrac{x^2+1}{x}=t$.

Тогда $t+\dfrac{1}{t}=2\dfrac{1}{2}$; $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{5}{2}$; $t+\dfrac{1}{t}-\dfrac{5}{2}=0$; $\dfrac{2t^2+2-5t}{2t}=0,\ t\neq0.$

Решим уравнение $2t^2-5t+2=0$;

$D=(-5)^2-4\cdot2\cdot2=9;\ t=\dfrac{5\pm3}{4},\ t_1=2$ или $t_2=\dfrac{1}{2}$.

1) $\dfrac{x^2+1}{x}=2;\ x^2+1=2x\ \ (x\neq0)$;

$x^2-2x+1=0;\ (x-1)^2=0,\ x=1.$

2) $\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{2}$; $x^2+1=\frac{1}{2}x$ $(x \neq 0)$; $x^2-\frac{1}{2}x \quad +1=0$;

$D=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot 1\cdot 1<0$ — корней нет.

б) Обозначим $\frac{x^2+2}{3x-2}=t$.

Тогда $t+\frac{1}{t}=2\frac{1}{6}$; $t+\frac{1}{t}-\frac{3}{6}=0$;

$6t^2+6-13t=0$; $6t^2-13t-6=0$;

$D=(13)^2-4\cdot 6\cdot(-6)=25$; $t=\frac{13\pm 5}{12}$, $t_1=\frac{3}{2}$ и $t_2=\frac{2}{3}$.

1) $\frac{x^2+2}{3x-2}=\frac{3}{2}$; $2x^2+4=9x-6$ $\left(x \neq \frac{2}{3}\right)$;

$2x^2-9x+10=0$;

$D=(-9)^2-4\cdot 2\cdot 10=1$; $x=\frac{9\pm 1}{4}$, $x_2=2$ или $x_1=2{,}5$.

2) $\frac{x^2+2}{3x-2}=\frac{2}{3}$; $3x^2+6=6x-4$ $\left(x \neq \frac{2}{3}\right)$; $3x^2-6x+10=0$;

$D=6^2-4\cdot 3\cdot 10=-84<0$ — нет корней.

371. а) $\frac{x^4}{x^2-2}+\frac{1-4x^2}{2-x^2}+4=0$

$\frac{x^4+4x^2-1+4x^2-8}{x^2-2}=0$

$x^4+8x^2-9=0$, $x \neq \pm\sqrt{2}$

$\left[\begin{array}{l} x^2=-8 \\ x^2=1 \end{array}\right. \Rightarrow x=\pm 1$

Ответ: ± 1.

б) $\frac{x^2+3}{x^2+1}+\frac{2}{x^2-4}+\frac{10}{x^4-3x^2-4}=0$

$y=x^2$

$\frac{y+3}{y+1}+\frac{2}{y-4}+\frac{10}{(y-4)(y+1)}=0$

$(y+3)(y-4)+2(y+1)+10=0, x \neq 4, x \neq -1$

$y^2+y=0$

$y=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$

$y=-1 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow$ нет корней.

Ответ: 0.

372. а) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2-16\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2=15$; $\qquad t=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2$

$t-\frac{16}{t}=15$;

$t^2-15t-16=0 \Rightarrow t=16$ и $t=-1$

$\frac{x+1}{x-2}=\pm 4 \Rightarrow x=3$ и $x=1{,}4$

Ответ: 3; 1,4.

б) $\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^2-9\left(\frac{x-5}{x+3}\right)^2=8$; $\qquad t=\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^2$

$t-\frac{9}{t}=8$; $t^2-8t-9=0 \Rightarrow t=9$ и $t=-1$

$\frac{x+3}{x-5}=\pm 3 \Rightarrow x=3$ и $x=9$

Ответ: 3; 9.

373. а) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=2$; $\qquad t=x+\frac{1}{x}$

$2t^2-4-t=2$;

$2t^2-t-6=0$;

$D=(-1)^2+4\cdot 2\cdot 6=7^2 \Rightarrow t_1=\frac{1+7}{4}=2$ и $t_2=\frac{1-7}{4}=-\frac{3}{2}$

$x+\frac{1}{x}=2 \Rightarrow x=1$

$x+\frac{1}{x}=-\frac{3}{2} \Rightarrow$ нет корней, т.к. $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 2$

Ответ: 1.

б) $9x^2-18x+\frac{9}{x^2}-\frac{18}{x}=22$; $\qquad t=x+\frac{1}{x}$

$9t^2-18-18t=22$;

$9t^2-18t-40=0$;

$D=18^2+4\cdot 9\cdot 80=42^2 \Rightarrow t_1=\frac{18+42}{18}=3\frac{1}{3}$ и $t_2=-1\frac{1}{3}$

$x+\frac{1}{x}=3\frac{1}{3} \Rightarrow 3x^2-10x+3=0 \Rightarrow x=3$ и $x=\frac{1}{3}$

$x+\frac{1}{x}\neq -1\frac{1}{3}$, т.к. $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 2$

Ответ: 3; $\frac{1}{3}$.

374. $\frac{1}{34}\left(a+\frac{1}{a}\right)=a^3+\frac{1}{a^3}$; $t=a+\frac{1}{a}\neq 0$

$3\frac{1}{4}t=t^3-3t$

$4t^3-25t=0$

$t\left(t^2-\frac{25}{4}\right)=0 \Rightarrow t=0,\ t=\pm 2{,}5$

$a+\frac{1}{a}=2{,}5 \Rightarrow a=2$ и $a=\frac{1}{2}$

$t=-2{,}5$ не подходит, т.к. t больше t^3-3t в $3\frac{1}{4}$ раза.

Ответ: 2; $\frac{1}{2}$.

375. а) $x^3+\frac{1}{x^3}=22\left(x+\frac{1}{x}\right)$; $t=x+\frac{1}{x}\neq 0$

$t^3-3t=22t$

$t^3-25t=0 \Rightarrow t=0,\ t=\pm 5$

$x+\frac{1}{x}=\pm 5 \Rightarrow x^2\pm 5x+1=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ и $x=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

Ответ: $\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$.

б) $x^3-\frac{1}{x^3}=19\left(x-\frac{1}{x}\right)$; $t=x-\frac{1}{x}$

$t^3+3t=19t$

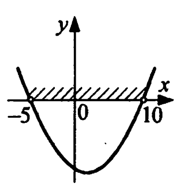
$t^3-16t=0 \Rightarrow t=0,\ t=\pm 4$

$x-\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x=\pm 1$

$x-\frac{1}{x}=\pm 4 \Rightarrow x^2\pm 4x-1=0 \Rightarrow x=2\pm\sqrt{5}$ и $x=-2\pm\sqrt{5}$

Ответ: $-2\pm\sqrt{5}$.

376. а) 1) График функции $y=x^2-5x-50$ является параболой, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положительный).



2) Решим уравнение

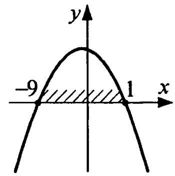
$x^2-5x-50=0$;

$D=(-5)^2-4\cdot 1\cdot(-50)=225$;

$x_1=\frac{5+15}{2}=10,\ x_2=\frac{5-15}{2}=-5$.

3) (–5; 10).

б) 1) Графиком функции $y = -m^2 - 8m + 9$ является парабола, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при m^2 отрицательный).



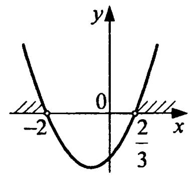
2) Решим уравнение $-m^2 - 8m + 9 = 0$;

$D = (-8)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 9 = 100$;

$$m_1 = \frac{8+10}{2\cdot(-1)} = -9,\ m_2 = \frac{8-10}{-2} = 1.$$

3) $[-9;\ 1]$.

в) 1) Графиком функции $z = 3y^2 + 4y - 4$ является парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при y^2 положительный).



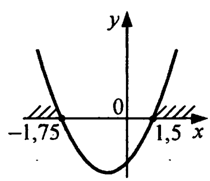
2) Решим уравнение $3y^2 + 4y - 4 = 0$;

$$D = 4^2 - 4\cdot 3\cdot(-4) = 64;\ y_1 = \frac{-4+8}{6} = \frac{2}{3},\ y_2 = \frac{-4-8}{6} = -2.$$

3) $(-\infty;\ -2)\cup(\frac{2}{3};\ +\infty)$.

г) $8p^2 + 2p - 21 \geq 0$.

1) Графиком функции $8p^2 + 2p - 21$ является парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при p^2 положительный).



2) Решим уравнение $8p^2 + 2p - 21 = 0$;

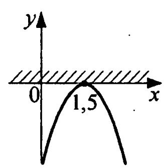
$D = 2^2 - 4\cdot 8\cdot(-21) = 676$;

$$p_1 = \frac{-2+26}{16} = 1{,}5,\ p_2 = \frac{-2-26}{16} = -1{,}75$$

3) $(-\infty;\ -1{,}75]\cup[1{,}5;\ +\infty)$.

д) $-4x^2 + 12x - 9 \leq 0$.

1) Графиком функции $y = -4x^2 + 12x - 9$ является парабола, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицательный)



2) Решим уравнение $-4x^2 + 12x - 9 = 0$;

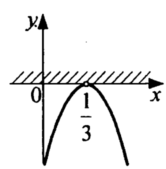
$4x^2 - 12x + 9 = 0$;

$$D = 12^2 - 4\cdot(-4)\cdot(-9) = 0;\ x = \frac{-12+0}{-8} = 1{,}5.$$

3) $(-\infty;\ +\infty)$.

е) $-9x^2 + 6x - 1 < 0$.

1) Графиком функции $y = -9x^2 + 6x - 1$ является парабола, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицательный).



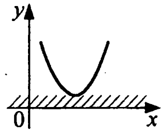
2) Решим уравнение $-9x^2 + 6x - 1 = 0$;

$9x^2 - 6x + 1 = 0$;

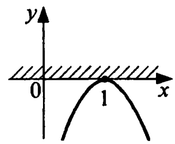
$$D = (-6)^2 - 4\cdot 9\cdot 1 = 0;\ x = \frac{6+0}{18} = \frac{1}{3}.$$

3) $(-\infty;\ \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3};\ +\infty)$.

377. а) $2(x^2+x-3x-3)>x^2+5x-7x-35$;
$x^2-2x+29>0$.

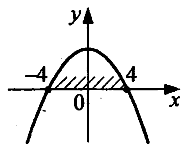


1) Графиком функции $y=x^2-2x+29$ является парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положительный).
2) Решим уравнение $x^2-2x+29=0$;
$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot29<0$ — нет корней.
3) x — любое.
б) $(x+5)(x-7)\le4(x^2+2x-4x-8)$;
$x^2+5x-7x-35\le4x^2+8x-16x-32$;
$x^2+5x-7x-35-4x^2-8x+16x+32\le0$;
$-3x^2+6x-3\le0$.
1) Графиком функции $y=-3x^2+6x-3$ является парабола, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицательный)

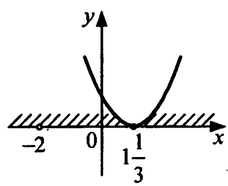


2) Решим уравнение $-3x^2+6x-3=0$;
$x^2-2x+1=0$;
$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot1=0$. $x=\dfrac{2+0}{2}=1$.
3) x — любое.

378. а) 1) Т.к. подкоренное выражение неотрицательно, то $144-9x^2\ge0$ и $144-9x^2$ стоит в знаменателе $\Rightarrow$ $144-9x^2\ne0$ Значит, $144-9x^2>0$.



2) Графиком функции $y=144-9x^2$ является парабола, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицательный).
3) Решим уравнение: $144-9x^2=0$;
$9x^2=144$; $x^2=16$; $x=4$ или $x=-4$. 4) $(-4;4)$.
б) 1) Так как подкоренное выражение неотрицательно, то $16-24x+9x^2\ge0$. Т.к. $x+2$ стоит в знаменателе дроби, $\Rightarrow x+2\ne0\Rightarrow x\ne-2$.



2) Графиком функции $y=9x^2-24x+16$ является парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положительный).
3) Решим уравнение $9x^2-24x+16=0$;
$D=(-24)^2-4\cdot9\cdot16=0$; $x=\dfrac{24+0}{18}=\dfrac{4}{3}$.
4) $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$

379. Когда дискриминант больше нуля, т.е. $D=8^2-4(a+2)(a-4)>0$
$a^2-2a-24<0$; $-4<a<6$

380. Когда дискриминант меньше нуля, т.е. $D=6^2-4(b-1)(b-3)<0$
$b^2-4b-6>0$
$$\left[\begin{array}{l} b<2-\sqrt{10} \\ b>2+\sqrt{10} \end{array}\right.$$

381. Уравнение не имеет корней, если после замены соответствующее ему квадратное уравнение не имеет неотрицательных корней.
Обозначим $t = x^2$.

а) 1) $t^2 - 12t^2 + c = 0$ не имеет корней при $D < 0$;
$D = 144 - 4c < 0$ при $4c > 144$, $c > 36$.

2) $t^2 - 12t^2 + c = 0$ при $D \geq 0$ имеет корни $t = \frac{12 \pm \sqrt{D}}{2}$.

При $D \geq 0$ оба они отрицательными быть не могут. Окончательно, $c > 36$.

б) 1) $t^2 + ct + 100 = 0$ не имеет корней при $D < 0$;
$D = c^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100 < 0$ при $c^2 < 400$, $-20 < c < 20$.

2) $t^2 + ct + 100 = 0$ при $D \geq 0$ имеет корни $t = \frac{-c \pm \sqrt{D}}{2}$.

При $c \leq 0$ один из корней обязательно неотрицателен $(-c + \sqrt{D} \geq 0)$;
при $c > 0$ имеем $-c + \sqrt{D} < 0$, $c > \sqrt{D}$, но $D = c^2 - 400 < c^2$, поэтому $c > \sqrt{D}$ всегда.
Итак, $c > 0$. Окончательно, $c > -20$.

382. Уравнение имеет корни, если после замены соответствующее квадратное уравнение имеет неотрицательные корни. $t^2 - 13t + k = 0$ имеет корни при $D = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k \geq 0$, т.е. при $k \leq \frac{169}{4}$; они равны $t = \frac{13 \pm \sqrt{D}}{2}$, и хотя бы один из них положителен.

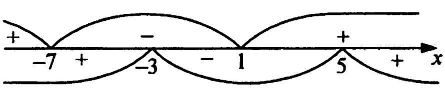
а) Уравнение имеет четыре различных корня, если оба корня соответствующего квадратного уравнения положительны и различны, т.е. $D > 0$, т.е. $13 - \sqrt{D} > 0$; $13 - \sqrt{169 - 4k} > 0$; $13 > \sqrt{169 - 4k}$; $169 > 169 - 4k$; $4k > 0$; $k > 0$; окончательно, $0 < k < \frac{169}{4}$.

б) Уравнение имеет два корня, если один из корней соответствующего квадратного уравнения отрицателен, а второй неотрицателен, т.е. $13 - \sqrt{D} < 0$; т.е. $13 < \sqrt{169 - 4k}$; т.е. $-4k > 0$, $k < 0$, либо когда $D = 0$, т.е. $k = \frac{169}{4}$.

383. Решим первое неравенство.
Рассмотрим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$;

$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 64$; $x_1 = \frac{-6 + \sqrt{64}}{2} = 1$, $x_2 = -\frac{-6 - \sqrt{64}}{2} = -7$

$(x-1)(x+7) \leq 0$ при $-7 \leq x \leq 1$.



Решим второе неравенство: $x^2-2x-15\le 0$;

$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-15)=64$; $x_1=\frac{2+8}{2}=5$, $x_2=\frac{2-8}{2}=-3$;

$(x-5)(x+3)\le 0$ при $-3\le x\le 5$.

Общие решения неравенств: $-3\le x\le 1$.

384. а) Решим первое неравенство системы. $4x^2-27x-7=0$;

$D=(-27)^2-4\cdot 4\cdot(-7)=841$;

$x_1=\frac{27+29}{8}=\frac{56}{8}=7$ или $x_2=\frac{27-29}{8}=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$;

$(x-7)(x+\frac{1}{4})>0$ при $x<-\frac{1}{4}$ и $x>7$.

Учитывая второе уравнение системы, получаем: $x>7$.

б) Решим первое неравенство системы.

$-3x^2+17x+6<0$; $3x^2-17x-6>0$.

Рассмотрим уравнение $3x^2-17x-6=0$;

$D=17^2+6\cdot 12=289+72=361$; $x_1=\frac{17+19}{6}=\frac{36}{6}=6$ или $x_2=\frac{17-19}{6}=-\frac{1}{3}$;

$(x-6)(x+\frac{1}{3})>0$ при $x<-\frac{1}{3}$ и $x>6$.

Учитывая второе уравнение системы, получаем: $x<-\frac{1}{3}$.

в) Решим второе неравенство системы:

$2x^2-18>0$; $2(x^2-9)>0$ $2(x-3)(x+3)>0$ при $x<-3$ и $x>3$.

Из первого неравенства следует, что $x<-1$, получаем: $x<-3$.

г) Решим второе неравенство системы:

$3x^2-15x>0$; $3x(x-5)<0$ при $0<x<5$.

Из первого неравенства следует, что $x>4$, получаем: $4<x<5$.

385. а) Решим первое неравенство системы.

Рассмотрим уравнение $x^2+x-6=0$;

$D=1^2-4\cdot 1\cdot(-6)=25$; $x_1=\frac{-1+5}{2}=2$, $x_2=\frac{-1-5}{2}=-3$;

$(x-2)(x+3)<0$ при $-3<x<2$.

Решим второе неравенство системы: $-x^2+2x+3>0$; $x^2-2x-3<0$;

$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=16$; $x_1=\frac{2+4}{2}=3$ или $x_2=\frac{2-4}{2}=-1$;

$(x-3)(x+1)<0$ при $-1<x<3$.

Учитывая решение первого неравенства, получаем: $-1<x<2$.

б) Решим первое неравенство системы.

Рассмотрим уравнение $x^2+4x-5=0$;

$D=4^2-4\cdot 1\cdot(-5)=36$; $x_1=\frac{-4+6}{2}=1$, $x_2=\frac{-4-6}{2}=-5$;

$(x-1)(x+5)>0$ при $x<-5$ и $x>1$.

Решим второе неравенство системы. Рассмотрим уравнение:

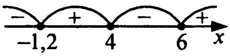
$x^2-2x-8=0$; $D=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-8)=36$; $x_1=\dfrac{2+6}{2}=4$, $x_2=\dfrac{2-6}{2}=-2$;

$(x+2)(x-4)<0$ при $-2<x<4$.

Учитывая решение первого неравенства системы, получаем: $1<x<4$.

386. а) $(x+1{,}2)(6-x)(x-4)>0$;

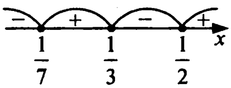
$-(x+1{,}2)(x-6)(x-4)>0$; $(x+1{,}2)(x-6)(x-4)<0$;



$(-\infty;-1{,}2)\cup(4;6)$

б) $(\frac{1}{3}-x)(\frac{1}{2}-x)(\frac{1}{7}-x)<0$;

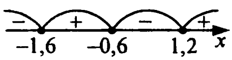
$-(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{7})<0$; $(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{7})>0$;



$(\frac{1}{7};\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{2};+\infty)$

в) $(x+0{,}6)(1{,}6+x)(1{,}2-x)>0$;

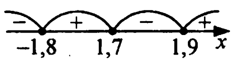
$-(x+0{,}6)(x+1{,}6)(x-1{,}2)>0$; $(x+0{,}6)(x+1{,}6)(x-1{,}2)<0$;



$(-\infty;-1{,}6)\cup(-0{,}6;1{,}2)$

г) $(1{,}7-x)(1{,}8+x)(1{,}9-x)<0$;

$(x-1{,}7)(x+1{,}8)(x-1{,}9)<0$;



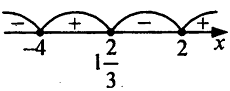
$(-\infty;-1{,}8)\cup(1{,}7;1{,}9)$

387. а) $(3x-5)(x+4)(2-x)=0$; $3x-5=0$ или $x+4=0$ или $2-x=0$;

т.е. $x=1\frac{2}{3}$ или $x=-4$ или $x=2$.

б) $(3x-5)(x+4)(2-x)>0$;

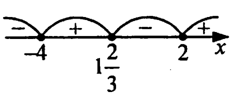
$-3(x-\frac{5}{3})(x+4)(x-2)>0$; $(x-\frac{5}{3})(x+4)(x-2)<0$.



$(-\infty;-4)\cup(1\frac{2}{3};2)$

в) $(3x-5)(x+4)(2-x)<0$;

$-3(x-\frac{5}{3})(x+4(x-2)<0$; $(x-\frac{5}{3})(x+4)(x-2)>0$.

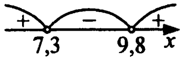


$(-4;1\frac{2}{3})\cup(2;+\infty)$

388. а) $18(x-2)(x-7) > 0$; $(x-2)(x-7) > 0$;

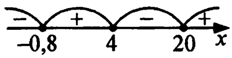
$(-\infty;2)\cup(7;+\infty)$

б) $-(x-7,3)(x-9,8) > 0$; $(x-7,3)(x-9,8) < 0$;



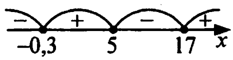
$(7;3)\cup(9;8)$

в) $-(x+0,8)(x-4)(x-20) < 0$; $(x+0,8)(x-4)(x-20) > 0$;



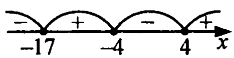
$(-0,8;4)\cup(20;+\infty)$

г) $-10(x+0,3)(x-17)(x-5)\geq 0$; $(x+0,3)(x-17)(x-5)\leq 0$;



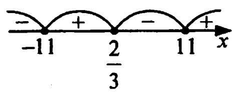
$(-\infty;-0,3]\cup[5;17)$

389. а) $(x-4)(x+4)(x+17) > 0$;



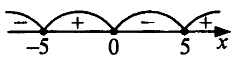
$(-17;-4)\cup(4;+\infty)$

б) $(x-\frac{2}{3})(x-11)(x+11) < 0$;



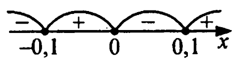
$(-\infty;-11)\cup(\frac{2}{3};11)$

в) $x(x-5)(x+5) < 0$;



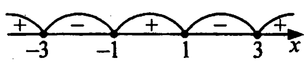
$(-\infty;-5)\cup(0;5)$

г) $x(x-0,1)(x+0,1) > 0$;



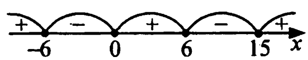
$(-0,1;0)\cup(0,1;+\infty)$

д) $(x-3)(x+3)(x-1)(x+1) > 0$;



$(-\infty;-3)\cup(-1;1)\cup(3;+\infty)$

е) $x(x-15)(x-6)(x+6) < 0$;



$(-6;0)\cup(6;15)$

390. а) Т.к. $x^2 + 17 > 0$ при всех x, решим только неравенство $(x-6)(x+2) < 0$;
его решение: $-2 < x < 6$.

б) Т.к. $2x^2 + 1 > 0$ при всех x, решим только неравенство $x(x-4) < 0$; его решение: $x < 0$ и $x > 4$.

в) Т.к. $(x-1)^2 \geq 0$ при всех x, этот множитель не влияет на знак неравенства. Но т.к. неравенство строгое, исключим из решения $x = 1$. Решим неравенство $x - 24 < 0$; $x < 24$. Учитывая, что $x\neq 1$, получаем $x < 1$ и $1 < x < 24$.

г) Т.к. $(x-4)^2 \geq 0$ при всех x, этот множитель не влияет на знак неравенства. Но т.к. неравенство строгое, исключим из решения $x = 4$. Решим неравенство $(x+7)(x-21) > 0$. Его решение: $x < -7$ и $x > 21$.

391. а) Т.к. $(3x-1)(6x+1)$ стоит под корнем, то $(3x-1)(6x+1) \geq 0$.
Т.к. $(3x-1)(6x+1)$ стоит в знаменателе $\Rightarrow (3x-1)(6x+1) \neq 0$.
Следовательно, $(3x-1)(6x+1) > 0$;

$$6 \cdot 3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right) > 0;$$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right) > 0; \quad \left(-\infty; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

б) $y = \dfrac{7}{\sqrt{(11x+2)(x-4)}}$.

Т.к. подкоренное выражение неотрицательно $\Rightarrow (11x+2)(x-4) \geq 0$.
Т.к. $(11x+2)(x-4)$ стоит в знаменателе $\Rightarrow (11x+2)(x-4) \neq 0$.
Следовательно, $(11x+2)(x-4) > 0$;

$$\left(x+\frac{2}{11}\right)(x-4) > 0; \quad \left(-\infty; -\frac{2}{11}\right) \cup (4; +\infty).$$

392. а) Выражение $\dfrac{x-3}{x+1}$ не определено в точке $x = -1$, поэтому в решение первого неравенства эта точка не входит. Но она входит в решение второго, т.к. при $x = -1$ левая часть второго неравенства равна нулю, значит неравенства не равносильны.

б) В решение первого неравенства точка $x = 8$ не входит, а второго — входит, следовательно, неравенства не равносильны.

393. а) $\dfrac{x-8}{x+4} > 0$;

$(x-8)(x+4) > 0$;

$x \in (-\infty; -4) \cup (8; +\infty)$.

б) $\dfrac{x+16}{x-11} < 0 \Rightarrow$

$(x+16)(x-11) < 0$;

$x \in (-16; 11)$.

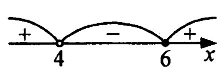
в) $\dfrac{x+1}{3-x} \geq 0$;

$$\begin{cases} (x+1)(x-3) \leq 0; \\ x \neq 3. \end{cases}$$

$x \in [-1; 3)$.

г) $\dfrac{6-x}{x-4} \leq 0$;

$$\begin{cases} (x-6)(x-4) \geq 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$$



$x \in (-\infty; 4) \cup [6; +\infty)$.

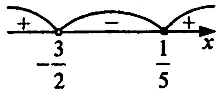
д) $\dfrac{2x-4}{3x+3} \le 0;$

$\begin{cases}(x+1)(x-2) \le 0,\\ x \ne -1.\end{cases}$

$x \in (-1;\ 2].$

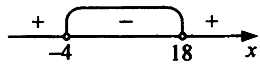
е) $\dfrac{5x-1}{2x+3} \ge 0;$

$\begin{cases}(x-\frac{1}{5})(x+\frac{3}{2}) \ge 0,\\ x \ne -\frac{3}{2}.\end{cases}$

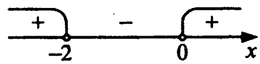


$x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup [\frac{1}{5}; +\infty).$

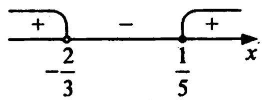
394. а) $\dfrac{6x+2}{x+4} < 5 \Leftrightarrow \dfrac{x-18}{x+4} < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 18$



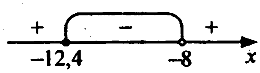
б) $\dfrac{5x+8}{x} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{4(x+2)}{x} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 0 \end{array}\right.$



в) $\dfrac{3-2x}{3x+2} \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{5x-1}{3x+2} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\frac{2}{3} \\ x \ge \frac{1}{5} \end{array}\right.$



г) $\dfrac{5x-4}{x+8} \ge 15 \Leftrightarrow \dfrac{10x+124}{x+8} \le 0 \Leftrightarrow -12{,}4 \le x < -8$



ГЛАВА III. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 7. Уравнения с двумя переменными и их системы

395. а) $x = -1$; $y = 3 \Rightarrow (-1)^2 - 3 + 2 = 0$. Следовательно, $(-1; 3)$ является решением уравнения.

б) $x = -1$; $y = 3 \Rightarrow (-1)\cdot 3 + 3 \neq 6$. Следовательно, $(-1; 3)$ не является решением уравнения.

в) $x = -1$; $y = 3 \Rightarrow (-1)^2 + 3^2 = 10$. Следовательно, $(-1; 3)$ является решением уравнения.

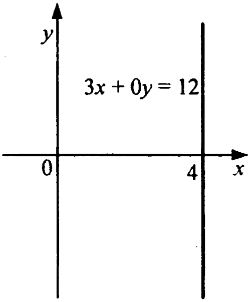
г) $x = -1$; $y = 3 \Rightarrow (-1)^2 - 3^2 + 8 = 0$. Следовательно, $(-1; 3)$ является решением уравнения.

396. а) $(0; -4)$, $(8; 0)$, $(10; 1)$;
б) $(10; 0)$; $(10; 1)$, $(10; 2)$;
в) $(12; 0)$, $(6; -1)$, $(4; -2)$;
г) $(0; 2)$, $(1; 2)$, $(1; -1)$.

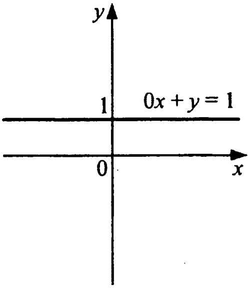
397. а) Вторая; б) Шестая; в) Пятая; г) Первая.

398. $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -x \end{array}\right.$

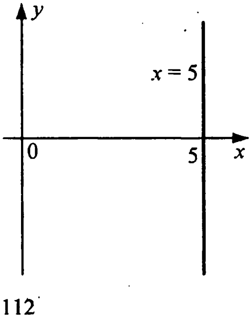
399. а)



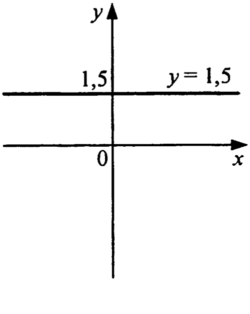
б)



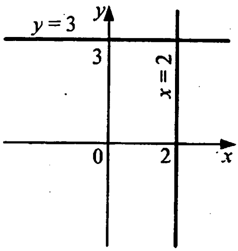
в)



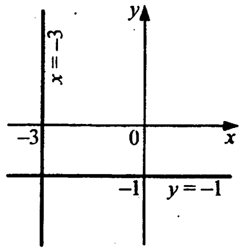
г)



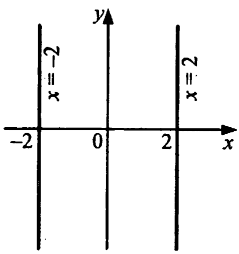
д)



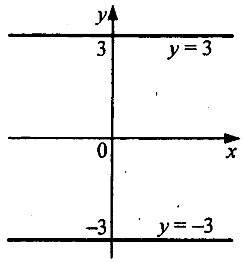
е)



ж)



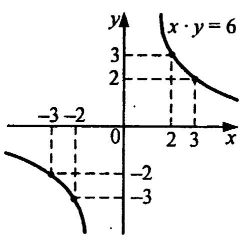
з)



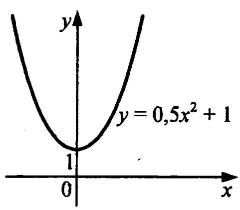
400. а) $(x-1)(y-1)=0$;
б) $(x+1)(y-x)=0$;
в) $(x-1)(x+2)=0$;
г) $(y+1)(y-2)=0$.

401. а) $(x-3)(y-3)=0$;
б) $(x+2)(y+2)=0$;
в) $|y|=2$;
г) $(x+2)(x-4)=0$.

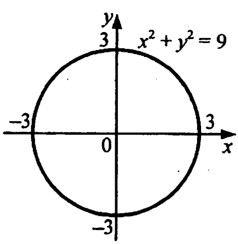
402. а)



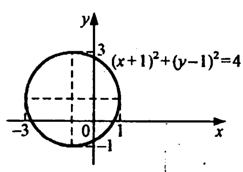
б)



в)



г)



403. а) Пара прямых $x = 5$ и $y = -6$;
б) пара прямых $x = -2$ и $y = 4$;
в) точка $(0; 1)$;
г) окружность с центром в точке $(5; -2)$ и радиусом 1.

404. а) $x^2 + y^2 = R^2$; $(-2)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 9$; $x^2 + y^2 = 9$;

б) $x^2 + y^2 = R^2$; $3^2 + 4^2 = 25$; $x^2 + y^2 = 25$;
в) $x^2 + y^2 = R^2$; $8^2 + 0^2 = 64$; $x^2 + y^2 = 64$.

405. $(x-2)^2 + (y+5)^2 = R^2$
а) $(-3)^2 + 4^2 = 25$; $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 25$;
б) $(-5)^2 + 12^2 = 169$; $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 169$;
в) $(-1)^2 + 1^2 = 2$; $(x-2)^2 + (y+5) = 2$.

406. $x^2 + y^2 - 6(x-y) = 7 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 = 25 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+3)^2 = 25$.

407. 3, т.к. $\dfrac{(2x+y)^2}{4} - (x - 0{,}5y)^2 = 24 \Leftrightarrow xy = 12$.

408. При $m < 0$.

409. а) Точка касания $(5; 0) \Rightarrow r^2 = 49; r = 7$.

б) Точка касания $(0; 7) \Rightarrow r^2 = 25; r = 5$.

410. $(x-3)^2 + (y-8)^2 = r^2$

а) Точка касания $(3; 0) \Rightarrow r^2 = 64; r = 8$.

б) Точка касания $(0; 8) \Rightarrow r^2 = 9; r = 3$.

411. а) $x \cdot y = 2; x, y \in \mathbb{Z}$

$x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 2$; $x = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 1$

Ответ: $(\pm 1; \pm 2), (\pm 2; \pm 1)$.

б) $x^2 - y^2 = 3; x, y \in \mathbb{Z}$

$(x-y)(x+y) = 3$

$$x - y = \pm 1 \Rightarrow x + y = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

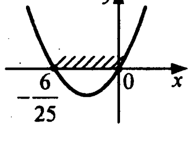
$$x - y = \pm 3 \Rightarrow x + y = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \mp 1 \end{cases}$$

Ответ: $(\pm 2; \pm 1), (\pm 2; \mp 1)$.

412. а) 1) График функции $y = 25x^2 + 6x$ – парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).
2) Решим уравнение $25x^2 + 6x = 0$;
$x(25x + 6) = 0$, $x_1 = 0$;

$25x + 6 = 0$; $25x = -6$, $x_2 = -\dfrac{6}{25}$.

3) $\left[-\dfrac{6}{25}; 0\right]$



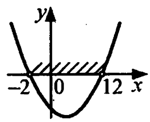
б) $(x-13)(x+13)>0$

$(-\infty;-13)\cup(13;+\infty)$

в) $4x^2-225\le 0$; $x^2\le\left(\frac{15}{2}\right)^2$; $|x|\le 7{,}5$;

г) $x^2-10x-24<0$.

1) График функции $y=x^2-10x-24$ – парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).



2) Решим уравнение $x^2-10x-24=0$;

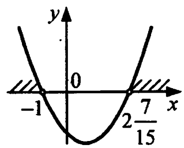
$D=(-10)^2\ \ -4\cdot(-24)=196$;

$x_1=\dfrac{10+14}{2}=12$; $x_2=\dfrac{10-14}{2}=-2$

3) $(-2;\,12)$.

д) $15x^2-30-22x-7>0$; $15x^2-22x-37>0$.

1) График функции $y=15x^2-22x-37$ – парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).



2) Решим уравнение $15x^2-22x-37=0$;

$D=484-4\cdot15\cdot(-37)=2704$;

$x_2=\dfrac{22+52}{30}=2\dfrac{7}{15}$; $x_1=\dfrac{22-52}{30}=-1$.

3) $(-\infty;-1)\cup\left(2\frac{7}{15};\infty\right)$

е) $3y^2-7\le 26y+70$; $3y^2-26y-77\le 0$; $(3x+7)(x-11)\le 0$; $-\dfrac{7}{3}\le x\le 11$.

413. а) $\begin{cases}11(1+2y)-9y=37,\\ x=1+2y;\end{cases}$ $\begin{cases}11+22y-9y=37,\\ x=1+2y;\end{cases}$

$\begin{cases}13y=26,\\ x=1+2y;\end{cases}$ $\begin{cases}y=2,\\ x=1+2\cdot2=5;\end{cases}$ $\begin{cases}x=5,\\ y=2.\end{cases}$

б) $\begin{cases}16x-4(3x-2)=5,\\ y=3x-2;\end{cases}$ $\begin{cases}16x-12x+8=5,\\ y=3x-2;\end{cases}$ $\begin{cases}4x=-3,\\ y=3x-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-0{,}75,\\ y=-4{,}25.\end{cases}$

414. а) $\begin{cases}-10x-4y=-60,\\ 3x+4y=-3;\end{cases}$ $\begin{cases}-7x=-63,\\ 3x+4y=-3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=9,\\ 3\cdot9+4y=-3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=9,\\ y=-7{,}5.\end{cases}$

б) $\begin{cases}2x-y=85\\ 5x-2y=200\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=85\\ x=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=30\\ y=-25\end{cases}$

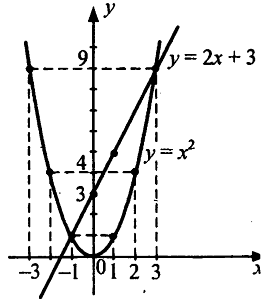
415. а) $x=-2$; $y=1$. $(-2)^2+(1)^2=5$; $6\cdot(-2)+5\cdot1=-12+5=-7$. Следовательно, $(-2;\,1)$ не является решением системы.

б) $x=1$; $y=-2$, $1^2+(-2)^2=5$; $6\cdot1+5\cdot(-2)=-4$. Следовательно, $(1;\,-2)$ является решением системы.

416. 1) График функции $y = x^2$ – парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положительный)

2) Найдем координаты вершины:

$$x_b = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0 \Rightarrow y_b = 0; (0; 0).$$



3)

x	1	3	–3	0	–1
y	1	9	9	0	1

4) График функции $y = 2x + 3$ – прямая.

x	–1	1
y	1	5

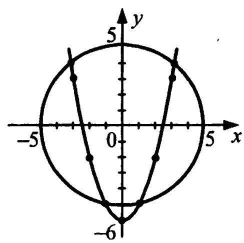
Точки пересечения — (–1; 1); (3; 9)

417. 1) График $x^2 + y^2 = 25$ – окружность с центром в (0; 0).

2) График функции $y = x^2–6$ – парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

3) Найдем координаты вершины:

$$x_b = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0; \ y_b = 0^2–6 = –6; (0; –6).$$

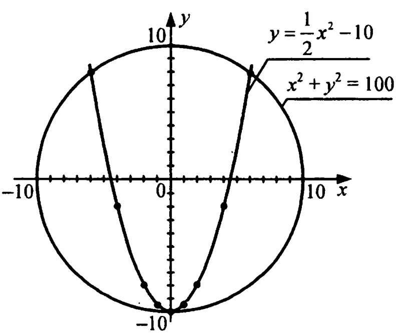


4)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	3	–2	5	–6	–5	–2	3

Приближенные точки пересечения — (3,2; 3,9); (–3,2; 3,9); (–1,1; –4,9); (1,1; –4,9).

418. 1) График уравнения $x^2 + y^2 = 100$ — окружность с центром в (0; 0).



2) График функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 10$ — парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

3) Найдем координаты вершины:

$$x_b = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2\cdot\frac{1}{2}} = 0;\ y_b = \frac{1}{2}0^2-10 = -10;\ (0;\ -10).$$

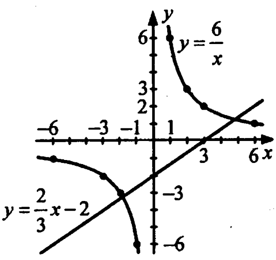
4)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-\frac{11}{2}$	-8	$-4{,}5$	-10	$-9{,}5$	-8	$-\frac{11}{2}$

Точки пересечения — $(-10;\ 0)$; $(6;\ 8)$; $(-6;\ 8)$.

419. а) $\begin{cases} y = \dfrac{6}{x}, \\ y = \dfrac{2}{3}x - 2. \end{cases}$

1) График функции $y = \dfrac{6}{x}$ – гипербола, у которой ветви расположены в I и III ч. (т.к. $k = 6 > 0$).



x	-1	-2	-3	-6	1	2	3	6
y	-6	-3	-2	-1	6	3	2	1

2) График функции $y = \dfrac{2}{3}x - 2$ – прямая.

x	0	6
y	-2	2

Приближенные точки пересечения — $(4{,}8;\ 1{,}2)$; $(-2;\ -3{,}2)$.

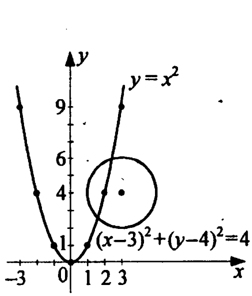
б) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4, \\ y = x^2. \end{cases}$

1) График уравнения $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$ – окружность с центром в точке $(3;\ 4)$ и радиусом 2.

2) График функции $y = x^2$ – парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

3) Найдем координаты вершины:

$$x_b = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2\cdot 1} = 0;\ y_b = 0;\ (0;0)$$

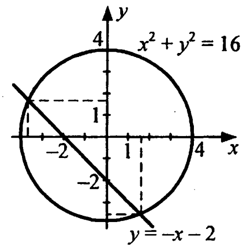


4)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Приближенные точки пересечения — $(1{,}6;\ 2{,}5)$; $(2{,}4;\ 5{,}8)$.

420. а) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x+y+2=0; \end{cases}$

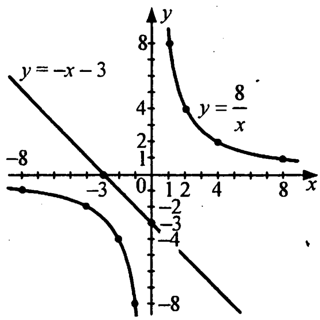


$\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ y=-x-12. \end{cases}$

1) График уравнения $x^2 + y^2 = 16$ – окружность с центром в (0; 0) и радиусом 4.

2) График функции $y = x–2$ – прямая.

Точки пересечения — (–3,6; 1,6); (1,6; –3,6).



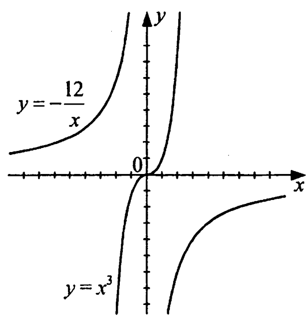
б) $\begin{cases} xy=8, \\ x+y+3=0; \end{cases}$

$\begin{cases} y=\dfrac{8}{x}, \\ y=-x-3. \end{cases}$

1) График функции $y = \dfrac{8}{x}$ – гипербола, у которой ветви расположены в I и III ч. (т.к. $k = 8 > 0$).

2) График функции $y = –x–3$ – прямая. Решений нет.

421. а) $\begin{cases} y=x^3, \\ xy=-12. \end{cases}$

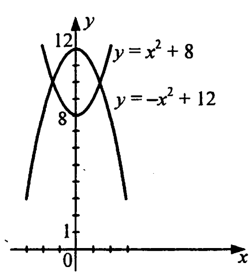


1) График функции $y = x^3$ – кубическая парабола, расположенная в I и Ш ч.

2) График функции $y = -\dfrac{12}{x}$ – гипербола, у которой ветви расположены во II и IV ч. (т.к. $k = –12 < 0$).

Решений нет.

б) $\begin{cases} y=x^2+8, \\ y=-x^2+12; \end{cases}$



1) График функции $y = x^2 + 8$ – парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

2) Найдем координаты вершины:

$x_b = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{0}{2\cdot 1} = 0,\ y_b = 8;\ (0;\ 8)$

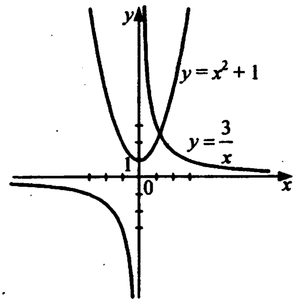
3) График функции $y = –x^2 + 12$ – парабола, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицательный).

4) Найдем координаты вершины:

$$x_b = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2:(-1)} = 0,\ y_b = 12;\ (0;\ 12).$$

5) 2 решения.

в) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = \dfrac{3}{x}. \end{cases}$



1) График функции $y = x^2 + 1$ – парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

2) Найдем координаты вершины:

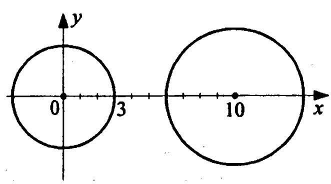
$$x_b = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2\cdot 1} = 0,$$

$y_b = 1;\ (0;\ 1)$

3) График функции $y = \dfrac{3}{x}$ – гипербола, у которой ветви расположены в I и III ч.

4) Одно решение.

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ (x-10)^2 + y^2 = 16. \end{cases}$

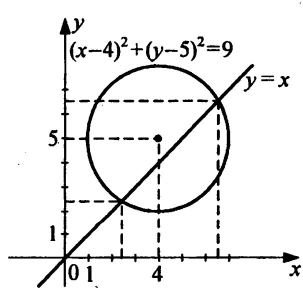


1) График уравнения $x^2 + y^2 = 9$ – окружность с центром в (0; 0) и радиусом 3.

2) График уравнения $(x-10)^2 + y^2 = 16$ – окружность с центром в (10; 0) и радиусом 4.

Нет решений.

422. а) $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-5)^2 = 9, \\ y = x. \end{cases}$



1) График уравнения $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 9$ – окружность с центром в (4; 5) и радиусом 3.

2) График функции $y = x$ – прямая (биссектриса I и III ч.)

Точки пересечения — (2,4; 2,4); (6,6; 6,6).

б) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 6 - x. \end{cases}$

1) График функции $y = x^2$ – парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

2) Найдем координаты вершины:

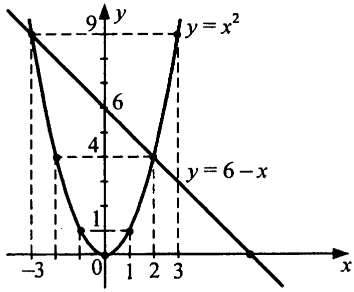
$$x_b = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2\cdot 1} = 0;\ y_b = 0.$$

3)

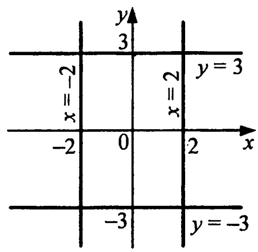
x	–1	–2	–3	0	1	2	3
y	1	4	9	0	1	4	9

4) График функции $y = 6 - x$ – прямая.

x	0	2
y	6	4



423. $\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ y^2 - 9 = 0 \end{cases}$



Ответ: $(\pm 2; \pm 3), (\pm 2; \mp 3)$.

424. а) $(y - x - 1)(y - x + 1) = 0$;

б) $(y - x^2)(y + 2) = 0$

425. $\begin{cases} x - 2y = 4b \\ 2x + y = 39 \end{cases}$

$x = 18;\ y = 3;\ 18 - 6 = 4b;\ b = 3$

Ответ: $b = 3$.

426. $\begin{cases} x + y = a + 1 \\ 3x - y = a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{a}{2} + 1 \end{cases}$

Ответ: $a > 0$.

427. $\left(\dfrac{a+1}{a-1} - \dfrac{a-1}{a+1}\right) : \dfrac{4a}{5a-5} = \dfrac{(a+1)^2 - (a-1)^2}{a^2 - 1} \cdot \dfrac{5(a-1)}{4a} =$

$= \dfrac{4a \cdot 5(a-1)}{(a^2-1)\cdot 4a} = \dfrac{5}{a+1} > 0$

428. Обозначим скорость 1-го велосипедиста x км/ч, тогда скорость 2-го равна $(x + 2)$ км/ч. $\left(\dfrac{36}{x}\right)$ ч — время 1-го; $\left(\dfrac{36}{x+2}\right)$ ч — время 2-го.

По условию $\left(\dfrac{36}{x}\right)$ больше $\left(\dfrac{36}{x+2}\right)$ на $\dfrac{1}{4}$, составим уравнение:

$\dfrac{36}{x} - \dfrac{36}{x+2} = \dfrac{1}{4}$; $\dfrac{36}{x} - \dfrac{36}{x+2} - \dfrac{1}{4} = 0$; $\dfrac{144(x+2) - 144x - x(x+2)}{4x(x+2)} = 0$;

$x(x+2)\neq 0$; $144x+288-144x-x^2-2x=0$; $x^2+2x-288=0$;

$D=2^2-4\cdot 1\cdot(-288)=1156$;

$x_2=\dfrac{-2+34}{2}=16$; $x_1=\dfrac{-2-34}{2}=-18$ — не подходит по смыслу задачи.

Если $x=16$, то $x+2=16+2=18$.

Ответ: 16 км/ч, 18 км/ч.

429. а) $\begin{cases} y^2-x=-1, \\ x=y+3; \end{cases}$ $\begin{cases} y^2-(y+3)=-1, \\ x=y+3; \end{cases}$ $\begin{cases} y^2-y-2=0, \\ x=y+3. \end{cases}$

Решим уравнение $y^2-y-2=0$;

$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9$;

$y_2=\dfrac{1+3}{2}=2$; $y_1=\dfrac{1-3}{2}=-1$.

$\begin{cases} y_1=2, \\ x_1=5; \end{cases}$ или $\begin{cases} y_2=-1 \\ x_2=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=5, \\ y_1=2; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=2, \\ y_2=-1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=x-1, \\ x^2-2y=26; \end{cases}$ $\begin{cases} y=x-1, \\ x^2-2(x-1)-26=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y=x-1, \\ x^2-2x-24=0. \end{cases}$

Решим уравнение $x^2-2x-24=0$;

$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-24)=100$;

$x_2=\dfrac{2+10}{2}=6$ или $x_1=\dfrac{2-10}{2}=-4$

$\begin{cases} x_1=6, \\ y_1=5; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=-4, \\ y_2=-5. \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy+x=-4, \\ x-y=6; \end{cases}$ $\begin{cases} (y+6)y+y+6=-4, \\ x=y+6; \end{cases}$

$\begin{cases} y^2+6y+y+6+4=0, \\ x=y+6; \end{cases}$ $\begin{cases} y^2+7y+10=0, \\ x=y+6; \end{cases}$

Решим уравнение:

$y^2+7y+10=0$;

$D=7^2-4\cdot 1\cdot 10=9$;

$y_2=\dfrac{-7+3}{2}=-2$; $y_1=\dfrac{-7-3}{2}=-5$.

$\begin{cases} y_2=-2, \\ x_2=4; \end{cases}$ или $\begin{cases} y_1=-5, \\ x_1=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=-5; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=4, \\ y_2=-2. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y=9, \\ y^2+x=29 \end{cases}$ $\begin{cases} y=9-x, \\ (9-x)^2+x=29; \end{cases}$

$\begin{cases} y=9-x, \\ 81-18x+x^2+x-29=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y=9-x, \\ x^2-17x+52=0; \end{cases}$

Решим уравнение $x^2 - 17x + 52 = 0$;
$D = (-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 52 = 81$;

$x_2 = \frac{17 + \sqrt{81}}{2} = 13$; $x_1 = \frac{17 - \sqrt{81}}{2} = 4$.

$\begin{cases} x_2 = 13, \\ y_2 = -4; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 5. \end{cases}$

430. а) $\begin{cases} x = 3 - y, \\ y^2 - x = 39; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 - y, \\ y^2 - (3 - y) - 39 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 - y, \\ y^2 + y - 42 = 0; \end{cases}$

Решим уравнение $y^2 + y - 42 = 0$;
$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-42) = 169$;

$y_2 = \frac{-1 + \sqrt{169}}{2} = 6$; $y_1 = \frac{-1 - \sqrt{169}}{2} = -7$.

$\begin{cases} x_1 = 10, \\ y_1 = -7; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = -3, \\ y_2 = 6. \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = 1 + x, \\ x + y^2 = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 + x, \\ x + (1 + x)^2 + 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 + x, \\ x^2 + 3x + 2 = 0. \end{cases}$

Решим уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$;
$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$;

$x_2 = \frac{-3 + 1}{2} = -1$; $x_1 = \frac{-3 - 1}{2} = -2$.

$\begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = -1. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y = 14, \\ y - x = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + (8 + x) - 14 = 0, \\ y = 8 + x; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ y = 8 + x. \end{cases}$

Решим уравнение $x^2 + x - 6 = 0$;
$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$;

$x_2 = \frac{-1 + 5}{2} = 2$ или $x_1 = \frac{-1 - 5}{2} = -3$.

$\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 10; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = -3, \\ y_1 = 5. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = 4, \\ y + xy = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4 - x, \\ 4 - x + x(4 - x) - 6 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4 - x, \\ -x^2 + 3x - 2 = 0. \end{cases}$

Решим уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$;

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1$; $x_2 = \frac{3 + 1}{2} = 2$; $x_1 = \frac{3 - 1}{2} = 1$.

$\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 2; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 3. \end{cases}$

431. а) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3+y, \\ (3+y)y=-2; \end{cases}$

$\begin{cases} x=3+y, \\ 3y+y^2+2=0. \end{cases}$

Решим уравнение $y^2+3y+2=0$;
$D=3^2-4\cdot1\cdot2=1$;

$y_2=\dfrac{-3+1}{2}=-1$; $y_1=\dfrac{-3-1}{2}=-2$

$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=-2; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=2, \\ y_2=-1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=-x+2,5, \\ x(-x+2,5)=1,5; \end{cases}$ $\begin{cases} y=-x+2,5, \\ -x^2+2,5x-1,5=0. \end{cases}$

Решим уравнение $x^2-2,5x+1,5=0$;
$D=(-2,5)^2-4\cdot1\cdot1,5=0,25$;

$x_2=\dfrac{2,5+0,5}{2}=1,5$ или $x_1=\dfrac{2,5-0,5}{2}=1$.

$\begin{cases} x_2=1,5, \\ y_2=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=1,5. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=-1, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$ $\begin{cases} y=-x-1, \\ x^2+(-x-1)^2=1; \end{cases}$ $\begin{cases} y=-x-1, \\ x^2+x^2+2x+1-1=0; \end{cases}$

$\begin{cases} y=-x-1, \\ 2x^2+2x=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y=-x-1, \\ 2x(x+1)=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=0, \\ y_2=-1; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1=-1, \\ y_1=0. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=17; \end{cases}$ $\begin{cases} x=y+2, \\ (y+2)^2-y^2-17=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x=y+2, \\ y^2+4y+4-y^2-17=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=y+2, \\ 4y=13; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{21}{4}, \\ y=\dfrac{13}{4}. \end{cases}$

432. а) $\begin{cases} x+y=8, \\ xy=-20; \end{cases}$ $\begin{cases} x=8-y, \\ (8-y)y+20=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=8-y, \\ 8y-y^2+20=0. \end{cases}$

Решим уравнение $y^2-8y-20=0$;
$D=(-8)^2-4\cdot1\cdot(-20)=144$;

$y_2=\dfrac{8+12}{2}=10$ или $y_1=\dfrac{8-12}{2}=-2$.

$\begin{cases} x_1=10, \\ y_1=-2; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=-2, \\ y_2=10. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-y=0{,}8, \\ xy=2{,}4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0{,}8+y, \\ (0{,}8+y)y-2{,}4=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0{,}8+y, \\ 0{,}8y+y^2-2{,}4=0. \end{cases}$

Решим уравнение $5y^2 + 4y–12 = 0$;

$D = 4^2–4\cdot5\cdot(–12) = 256$;

$y_2 = \dfrac{-4+16}{10} = 1{,}2$ или $y_1 = \dfrac{-4-16}{10} = -2.$

$\begin{cases} x_1 = 1{,}2; \\ y_1 = -2; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 1{,}2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-y^2=8, \\ x-y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} (4+y)^2-y^2=8, \\ x=4+y; \end{cases}$ $\begin{cases} 16+8y+y^2-y^2-8=0, \\ x=4+y; \end{cases}$

$\begin{cases} 8y=-8, \\ x=4+y; \end{cases}$ $\begin{cases} y=-1, \\ x=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3, \\ y=-1. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x+y=-3; \end{cases}$ $\begin{cases} (-x-3)^2+x^2-5=0, \\ y=-x-3; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+6x+9+x^2-5=0, \\ y=-x-3; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2+6x+4=0, \\ y=-x-3. \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+3x+2=0 \\ y=-x-3 \end{cases}$

Решим уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$;

$D = 3^2–4\cdot1\cdot2 = 1$;

$x_2 = \dfrac{-3+1}{2} = -1$; $x_1 = \dfrac{-3-1}{2} = -2.$

$\begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = -1. \end{cases}$

433. а) $\begin{cases} y-2x=2, \\ 5x^2-y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} y=2x+2, \\ 5x^2-(2x+2)-1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y=2x+2, \\ 5x^2-2x-3=0. \end{cases}$

Решим уравнение $5x^2–2x–3 = 0$;

$D = (–2)^2–4\cdot5\cdot(–3) = 64$;

$x_2 = \dfrac{2+8}{10} = 1$; $x_1 = \dfrac{2-8}{10} = -0{,}6.$

$\begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -0{,}6, \\ y_1 = 0{,}8. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-2y^2=2, \\ 3x+y=7; \end{cases}$ $\begin{cases} x-2(7-3x)^2=2, \\ y=7-3x; \end{cases}$ $\begin{cases} x-2(49-42x+9x^2)-2=0, \\ y=7-3x; \end{cases}$

$\begin{cases} x-98+84x-18x^2-2=0, \\ y=7-3x; \end{cases}$ $\begin{cases} -18x^2+85x-100=0, \\ y=7-3x. \end{cases}$

Решим уравнение $18x^2-85x+100=0$;
$D=(-85)^2-4\cdot 18\cdot 100=25$;

$$x_2=\frac{85+5}{36}=2{,}5;\ x_1=\frac{85-5}{36}=2\frac{2}{9}.$$

$$\begin{cases}x_2=2\frac{1}{2},\\ y_2=-\frac{1}{2};\end{cases}\ \begin{cases}x_1=2\frac{2}{9},\\ y_1=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

в) $\begin{cases}x^2-3y^2=52,\\ y-x=14;\end{cases}\ \begin{cases}x^2-3(14+x)^2-52=0,\\ y=14+x;\end{cases}$

$$\begin{cases}x^2-588-84x-3x^2-52=0,\\ y=14+x;\end{cases}\ \begin{cases}-2x^2-84x-640=0,\\ y=14+x.\end{cases}$$

Решим уравнение $x^2+42x+320=0$;
$D=42^2-4\cdot 1\cdot 320=484$; $\sqrt{D}=\pm 22$;

$$x_2=\frac{-42+22}{2}=-10;\ x_1=\frac{-42-22}{2}=-32.$$

$$\begin{cases}x_2=-10,\\ y_2=4;\end{cases}\ \begin{cases}x_1=-32,\\ y_1=-18.\end{cases}$$

г) $\begin{cases}3x^2+2y^2=11,\\ x+2y=3;\end{cases}\ \begin{cases}3(-2y+3)^2+2y^2=11,\\ x=-2y+3;\end{cases}$

$$\begin{cases}3(4y^2-12y+9)+2y^2-11=0,\\ x=-2y+3;\end{cases}\ \begin{cases}14y^2-36y+16=0,\\ x=-2y+3.\end{cases}$$

$$\begin{cases}7y^2-18y+8=0\\ x=-2y+3\end{cases}$$

Решим уравнение $7y^2-18y+8=0$;
$D=(-18)^2-4\cdot 7\cdot 8=100$;

$$y_2=\frac{18+10}{14}=2 \text{ или } y_1=\frac{18-10}{14}=\frac{4}{7}.$$

$$\begin{cases}y_2=2,\\ x_2=-1;\end{cases} \text{ или } \begin{cases}y_1=\frac{4}{7},\\ x_1=1\frac{6}{7};\end{cases}\ \begin{cases}x_1=1\frac{6}{7},\\ y_1=\frac{4}{7};\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=2.\end{cases}$$

д) $\begin{cases}x^2+y^2=100,\\ 3x=4y;\end{cases}\ \begin{cases}(\frac{4}{3}y)^2+y^2=100,\\ x=\frac{4}{3}y;\end{cases}\ \begin{cases}\frac{16}{9}y^2+y^2=100,\\ x=\frac{4}{3}y;\end{cases}$

$$\begin{cases}\frac{25}{9}y^2=100,\\ x=\frac{4}{3}y;\end{cases}\quad \begin{cases}y^2=36,\\ x=\frac{4}{3}y;\end{cases}\quad \begin{cases}y_2=6,\\ x_2=8;\end{cases}\text{ или }\begin{cases}y_1=-6,\\ x_1=-8;\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=-8,\\ y_1=-6;\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x_2=8,\\ y_2=6.\end{cases}$$

е) $\begin{cases}2x^2-y^2=32,\\ 2x-y=8.\end{cases}\quad \begin{cases}2x^2-(2x-8)^2=32,\\ y=2x-8;\end{cases}$

$$\begin{cases}2x^2-4x^2+32x-64-32=0,\\ y=2x-8;\end{cases}\quad \begin{cases}-2x^2+32x-96=0,\\ y=2x-8.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-16x+48=0\\ y=2x-8\end{cases}$$

Решим уравнение $x^2–16x + 48 = 0$;

$D = (–16)^2–4·1·48 = 64$$

$$x_2=\frac{16+8}{2}=12\text{ ; }x_1=\frac{16-8}{2}=4.$$

$$\begin{cases}x_2=12,\\ y_2=16;\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x_1=4,\\ y_1=0.\end{cases}$$

434. а) $\begin{cases}2xy-y=7,\\ x-5y=2;\end{cases}\quad \begin{cases}2y(5y+2)-y=7,\\ x=5y+2;\end{cases}\quad \begin{cases}10y^2+3y-7=0,\\ x=5y+2.\end{cases}$

Решим уравнение $10y^2 + 3y–7 = 0$;

$D = 3^2–4·10·(–7) = 289$;

$$y_2=\frac{-3+17}{20}=0,7\text{ ; }y_1=\frac{-3-17}{20}=-1.$$

$$\begin{cases}y_2=0,7,\\ x_2=5,5;\end{cases}\text{ или }\begin{cases}y_1=-1,\\ x_1=-3;\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=-3,\\ y_1=-1;\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x_2=5,5;\\ y_2=0,7.\end{cases}$$

б) $\begin{cases}2x^2-xy=33,\\ 4x-y=17;\end{cases}\quad \begin{cases}2x^2-x(4x-17)=33,\\ y=4x-17;\end{cases}$

$$\begin{cases}2x^2-4x^2+17x-33=0,\\ y=4x-17;\end{cases}\quad \begin{cases}-2x^2+17x-33=0,\\ y=4x-17.\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x^2-17x+33=0\\ y=4x-17\end{cases}$$

Решим уравнение $2x^2–17x + 33 = 0$;

$D = (–17)^2–4·2·33 = 25$; $x_2=\frac{17+5}{4}=5,5$ или $x_1=\frac{17-5}{4}=3.$

$$\begin{cases}x_2=5,5,\\ y_2=5;\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=-5.\end{cases}$$

в) $\begin{cases} x^2+2y=18, \\ 3x=2y; \end{cases}$ $\begin{cases} (\frac{2}{3}y)^2+2y-18=0, \\ x=\frac{2}{3}y; \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{4}{9}y^2+2y-18=0, \\ x=\frac{2}{3}y. \end{cases}$ $\begin{cases} 2y^2+9y-81=0 \\ x=\frac{2}{3}y \end{cases}$

Решим уравнение $2y^2 + 9y - 81 = 0$;

$D = 9^2 - 4\cdot 2\cdot(-81) = 729$; $\sqrt{D} = \pm 27$;

$y_2 = \frac{-9+27}{4} = 4{,}5$; $y_1 = \frac{-9-27}{4} = -9$.

$\begin{cases} y_2 = 4{,}5, \\ x_2 = 3; \end{cases}$ или $\begin{cases} y_1 = -9, \\ x_1 = -6; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -6, \\ y_1 = -9; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 4{,}5. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-y-4=0, \\ x^2+y^2=8{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} x=y+4, \\ (y+4)^2+y^2-8{,}5=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x=y+4, \\ y^2+8y+16+y^2-8{,}5=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=y+4, \\ 2y^2+8y+7{,}5=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=y+4 \\ 4y^2+16y+15=0 \end{cases}$

Решим уравнение $4y^2 + 16y + 15 = 0$;

$D = 16^2 - 4\cdot 4\cdot 15 = 16$;

$y_2 = \frac{-16+4}{8} = -1{,}5$ или $y_1 = \frac{-16-4}{8} = -2{,}5$.

$\begin{cases} x_1 = 1{,}5; \\ y_1 = -2{,}5; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = 2{,}5; \\ y_2 = -1{,}5. \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2+4y=10, \\ x-2y=-5; \end{cases}$ $\begin{cases} (2y-5)^2+4y=10, \\ x=2y-5; \end{cases}$

$\begin{cases} 4y^2-20y+25+4y-10=0, \\ x=2y-5; \end{cases}$ $\begin{cases} 4y^2-16y+15=0, \\ x=2y-5. \end{cases}$

Решим уравнение $4y^2 - 16y + 15 = 0$;

$D = (-16)^2 - 4\cdot 4\cdot 15 = 16$;

$y_2 = \frac{16+4}{8} = 2{,}5$; $y_1 = \frac{16-4}{8} = 1{,}5$.

$\begin{cases} y_2 = 2{,}5, \\ x_2 = 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} y_1 = 1{,}5, \\ x_1 = -2. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = 1{,}5; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = 2{,}5. \end{cases}$

е) $\begin{cases} x-2y+1=0, \\ 5xy+y^2=16. \end{cases}$ $\begin{cases} x=2y-1, \\ 5y(2y-1)+y^2-16=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x=2y-1, \\ 10y^2-5y+y^2-16=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2y-1, \\ 11y^2-5y-16=0. \end{cases}$

Решим уравнение $11y^2-5y-16=0$;

$D=(-5)^2-4\cdot 11\cdot(-16)=729$; $\sqrt{D}=\pm 27$;

$y_2=\dfrac{5+27}{22}=1\dfrac{5}{11}$; $y_1=\dfrac{5-27}{22}=-1$.

$\begin{cases} x_1=-3, \\ y_1=-1; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=1\dfrac{10}{11}, \\ y_2=1\dfrac{5}{11}. \end{cases}$

435. а) $\begin{cases} 2x+4y=5(x-y), \\ x^2-y^2=6; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4y=5x-5y, \\ x^2-y^2=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3y, \\ (3y)^2-y^2=6; \end{cases}$

$\begin{cases} x=3y, \\ 9y^2-y^2=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3y, \\ y^2=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

$\begin{cases} x_1=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}, \\ y_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}, \\ y_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

б) $\begin{cases} u-v=6(u+v), \\ u^2-v^2=6; \end{cases}$ $\begin{cases} u-v=6u+6v, \\ u^2-v^2=6; \end{cases}$ $\begin{cases} -5u=7v \\ u^2-v^2=6 \end{cases}$

$\begin{cases} u=-\dfrac{7}{5}v, \\ (-\dfrac{7}{5}v)^2-v^2=6; \end{cases}$ $\begin{cases} u=-\dfrac{7}{5}v, \\ \dfrac{49}{25}v^2-v^2=6; \end{cases}$ $\begin{cases} u=-\dfrac{7}{5}v, \\ v^2=\dfrac{25}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} u_1=3{,}5, \\ v_1=-2{,}5; \end{cases}$ или $\begin{cases} u_2=-3{,}5, \\ v_2=2{,}5. \end{cases}$

436. а) $\begin{cases} 6(y-x)-50=y, \\ y-xy=24; \end{cases}$ $\begin{cases} 6y-6x-50=y, \\ y(1-x)=24; \end{cases}$ $\begin{cases} 5y-6x-50=0, \\ y=\dfrac{24}{1-x}; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{5\cdot 24}{1-x}-6x-50=0, \\ y=\dfrac{24}{1-x}; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{120-6x(1-x)-50(1-x)}{1-x}=0, \\ y=\dfrac{24}{1-x}, \end{cases}$

$$\begin{cases}120-6x+6x^2-50+50x=0,\\ y=\dfrac{24}{1-x};\end{cases} \quad \begin{cases}6x^2+44x+70=0,\\ y=\dfrac{24}{1-x}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x^2+22x+35=0\\ y=\dfrac{24}{1-x}\end{cases}$$

Решим уравнение $3x^2 + 22x + 35 = 0$;

$D = 22^2 - 4\cdot 3\cdot 35 = 64$;

$$x_2=\frac{-22+8}{6}=-2\frac{1}{3};\ x_1=\frac{-22-8}{6}=-5.$$

$$\begin{cases}x_2=-2\dfrac{1}{3},\\ y_2=7\dfrac{1}{5};\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x_1=-5,\\ y_1=4.\end{cases}$$

б) $\begin{cases}p+5t=2(p+t),\\ pt-t=10;\end{cases} \quad \begin{cases}p+5t=2p+2t,\\ pt-t=10;\end{cases}$

$$\begin{cases}p=3t,\\ 3t\cdot t-t-10=0;\end{cases} \quad \begin{cases}p=3t\\ 3t^2-t-10=0\end{cases}$$

Решим уравнение $3t^2 - t - 10 = 0$;

$D = (-1)^2 - 4\cdot 3\cdot(-10) = 121$;

$$t_2=\frac{1+11}{6}=2 \text{ или } t_1=\frac{1-11}{6}=-1\frac{2}{3}.$$

$$\begin{cases}p_1=-5,\\ t_1=-1\dfrac{2}{3};\end{cases} \text{ или } \begin{cases}p_2=6,\\ t_2=2.\end{cases}$$

437. а) $\begin{cases}(x-2)(y+3)=160,\\ y-x=1;\end{cases} \quad \begin{cases}(x-2)(x+4)=160,\\ y=x+1;\end{cases}$

$$\begin{cases}x^2-2x+4x-8-160=0,\\ y=x+1;\end{cases} \quad \begin{cases}x^2+2x-168=0,\\ y=x+1;\end{cases}$$

Решим уравнение $x^2 + 2x - 168 = 0$;

$D = 2^2 - 4\cdot 1\cdot(-168) = 676$; $\sqrt{D}=\pm 26$;

$$x_2=\frac{-2+26}{2}=12 \text{ или } x_1=\frac{-2-26}{2}=-14.$$

$$\begin{cases}x_2=12,\\ y_2=13;\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x_1=-14,\\ y_1=-13.\end{cases}$$

5-10898

б) $\begin{cases}(x-1)(y+10)=9,\\ x-y=11;\end{cases}$ $\begin{cases}(y+10)(y+10)=9,\\ x=11+y;\end{cases}$

$\begin{cases}y^2+20y+100-9=0,\\ x=11+y.\end{cases}$

Решим уравнение $y^2 + 20y + 91 = 0$;

$D = 20^2–4\cdot1\cdot91 = 36$;

$y_2=\dfrac{-20+6}{2}=-7$ или $y_1=\dfrac{-20-6}{2}=-13.$

$\begin{cases}y_2=-7,\\ x_2=4;\end{cases}$ или $\begin{cases}y_1=-13,\\ x_1=-2.\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=-2,\\ y_1=-13;\end{cases}$ или $\begin{cases}x_2=4,\\ y_2=-7.\end{cases}$

438. а) $\begin{cases}x^2-4=0\\ xy=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm2\\ y=\pm3\end{cases}$

Ответ: $(\pm2; \pm3)$.

б) $\begin{cases}x^2-5x+6=0\\ y^2-6y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)(x-3)=0\\ (y-1)(x-5)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\ y=1\\ x=2,\ y=5\\ x=3,\ y=1\\ x=3,\ y=5\end{array}\right.$

Ответ: (2; 1); (2; 5); (3; 1); (3; 5).

439. $\begin{cases}y=0{,}5x^2-2,\\ y-x=2;\end{cases}$ $\begin{cases}y=0{,}5x^2-2,\\ y=x+2.\end{cases}$

1) График функции $y = 0{,}5x^2–2$ — парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

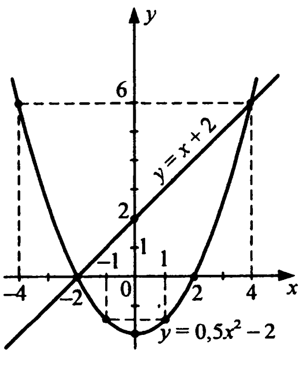
2) Найдем координаты вершины:

$x_в=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{0}{2\cdot0{,}5}=0;$

$y_в=-2;\ (0;-2).$

3)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	$\frac{5}{2}$	0	–1,5	–2	–1,5	0	$\frac{5}{2}$



4) График функции $y = x + 2$ — прямая.

x	0	2
y	2	4

5) Решение системы: (–2; 0); (4; 6).

б) $\begin{cases} y = x + 2, \\ x + 2 = 0{,}5x^2 - 2; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x + 2, \\ 0{,}5x^2 - x - 4 = 0. \end{cases}$

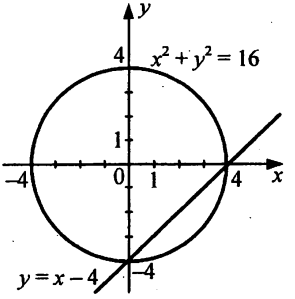
Решим уравнение $x^2–2x–8 = 0$;

$D = (-2)^2–4\cdot 1\cdot(–8) = 36$;

$x_2 = \frac{2+6}{2} = 4$; $x_1 = \frac{2-6}{2} = -2$.

$\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 6; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 0. \end{cases}$

440. а) 1) График уравнения $x^2 + y^2 = 16$ — окружность с центром в т. (0; 0) и радиусом 4.



2) График функции $y = x–4$ – прямая.

x	0	2
y	–4	–2

3) Решения системы: (4; 0); (0; –4).

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x - y = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} (y+4)^2 + y^2 - 16 = 0, \\ x = y + 4; \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 + 8y + 16 + y^2 - 16 = 0, \\ x = y + 4; \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 + 8y = 0, \\ x = y + 4; \end{cases}$ $\begin{cases} 2y(y+4) = 0, \\ x = y + 4; \end{cases}$

$\begin{cases} y_2 = 0, \\ x_2 = 4; \end{cases}$ или $\begin{cases} y_1 = -4, \\ x_1 = 0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = -4; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ x + 2y = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ x = -2y + 5. \end{cases}$

1) График функции $y = x^2 + 1$ – парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент x^2 при положителен).

2) Найдем координаты вершины: $x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2\cdot 1} = 0; y_в = 1$; (0;1).

3)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	10	5	2	1	2	5	10

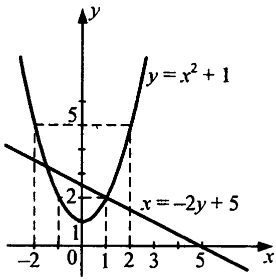
4) График функции $x = –2y + 5$ – прямая.

x	1	5
y	2	0

5) Решения системы: (–1,5; 3,2); (1; 2).

5*

б) $\begin{cases} x = -2y + 5, \\ (-2y+5)^2 + 1 - y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2y + 5, \\ 4y^2 - 21y + 25 + 1 = 0. \end{cases}$



Решим уравнение $4y^2 – 21y + 25 = 0$; $D = (–21)^2 – 4·4·26 = 25$;

$y_2 = \dfrac{21+5}{8} = 3\dfrac{1}{4}$ или $y_1 = \dfrac{21-5}{8} = 2.$ $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = -1,5, \\ y_2 = 3\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

441. а) $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 11, \\ x - 2y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} (2y+1)^2 + (2y+1)y - y^2 = 11, \\ x = 2y + 1; \end{cases}$

$\begin{cases} 4y^2 + 4y + 1 + 2y^2 + y - y^2 = 11, \\ x = 2y + 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 5y^2 + 5y - 10 = 0, \\ x = 2y + 1. \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 + y - 2 = 0 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$

Решим уравнение $y^2 + y – 2 = 0$;

$D = 1^2 – 4·1·(–2) = 9$; $y_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$; $y_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2.$

$\begin{cases} y_2 = 1, \\ x_2 = 3; \end{cases}$ или $\begin{cases} y_1 = -2, \\ x_1 = -3. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -3, \\ y_1 = -2; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + xy - 3y = 9, \\ 3x + 2y = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + xy - 3y = 9, \\ 2y = -3x - 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + x(-1,5x - 0,5) - 3(-1,5x - 0,5) = 9, \\ y = -1,5x - 0,5; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 1,5x^2 - 0,5x + 4,5x + 1,5 - 9 = 0, \\ y = -1,5x - 0,5; \end{cases}$ $\begin{cases} -0,5x^2 + 4x - 7,5 = 0, \\ y = -1,5x - 0,5. \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 = 0 \\ y = -1,5x - 0,5 \end{cases}$

Решим уравнение $x^2-8x+15=0$;
$D=(-8)^2-4\cdot15=4$;

$$x_2=\frac{8+2}{2}=5;\ x_1=\frac{8-2}{2}=3.\ \begin{cases}x_2=5,\\y_2=-8;\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x_1=3,\\y_1=-5.\end{cases}$$

442. а) $\begin{cases}x^2+y^2+3xy=-1,\\x+2y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}(-2y)^2+y^2+3y(-2y)+1=0,\\x=-2y;\end{cases}$

$$\begin{cases}4y^2+y^2-6y^2=-1,\\x=-2y;\end{cases}\ \begin{cases}y^2=1,\\x=-2y;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_2=1,\\x_2=-2;\end{cases}\text{ или }\begin{cases}y_1=-1,\\x_1=2.\end{cases}\ \begin{cases}x_1=2,\\y_1=-1;\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=1.\end{cases}$$

б) $\begin{cases}u+2v=4,\\u^2+uv-v=-5;\end{cases}$ $\begin{cases}u=4-2v,\\(4-2v)^2+(4-2v)v-v=-5;\end{cases}$

$$\begin{cases}u=4-2v,\\16-16v+4v^2+4v-2v^2-v=-5;\end{cases}\ \begin{cases}u=4-2v,\\2v^2-13v+21=0.\end{cases}$$

Решим уравнение $2v^2-13v+21=0$;
$D=(-13)^2-4\cdot2\cdot21=1$;

$$v_2=\frac{13+1}{4}=3{,}5\text{ или }v_1=\frac{13-1}{4}=3.$$

$$\begin{cases}u_1=-2,\\v_1=3;\end{cases}\text{ или }\begin{cases}u_2=-3,\\v_2=3{,}5.\end{cases}$$

443. а) $\begin{cases}x-y=5,\\\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6};\end{cases}$ $\begin{cases}x=y+5,\\\frac{6}{y+5}+\frac{6}{y}-1=0;\end{cases}$

$$\begin{cases}x=y+5,\\\frac{6y+6(y+5)-y(y+5)}{y(y+5)}=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=y+5,\\6y+6y+30-y^2-5y=0;\end{cases}\ \begin{cases}x=y+5,\\-y^2+7y+30=0;\end{cases}\ \begin{cases}x=y+5\\y^2-7y-30=0\end{cases}$$

Решим уравнение $y^2-7y-30=0$;
$D=(-7)^2-4\cdot1\cdot(-30)=169$;

$$y_2=\frac{7+13}{2}=10\text{ или }y_1=\frac{7-13}{2}=-3.$$

$$\begin{cases}x_2=15,\\y_2=10;\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x_1=2,\\y_1=-3.\end{cases}$$

б) $\begin{cases} x+y=6, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} y=6-x, \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{4}{6-x}-1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y=6-x, \\ \dfrac{4(6-x)-4x-x(6-x)}{x(6-x)}=0; \end{cases}$

$\begin{cases} y=6-x, \\ 24-4x-4x-6x+x^2=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y=6-x, \\ x^2-14x+24=0. \end{cases}$

Решим уравнение $x^2-14x+24=0$;

$D=(-14)^2-4\cdot1\cdot24=100$;

$x_2=\dfrac{14+10}{2}=12$ или $x_1=\dfrac{14-10}{2}=2$.

$\begin{cases} x_2=12, \\ y_2=-6. \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x+y=1, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-2,5; \end{cases}$ $\begin{cases} y=1-3x, \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{1-3x}+5=0; \end{cases}$

$\begin{cases} y=1-3x, \\ \dfrac{2(1-3x)+2x+5x(1-3x)}{x(1-3x)}=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y=1-3x, \\ 2-6x+2x+5x-15x^2=0; \end{cases}$

$\begin{cases} y=1-3x, \\ -15x^2+x+2=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y=1-3x \\ 15x^2-x-2=0. \end{cases}$

Решим уравнение $15x^2-x-2=0$;

$D=(-1)^2-4\cdot15\cdot(-2)=121$;

$x_2=\dfrac{1+11}{30}=\dfrac{2}{5}$; $x_1=\dfrac{1-11}{30}=-\dfrac{1}{3}$.

$\begin{cases} x_2=\dfrac{2}{5}, \\ y_2=-\dfrac{1}{5}; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{3}, \\ y_1=2. \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}, \\ x-2y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{3}{y}-\dfrac{3}{2y+2}-1=0, \\ x=2y+2; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{3(2y+2)-3y-y(2y+2)}{y(2y+2)}=0, \\ x=2y+2; \end{cases}$

$\begin{cases} 6y+6-3y-2y^2-2y=0 \\ x=2y+2 \end{cases}$ $\begin{cases} -2y^2+y+6=0, \\ x=2y+2. \end{cases}$ $\begin{cases} 2y^2-y-6=0 \\ x=2y+2 \end{cases}$

Решим уравнение $2y^2-y-6=0$;

$D=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-6)=49$;

$$y_2=\frac{1+7}{4}=2;\ y_1=\frac{1-7}{4}=-1{,}5.$$

$$\begin{cases}y_2=2,\\x_2=6;\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}y_1=-1{,}5,\\x_1=-1.\end{cases}.\ \begin{cases}x_1=-1,\\y_1=-1{,}5;\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}x_2=6,\\y_2=2.\end{cases}$$

444. а) $\begin{cases}y=x^2-8x+16,\\2x-3y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}y=x^2-8x+16,\\2x-3(x^2-8x+16)=0;\end{cases}$

$$\begin{cases}y=x^2-8x+16,\\2x-3x^2+24x-48=0;\end{cases}\ \begin{cases}y=x^2-8x+16,\\-3x^2+26x-48=0;\end{cases}\ \begin{cases}y=x^2-8x+16\\3x^2-26x+48=0\end{cases}$$

Решим уравнение $3x^2-26x+48=0$;

$D=(-26)^2-4\cdot3\cdot48=100$;

$$x_2=\frac{26+10}{6}=6;\ x_1=\frac{26-10}{6}=2\frac{2}{3}.$$

$$\begin{cases}y_2=4,\\x_2=6;\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}y_1=1\frac{7}{9},\\x_1=2\frac{2}{3}.\end{cases}\ \begin{cases}x_1=2\frac{2}{3},\\y_1=1\frac{7}{9};\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}x_2=6,\\y_2=4.\end{cases}$$

б) $\begin{cases}(x-5)^2+(y-4)^2=65,\\3x-y+6=0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-5)^2+(3x+2)^2=65,\\y=3x+6;\end{cases}$

$$\begin{cases}x^2-10x+25+9x^2+12x+4-65=0,\\y=3x+6;\end{cases}\ \begin{cases}10x^2+2x-36=0,\\y=3x+6.\end{cases}$$

$$\begin{cases}5x^2+x-18=0\\y=3x+6\end{cases}$$

Решим уравнение $5x^2+x-18=0$;

$D=1^2-4\cdot5\cdot(-18)=361$;

$$x_2=\frac{-1+19}{10}=1{,}8;\ x_1=\frac{-1-19}{10}=-2.$$

$$\begin{cases}x_2=1{,}8,\\y_2=11{,}4;\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}x_1=-2,\\y_1=0.\end{cases}$$

445. $\begin{cases}x-y=4,\\y=x^2-5x+5;\end{cases}$ $\begin{cases}y=x-4,\\x-4-x^2+5x-5=0;\end{cases}$

$$\begin{cases}y=x-4,\\-x^2+6x-9=0.\end{cases}\ \begin{cases}y=x-4\\x^2-6x+9=0\end{cases}$$

Решим уравнение $x^2-6x+9=0$;

$D=(-6)^2-4\cdot1\cdot9=0$; $x=\dfrac{6+0}{2}=3$,

$y=3-4=-1$. Решение системы: $(3;-1)$.

446. $\begin{cases} y=2x^2-5x+1, \\ 2x+y+3=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y=2x^2-5x+1, \\ y=-2x-3; \end{cases}$

$\begin{cases} -2x-3-2x^2+5x-1=0, \\ y=-2x-3; \end{cases}$ $\begin{cases} -2x^2+3x-4=0, \\ y=-2x-3. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2-3x+4=0 \\ y=-2x-3 \end{cases}$

Решим уравнение $2x^2-3x+4=0$;
$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot2=-23<0$.
Т.к. $D<0$, то нет корней $\Rightarrow$ кривые не имеют точек пересечения.

447. а) $\begin{cases} x^2+y^2=12, \\ xy=-6; \end{cases}$ $\begin{cases} (-\dfrac{6}{y})^2+y^2=12, \\ x=-\dfrac{6}{y}; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{36}{y^2}+y^2=12, \\ x=-\dfrac{6}{y}; \end{cases}$

$\begin{cases} 36+y^4=12y^2 \\ x=-\dfrac{6}{y} \end{cases}$ $\begin{cases} y^4-12y^2+36=0, \\ x=-\dfrac{6}{y}. \end{cases}$

Решим уравнение $y^4-12y^2+36=0$.
Обозначим $y^2=v \Rightarrow v^2-12v+36=0$;
$D=(-12)^2-4\cdot1\cdot36=0$;

$v=\dfrac{12+0}{2}=6$; $y^2=6 \Rightarrow y_2=\sqrt{6}$; $y_1=-\sqrt{6}$;

$\begin{cases} x_1=\sqrt{6}, \\ y_1=-\sqrt{6}; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=-\sqrt{6}, \\ y_2=\sqrt{6}. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2-y^2=34, \\ xy=20; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2-(\dfrac{20}{x})^2-34=0, \\ y=\dfrac{20}{x}; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2-\dfrac{400}{x^2}-34=0, \\ y=\dfrac{20}{x}; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^4-400-34x^2=0, \\ y=\dfrac{20}{x}. \end{cases}$

Решим уравнение $x^4-17x^2-200=0$.
Обозначим $x^2=v \Rightarrow v^2-17v-200=0$;
$D=(-17)^2-4\cdot1\cdot(-200)=1089$;

$v_2=\dfrac{17+33}{2}=25$ или $v_1=\dfrac{17-33}{2}=-8$;

$x^2 = 25$ или $x^2 = -8$ — нет корней, из первого уравнения получаем: $x_2 = 5$ или $x_1 = -5$.

$\begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = 4; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = -5, \\ y_1 = -4. \end{cases}$

448. а) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 14, \\ x^2 + 2y^2 = 18; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 = 32, \\ x^2 - 2y^2 = 14; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 16 \\ x^2 - 2y^2 = 14 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 4, \\ 4^2 - 2y^2 = 14; \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -4, \\ (-4)^2 - 2y^2 = 14; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ 2y^2 = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -4 \\ 2y^2 = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 4, \\ y^2 = 1; \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -4, \\ y^2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -4, \\ y_1 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = 4, \\ y_4 = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = -4, \\ y_3 = -1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 61, \\ x^2 - y^2 = 11; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 = 72, \\ x^2 - y^2 = 11; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 36, \\ x^2 - y^2 = 11; \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = 6, \\ 36 - y^2 = 11; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = -6, \\ 36 - y^2 = 11; \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 6, \\ y_1 = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 6, \\ y_2 = -5; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = -6, \\ y_3 = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -6, \\ y_4 = -5. \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy + x = 56, \\ xy + y = 54; \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy + y = 54; \end{cases}$ $\begin{cases} x = y + 2, \\ (y+2)y + y - 54 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x = y + 2, \\ y^2 + 2y + y - 54 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = y + 2, \\ y^2 + 3y - 54 = 0. \end{cases}$

Решим уравнение $y^2 + 3y - 54 = 0$;

$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-54) = 225$;

$y_2 = \dfrac{-3+15}{2} = 6$ или $y_1 = \dfrac{-3-15}{2} = -9$.

$\begin{cases} x_1 = -7, \\ y_1 = -9; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = 8, \\ y_2 = 6. \end{cases}$

449. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ y = x^2 + 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + (x^2 + 6)^2 - 36 = 0, \\ y = x^2 + 6; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + x^4 + 12x^2 + 36 - 36 = 0 \\ y = x^2 + 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x^4 + 13x^2 = 0, \\ y = x^2 + 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2(x^2 + 13) = 0, \\ y = x^2 + 6; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0, \\ y = 6. \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 = -13 \\ y = 6 \end{cases}$ – нет решений б) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ (x-2)^2+y^2=36; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ (x-2)^2-x^2=20; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x^2-4x+4-x^2=20 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ 4x=-16; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} 16+y^2=16 \\ x=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ x=-4 \end{cases}$

450. $\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-kx+1=0 \\ y=x^2+1 \end{cases}$

Система имеет единственное решение, когда $D = k^2 - 4 = 0$, т.е. при $k=\pm 2$.

451. $\begin{cases} (x-4)^2+(y-6)^2=25 \\ y=kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2+(y-6)^2=25 \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2+(2x+6)^2=25 \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1;\ y=2 \\ x=5,4;\ y=10,8 \end{cases}$

$x=1; y=2; k=2$

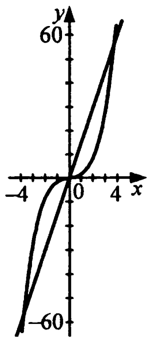
$(x-4)^2+(2x-6)^2=25$

$5x^2-32x+27=0$

$D=32^2-4\cdot 5\cdot 27=22^2;$

$x=\dfrac{32+22}{10}=5,4$ и $x=\dfrac{32-22}{10}=1$.

452. а) $\begin{cases} y=x^3, \\ y=15x; \end{cases}$

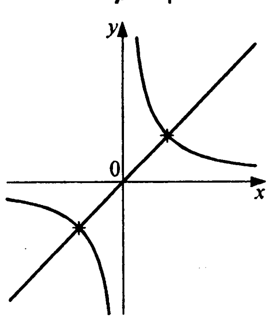


1) График функции $y=x^3$ – кубическая парабола, расположенная в I и III ч.

2) График функции $y=15x$ – прямая, проходящая через начало координат.

3 решения.

б) $\begin{cases} xy=10, \\ y=x; \end{cases}$ $\begin{cases} y=\dfrac{10}{x}, \\ y=x; \end{cases}$

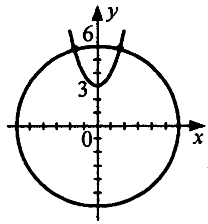


1) График функции $y=\dfrac{10}{x}$ – гипербола, у которой ветви расположены в I и III ч.

2) График функции $y=x$ – прямая (биссектриса I и III ч.).

2 решения.

в) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ y=x^2+3; \end{cases}$



1) График уравнения $x^2+y^2=36$ — окружность с центром в (0; 0) и радиусом 6.

2) График функции $y=x^2+3$ – парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

3) Найдем координаты вершины:

$$x_B=-\frac{b}{2a}=-\frac{0}{2\cdot 1}=0;\ y_в=3;\ (0;\ 3)$$

2 решения.

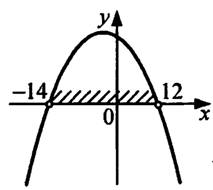
453. а) $0{,}2x(x-1)-x(0{,}2x+0{,}5)<0{,}6x-4;$

$0{,}2x^2-0{,}2x-0{,}2x^2-0{,}5x-0{,}6x+4<0;\ -1{,}3x<-4;\ x>3\frac{1}{13}.$

б) $1{,}2x(3-x)+0{,}4x(3x-1)<x+1{,}1;$

$3{,}6x-1{,}2x^2+1{,}2x^2-0{,}4x-x-1{,}1<0;\ 2{,}2x<1{,}1;\ x<\frac{1}{2}.$

454. а) $-x^2-2x+168>0.$



1) График функции $y=-x^2-2x+168$ – парабола, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).

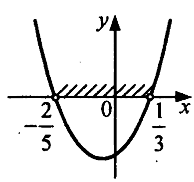
2) Решим уравнение $x^2+2x-168=0;$

$D=2^2-4\cdot 1\cdot(-168)=676;$

$$x_1=\frac{-2+26}{2}=12;\ x_2=\frac{-2-26}{2}=-14.$$

3) $(-14;12).$

б) $15x^2+x-2<0.$



1) График функции $y=15x^2+x-2$ – парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).

2) Решим уравнение $15x^2+x-2=0;$

$D=1^2-4\cdot 15\cdot(-2)=121;$

$$x_1=\frac{-1+11}{30}=\frac{1}{3};\ x_2=\frac{-1-11}{30}=-\frac{2}{5}.$$

3) $\left(-\frac{2}{5};\frac{1}{3}\right)$

в) $\frac{x+14}{3-2x}<0;\ \frac{x+14}{x-1{,}5}>0;$

$(-\infty;\ -14)\cup(1{,}5;\ \infty)$

г) $\frac{6-5x}{x+25}>0;\ \frac{x-1{,}2}{x+25}<0;$

$(-25;\ 1{,}2)$

455. Пусть первое число равно x, а второе — y, из условия $x + y = 12$ и $xy = 35$. Получим систему:

$$\begin{cases} x+y=12, \\ xy=35; \end{cases} \begin{cases} y=12-x, \\ x(12-x)=35; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=12-x, \\ 12x-x^2-35=0; \end{cases} \begin{cases} y=12-x \\ x^2-12x+35=0 \end{cases}$$

Решим уравнение: $x^2-12x+35=0$;

$D=(-12)^2-4\cdot 1\cdot 35=4$;

$$x_2=\frac{12+2}{2}=7\ ;\ x_1=\frac{12-2}{2}=5.$$

$$\begin{cases} x_2=7, \\ y_2=5; \end{cases} \text{или} \begin{cases} x_1=5, \\ y_1=7. \end{cases}$$

Ответ: 5 и 7.

456. Пусть меньшее из чисел равно x, тогда большее равно $(x + 7)$. По условию $x(x + 7) = -12$. Получим уравнение:

$x^2 + 7x + 12 = 0$;

$D = 7^2-4\cdot 1\cdot 12 = 1$;

$$x_1=\frac{-7+1}{2}=-3\ ;\ x_2=\frac{-7-1}{2}=-4.$$

При $x = -3$, $x + 7 = -3 + 7 = 4$; при $x = -4$, $x + 7 = -4 + 7 = 3$.

Ответ: 3 и –4 или 4 и –3.

457. Обозначим стороны прямоугольника a см и b см.

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = 100$ и по условию $2a + 2b = 28$. Получим систему:

$$\begin{cases} a^2+b^2=100, \\ 2a+2b=28; \end{cases} \begin{cases} a^2+b^2=100, \\ a+b=14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=14-b. \\ (14-b)^2+b^2=100; \end{cases} \begin{cases} a=14-b, \\ 196-28b+b^2+b^2-100=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=14-b, \\ 2b^2-28b+96=0 \end{cases} \begin{cases} a=14-b \\ b^2-14b+48=0 \end{cases}$$

Решим уравнение: $b^2-14b+48=0$;

$D=(-14)^2-4\cdot 1\cdot 48=4$;

$$b_2=\frac{14+2}{2}=8\ ;\ b_1=\frac{14-2}{2}=6.$$

$$\begin{cases} b_2=8, \\ a_2=6; \end{cases} \text{или} \begin{cases} b_1=6, \\ a_1=8. \end{cases}$$

Ответ: 6 см и 8см.

458. Обозначим длину первой стороны прямоугольника x см, а второй — y см, тогда $x + 14 = y$. По теореме Пифагора $x^2 + y^2 = 26^2 = 676$.
Составим систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2=676, \\ x+14=y; \end{cases} \begin{cases} x^2+(x+14)^2=676, \\ x+14=y; \end{cases} \begin{cases} x^2+x^2+28x+196-676=0, \\ y=x+14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+28x-480=0, \\ y=x+14. \end{cases} \begin{cases} x^2+14x-240=0 \\ y=x+14 \end{cases}$$

Решим уравнение: $x^2 + 14x–240 = 0$;
$D = 14^2–4·1·(–240) = 1156$;

; $x_2=\dfrac{-14-34}{2}=-24$ — не подходит по смыслу задачи. $\begin{cases} x=10, \\ y=24. \end{cases}$

Ответ: 10 см; 24см.

459. Пусть длина участка равна x м, а ширина — y м. Длина изгороди равна периметру участка: $2x+2y=200$. Площадь участка — $xy = 2400$. Имеем систему:

$$\begin{cases} 2x+2y=200, \\ xy=2400; \end{cases} \begin{cases} x+y=100, \\ xy=2400; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=100-y \\ (100-y)y-2400=0; \end{cases} \begin{cases} x=100-y, \\ 100y-y^2-2400=0. \end{cases}$$

Решим уравнение $y^2-100y+2400=0$;

$D=(-100)^2-4\cdot1\cdot2400=400$;

$y_1=\dfrac{100+20}{2}=60$; $y_2=\dfrac{100-20}{2}=40$.

$\begin{cases} x_1=40, \\ y_1=60; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=60, \\ y_2=40. \end{cases}$

Ответ: 60 м и 40 м.

460. Обозначим длины катетов a см и b см.
По теореме Пифагора $a^2+b^2=37^2=1369$
Периметр треугольника $a+b+37=84$. Имеем систему:

$$\begin{cases} a^2+b^2=1369, \\ a+b+37=84; \end{cases} \begin{cases} a^2+b^2=1369, \\ a+b=47; \end{cases} \begin{cases} a^2+b^2-1369=0 \\ a=47-b \end{cases}$$

$$\begin{cases} (47-b)^2+b^2-1369=0, \\ a=47-b. \end{cases} \begin{cases} 2b^2-94b+840=0, \\ a=47-b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2-47b+420=0 \\ a=47-b \end{cases}$$

Решим уравнение $b^2–47b + 420 = 0$; $D=(-47)^2-4\cdot1\cdot420=529$;

$\sqrt{D}=\pm23$; $b_1=\dfrac{47+23}{2}=35$; $b_2=\dfrac{47-23}{2}=12$.

$$\begin{cases}b_1=35,\\a_1=12;\end{cases}\text{ или }\begin{cases}b_2=12,\\a_2=35.\end{cases}$$

$S_\Delta=\dfrac{1}{2}\cdot35\cdot12=210$ см^2.

461. Обозначим скорость первого отряда x км/ч, а второго y км/ч. Тогда первый отряд прошел $4x$ км, а второй $4y$ км.
По теореме Пифагора $(4y)^2 + (4x)^2 = 24^2$, по условию, $4x - 4,8 = 4y$. Получим систему:

$$\begin{cases}4x-4,8=4y,\\(4y)^2+(4x)^2=24^2;\end{cases}\begin{cases}x-1,2=y,\\16(x-1,2)^2+16x^2-576=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-1,2=y,\\(x-1,2)^2+x^2-36=0;\end{cases}\begin{cases}x-1,2=y,\\x^2-2,4x+1,44+x^2-36=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-1,2=y\\x^2-1,2x-17,28=0\end{cases}$$

Решим уравнение: $x^2–1,2x–17,28 = 0$;
$D = 1,44–4\cdot(–17,28) = 70,56$;

$x_1=\dfrac{1,2+8,4}{2}=4,8$ или $x_2=\dfrac{1,2-8,4}{2}=-3,6$ — не подходит по смыслу задачи.

$$\begin{cases}x=4,8,\\y=4,8-1,2=3,6.\end{cases}$$

Ответ: 4,8 км/ч и 3,6 км/ч.

462. Обозначим скорость первого тела через x м/с, а второго — через y м/с. Тогда первое тело за 6 с проходит $6x$ м, а второе тело за 8 с проходит $8y$ м. По условию $6x = 8y$. За 15 с первое проходит путь $15x$ м, а второе тело — $15y$ м. По теореме Пифагора $(15x)^2+(15y)^2=9$. Имеем систему:

$$\begin{cases}6x=8y,\\225x^2+225y^2=9;\end{cases}\begin{cases}x=\dfrac{4}{3}y,\\25\dfrac{16}{9}y^2+25y^2=1;\end{cases}\begin{cases}x=\dfrac{4}{3}y,\\y^2=\dfrac{9}{625};\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=\dfrac{3}{25},\\x=\dfrac{4}{25};\end{cases}\text{ или } y=-\frac{3}{25}\text{ — не подходит по смыслу задачи.}$$

Ответ: 0,12 м/с и 0,16 м/с.

463. Обозначим длины сторон прямоугольника через a см и b см. Тогда площади квадратов, построенных на сторонах прямоугольника, соответственно равны a^2 см^2 и b^2 см^2. По условию $2a^2 + 2b^2 = 122$. Площадь прямоугольника равна $ab = 30$. Получим систему:

$$\begin{cases} 2a^2+2b^2=122, \\ ab=30; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+b^2=61, \\ a=\dfrac{30}{b}; \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\dfrac{30}{b}\right)^2+b^2=61, \\ a=\dfrac{30}{b}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{900}{b^2}+b^2=61, \\ a=\dfrac{30}{b}; \end{cases} \quad \begin{cases} 900+b^4-61b^2=0, \\ a=\dfrac{30}{b}; \end{cases}$$

Решим уравнение $b^4-61b^2+900=0$.

Обозначим $b^2=t$, тогда $t^2-61t+900=0$;

$D=(-61)^2-4\cdot1\cdot900=121;$

$t_1=\dfrac{61+11}{2}=36$ или $t_2=\dfrac{61-11}{2}=25$, тогда $b^2=36$ или $b^2=25$.

$b=6\sigma$ или $b=-6$ (не подходит по смыслу задачи); $b=5$ или $b=-5$ (не подходит по смыслу задачи),

$$\begin{cases} a=5, \\ b=6; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a=6, \\ b=5. \end{cases}$$

Ответ: 5 см и 6 см.

464. Обозначим длины катетов треугольника — a см и b см. По условию $S_\Delta=\dfrac{1}{2}ab=24$. По теореме Пифагора $a^2+b^2=100$. Запишем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}ab=24, \\ a^2+b^2=100; \end{cases} \quad \begin{cases} ab=48, \\ a^2+b^2=100; \end{cases} \quad \begin{cases} a=\dfrac{48}{b}, \\ \left(\dfrac{48}{b}\right)^2+b^2=100; \end{cases} \quad \begin{cases} a=\dfrac{48}{b}, \\ 2304+b^4-100b^2=0. \end{cases}$$

Обозначим $b^2=t$. Решим уравнение $t^2-100t+2304=0$.

$D=(-100)^2-4\cdot1\cdot2304=784.$

$t=\dfrac{100+28}{2}=64$ или $t=\dfrac{100-28}{2}=36$; $b^2=64$ или $b^2=36$. $b=8$ или $b=-8$ (не подходит по смыслу задачи); $b=6$ или $b=-6$ (не подходит по смыслу задачи).

$$\begin{cases} b=8, \\ a=6; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b=6, \\ a=8. \end{cases}$$

Ответ: 6 см и 8 см.

465. Обозначим длины катетов треугольника — a см и b см.
По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = 13^2 = 169$. Если первый катет увеличить на 4 см, то его длина станет $(a + 4)$ см, а длина гипотенузы будет равна $13 + 2 = 15$ см.
По теореме Пифагора $(a + 4)^2 + b^2 = 225$. Получим систему:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 169, \\ (a+4)^2 + b^2 = 225; \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 = 169 - a^2, \\ (a+4)^2 + 169 - a^2 = 225; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = 169 - a^2, \\ a^2 + 8a + 16 + 169 - a^2 = 225; \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 = 169 - a^2, \\ 8a = 40; \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 = 169 - 5^2, \\ a = 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 12, \\ a = 5; \end{cases}$$

($b = -12$ — не подходит по смыслу).
Ответ: 5 см и 12 см.

466. Обозначим время работы первого экскаватора за x ч, а второго — за y ч. По условию $x + 4 = y$.

Первый экскаватор, работая отдельно, выполнит за 1 час $\frac{1}{x}$ часть всей работы, а второй — $\frac{1}{y}$ часть всей работы.

Работая вместе, за 1 ч они выполняют $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ часть всей работы, а за 3 ч 45 мин $= \frac{15}{4}$ ч они выполнят всю работу, т.е. $\frac{15}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$.

Запишем систему:

$$\begin{cases} x + 4 = y, \\ \frac{15}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 4 = y, \\ 15\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}\right) = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 4 = y \\ \dfrac{15(x+4) + 15x - 4x(x+4)}{x(x+4)} = 0 \end{cases}$$

Решим уравнение $15x + 60 + 15x - 4x^2 - 16x = 0$;
$2x^2 - 7x - 30 = 0$;
$D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-30) = 289$;

$x_1 = \frac{7+17}{4} = 6$; $x_2 = \frac{7-17}{4} = -\frac{5}{2}$ (не подходит по смыслу задачи).

$$\begin{cases} x = 6, \\ y = 10. \end{cases}$$

Ответ: 6 ч и 10 ч.

467. Пусть первый комбайнер, работая отдельно, выполнит работу за x ч, а второй — за y ч.

Тогда $x + 24 = y$. За 1 ч, работая отдельно, первый комбайнер уберет $\frac{1}{x}$ часть поля, а второй — $\frac{1}{y}$ часть поля. Работая совместно два комбайнера уберут все поле за 35 ч, т.е. $35\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$. Получим систему:

$$\begin{cases} x+24=y, \\ \frac{35}{x}+\frac{35}{y}=1; \end{cases} \quad \begin{cases} y=x+24, \\ \frac{35}{x}+\frac{35}{x+24}-1=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x+24 \\ \frac{35(x+24)+35x-x(x+24)}{x(x+24)}=0 \end{cases}$$

Решим уравнение $35x + 840 + 35x-x^2 - 24x = 0$; $x^2-46x-840 = 0$;
$D = (-46)^2-4\cdot 1\cdot(-840) = 5476$;

$x_1=\frac{46+74}{2}=60$ или $x_2=\frac{46-74}{2}=-14$ (не подходит по смыслу задачи),

$$\begin{cases} x=60, \\ y=84. \end{cases}$$

Ответ: 60 ч и 84 ч.

468. Обозначим время, за которое первая бригада заасфальтирует участок дороги за x ч, а вторая — за y ч. По условию $x - 4 = y$.

За 1 час, работая отдельно, первая бригада заасфальтирует $\frac{1}{x}$ часть участка дороги, а вторая бригада — $\frac{1}{y}$ часть участка. Работая вместе, за 1 час обе бригады заасфальтируют $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ часть всего участка. Работая вместе 24 часа, они заасфальтируют 5 участков, т.е. $24\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=5$. Получим систему:

$$\begin{cases} x-4=y, \\ 24\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=5; \end{cases} \quad \begin{cases} x-4=y, \\ 24\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}\right)-5=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-4=y \\ \frac{24(x-4)+24x-5x(x-4)}{x(x-4)}=0 \end{cases}$$

Решим уравнение $\frac{24(x-4)+24x-5x(x-4)}{x(x-4)}=0.$

$24x–96 + 24x–5x^2 + 20x = 0;$

$5x^2–68x + 96 = 0;$

$D = (–68)^2–4·5·96 = 2704;$ $\sqrt{D}=\pm 52$;

$x_1=\frac{68+52}{10}=12$ или $x_2=\frac{68-52}{10}=1,6$.

$\begin{cases} y=8, \\ x=12. \end{cases}$ или $\begin{cases} y=-2,4, \\ x=1,6; \end{cases}$ — не подходит по смыслу задачи;

Ответ: 8 ч и 12 ч.

469. $\begin{cases} p\cdot S=400 \\ S(1+p)^2=5832 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=\frac{400}{p} \\ 50(1+p)^2=729p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=\frac{400}{p} \\ 50p^2-629p+50=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S=5000 \\ p=0,08 \end{cases}$

$D=629^2-4\cdot 50\cdot 50=621^2$; $p_1=\frac{629+621}{100}=1,25$ и $p_2 = 0,08$

Ответ: S = 5000р и р = 8%.

470. $\frac{28}{S-1}=\frac{30}{S}-1$; $S(S-1)+30(S-1)=28S$; $S^2+S-30=0$; $S = 5$ дм^2

Ответ: 5 дм^2.

471. Обозначим массу детали старого типа x кг, а детали нового типа — y кг. По условию $x = y + 0,2$. Из 22 кг металла получится $\frac{22}{y}$ деталей нового типа, а из 24 кг металла получится $\frac{24}{x}$ деталей старого типа. По условию $2+\frac{24}{x}=\frac{22}{y}$. Получим систему:

$\begin{cases} 2+\frac{24}{x}=\frac{22}{y} \\ x=y+0,2; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{24}{y+0,2}+2-\frac{22}{y}=0, \\ x=y+0,2. \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{24y+2y(y+0,2)-22(y+0,2)}{y(y+0,2)}=0 \\ x=y+0,2 \end{cases}$

Решим уравнение: $\frac{24y+2y(y+0,2)-22(y+0,2)}{y(y+0,2)}=0.$

$y^2 + 1{,}2y - 2{,}2 = 0;$

$D = 1{,}44 - 4\cdot(-2{,}2) = 10{,}24;$

$y_1 = \dfrac{-1{,}2 + 3{,}2}{2} = 1$; $y_2 = \dfrac{-1{,}2 - 3{,}2}{2} = -2{,}2$ (не подходит по смыслу задачи).

$$\begin{cases} y = 1, \\ x = 1 + 0{,}2 = 1{,}2. \end{cases}$$

Ответ: 1 кг и 1,2 кг.

472. Обозначим скорость первого пешехода — x км/ч, а скорость второго — y км/ч. За 4 часа первый пешеход пройдет $4x$ км, а второй — $4y$ км. Расстояние между ними составит 4 км. Получим уравнение $4x + 4y + 4 = 40$, т.е. $x + y = 9$. За 1 час первый пешеход прошел x км, после чего ему до встречи осталось пройти $(20-x)$ км. Эту часть пути он пройдет за время $\left(\dfrac{20-x}{x}\right)$ ч, что равно времени, за которое пройдет половину пути второй пешеход, т.е. $\dfrac{20-x}{x} = \dfrac{20}{y}$. Получим систему:

$$\begin{cases} x + y = 9; \\ \dfrac{20-x}{x} = \dfrac{20}{y}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 9 - x; \\ \dfrac{20-x}{x} - \dfrac{20}{9-x} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 9 - x \\ \dfrac{(20-x)(9-x) - 20x}{x(9-x)} = 0 \end{cases}$$

Решим уравнение $\dfrac{(20-x)(9-x) - 20x}{x(9-x)} = 0$. $x^2 - 49x + 180 = 0;$

$D = (-49)^2 - 4\cdot1\cdot180 = 1681;$

$x = \dfrac{49+41}{2} = 45$ или $x = \dfrac{49-41}{2} = 4.$

$\begin{cases} y = -36 \\ x = 45 \end{cases}$ — не подходит по смыслу задачи; или $\begin{cases} x = 4, \\ y = 5; \end{cases}$

Ответ: 4 км/ч и 5 км/ч.

473. Обозначим скорость первого туриста x км/ч, а второго — y км/ч. Тогда $x = y + 1$. Первый турист пройдет путь из M в N за $\dfrac{18}{x}$ ч, а второй за $\dfrac{18}{y}$ ч. По условию, второй турист пришел в N на 54 мин $= \dfrac{9}{10}$ ч позже первого. т.е. $\dfrac{18}{x} + \dfrac{9}{10} = \dfrac{18}{y}$. Получим систему:

$$\begin{cases} x = y + 1, \\ \dfrac{18}{x} + \dfrac{9}{10} = \dfrac{18}{y}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y + 1, \\ \dfrac{18}{y+1} + \dfrac{9}{10} - \dfrac{18}{y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y + 1 \\ \dfrac{180y + 9y(y+1) - 180(y+1)}{10y(y+1)} = 0 \end{cases}$$

Решим уравнение:

$$\frac{180y+9y(y+1)-180(y+1)}{10y(y+1)}=0.$$

$180y + 9y^2 + 9y-180y-180 = 0;$
$y^2 + y-20 = 0;$
$D = 1^2-4\cdot 1\cdot(-20) = 81;$

$y_1=\frac{-1+9}{2}=4$; $y_2=\frac{-1-9}{2}=-5$ (не подходит по смыслу задачи).

$$\begin{cases} x=5, \\ y=4. \end{cases}$$

Ответ: 4 км/ч и 5 км/ч.

474. Обозначим скорость мотоциклиста из M x км/ч, а скорость мотоциклиста из N y км/ч.

По условию, они встретились через 30 мин = $\frac{1}{2}$ ч, значит, проехали вместе весь путь от M до N: $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=50$, т.е. $x + y = 100$.

Мотоциклист из M проедет путь из M в N за $\frac{50}{x}$ ч, а мотоциклист из N проедет путь из N в M за $\frac{50}{y}$ ч. По условию $\frac{50}{y}+\frac{25}{60}=\frac{50}{x}$, т.е. $\frac{2}{y}+\frac{1}{60}=\frac{2}{x}$.

Получим систему:

$$\begin{cases} x+y=100, \\ \frac{2}{y}+\frac{1}{60}=\frac{2}{x}; \end{cases} \begin{cases} x=100-y, \\ \frac{2}{y}+\frac{1}{60}-\frac{2}{100-y}=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=100-y \\ \frac{120(100-y)+y(100-y)-120y=0}{60y(100-y)}=0 \end{cases}$$

Решим уравнение:
$12000-120y + 100y-y^2-120y = 0;$
$y^2 + 140y-12000 = 0;$
$D = 19600-4(-12000) = 67600;$

$y_1=\frac{-140+260}{2}=60$; $y_2=\frac{-140-260}{2}=-200$ (не подходит по смыслу задачи).

$$\begin{cases} y=60, \\ x=40. \end{cases}$$

Ответ: 40 км/ч и 60 км/ч.

475. $\begin{cases} p_1 = p_2 - 0,2 \\ \dfrac{12+14}{\dfrac{12}{p_1} + \dfrac{14}{p_2}} = 1,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = p_2 - 0,2 \\ 26p_1p_2 = 1,3(12p_2 + 14p_1) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = p_2 - 0,2 \\ 26p_2^2 - 39p_2 + 3,64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = p_2 - 0,2 \\ p_2^2 - 1,5p_2 + 0,14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 1,2 \\ p_2 = 1,4 \end{cases}$

$D = 1,5^2 - 4 \cdot 0,14 = 1,3^2$;

$p_2 = \dfrac{1,5+1,3}{2} = 1,4$ и $p_2 = \dfrac{1,5-1,3}{2} = 0,1$

Ответ: 1,2 г/см^3 и 1,4 г/см^3.

476. $\begin{cases} \dfrac{356}{v_0} = \dfrac{438}{v_m} + 1,6 \\ v_0 = v_m - 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0 = v_m - 20 \\ 1,6v_m^2 + 50v_m - 8760 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0 = 40 \\ v_m = 60 \end{cases}$

$D = 50^2 + 4 \cdot 1,6 \cdot 8760 = 242^2$;

$v_m = \dfrac{-50+242}{3,2} = 60$

Ответ: $v_0 = 40$ см^3 и $v_m = 60$ см^3.

477. $\dfrac{50}{Q+150} = \dfrac{50}{Q} - 0,075$

$0,075Q^2 + 11,25Q - 7500 = 0$

$D = 11,25^2 + 4 \cdot 0,075 \cdot 7500 = 48,75^2$;

$Q = \dfrac{-11,25+48,75}{0,15} = 250$

Раствор содержит $Q - 50 = 200$ г воды и его концентрация была равна $\dfrac{50}{Q} = 0,2$.

Ответ: 200 г и 20%.

478. а) I и II; б) III.

479. а) $\begin{cases} y = -3x - 4, \\ x^2 - (-3x-4)^2 - 2 = 0; \end{cases} \begin{cases} y = -3x - 4, \\ x^2 - 9x^2 - 24x - 16 - 2 = 0. \end{cases}$

Решим уравнение $4x^2 + 12x + 9 = 0$;

$D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$;

$x = \dfrac{-12+0}{8} = -1,5.$ $\begin{cases} x = -1,5, \\ y = 0,5. \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = -3x + 2, \\ x^2 - x(-3x+2) - 3,36 = 0; \end{cases} \begin{cases} y = -3x + 2, \\ x^2 + 3x^2 - 2x - 3,36 = 0; \end{cases}$

Решим уравнение $2x^2 - x - 1{,}68 = 0$;

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1{,}68) = 14{,}44$;

$x_1 = \dfrac{1+3{,}8}{4} = 1{,}2$; $x_2 = \dfrac{1-3{,}8}{4} = -0{,}7$.

$\begin{cases} x_1 = 1{,}2, \\ y_1 = -1{,}6; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = -0{,}7, \\ y_2 = 4{,}1. \end{cases}$

480. а) $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 3; \\ 2x - y - 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 3; \\ 2x - \left(x^2 - 3x + 3\right) - 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 3; \\ -x^2 + 5x - 4 = 0; \end{cases}$

Решим уравнение $x^2 - 5x + 4 = 0$;

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$;

$x_1 = \dfrac{5+3}{2} = 4w$; $x_2 = \dfrac{5-3}{2} = 1$. $\begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 7; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x + y = 14; \end{cases}$ $\begin{cases} (14-y)^2 + y^2 - 100 = 0, \\ x = 14 - y; \end{cases}$

$\begin{cases} 196 - 28y + y^2 + y^2 - 100 = 0, \\ x = 14 - y; \end{cases}$ $\begin{cases} 2y^2 - 28y + 96 = 0, \\ x = 14 - y. \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 - 14y + 48 = 0 \\ x = 14 - y \end{cases}$

Решим уравнение $y^2 - 14y + 48 = 0$;

$D = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 48 = 4$;

$y_1 = \dfrac{14+2}{2} = 8$ или $y_2 = \dfrac{14-2}{2} = 6$.

$\begin{cases} y_2 = 8, \\ x_2 = 6; \end{cases}$ или $\begin{cases} y_1 = 6, \\ x_1 = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 8, \\ y_1 = 6; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = 6, \\ y_2 = 8. \end{cases}$

481. а) $x(x-6) < 0$; 

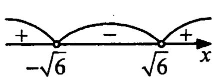
$(0;\ 6)$;

б) $x(8+x) \geq 0$; 

$(-\infty;\ -8] \cup [0;\ +\infty)$;

в) $x^2 - 4 \leq 0$; $(x-2)(x+2) \leq 0$; 

$[-2;\ 2]$;

г) $x^2 - 6 > 0$; $(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) > 0$; 

$(-\infty;\ -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6};\ +\infty)$

§ 8. Неравенства с двумя переменными и их системы

482. а) $2\cdot(-2)\cdot3\cdot3+16=3>0\Rightarrow$ да

б) $(-2)^2+3\cdot(-2)\cdot3-3^2=-23<20\Rightarrow$ да

в) $(-2+3)^2+(3-4)^2=2\Rightarrow$ нет.

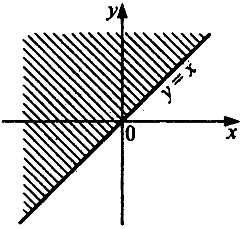
483. а) (0; 0), (1; 0)

б) (2; 0), (3; 1)

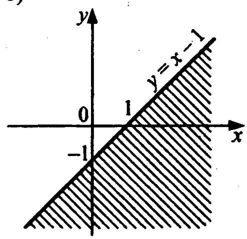
в) (0; –1), (1; 0)

г) (0; 0), (1; 1)

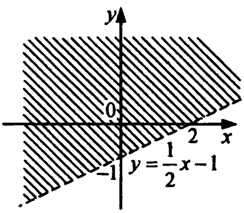
484. а)



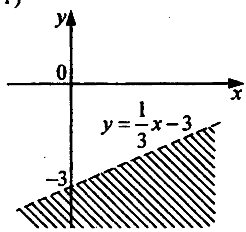
б)



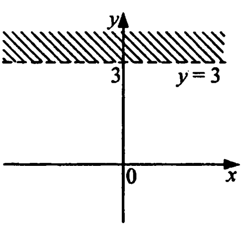
в)



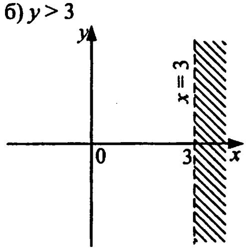
г)



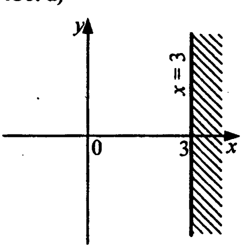
485. а) $y>3$



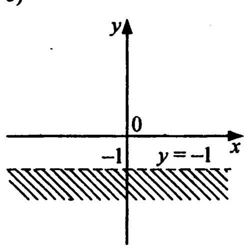
б) $y>3$



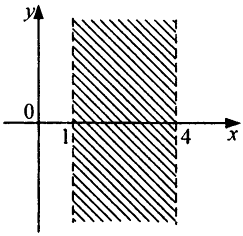
486. а)



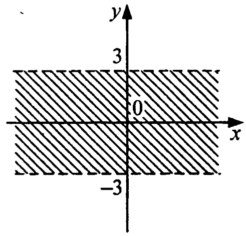
б)



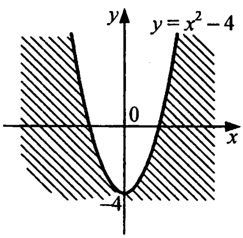
в)



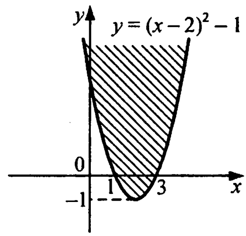
г)



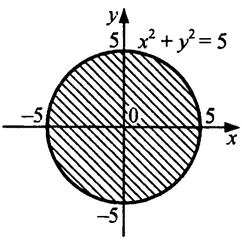
487. а)



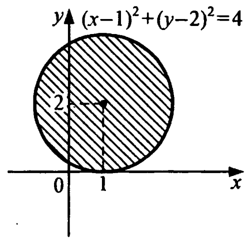
б)



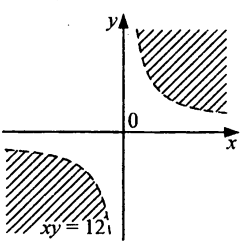
в)



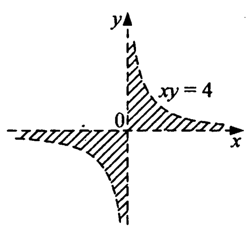
г)



488. а)



б)



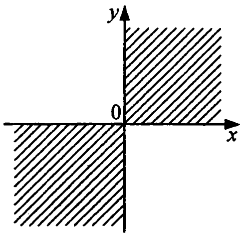
489. а) точка (3; 2).

б) Множество точек, принадлежащих параболе $y = (x-2)^2 + 1$, и точек, расположенных ниже ее.

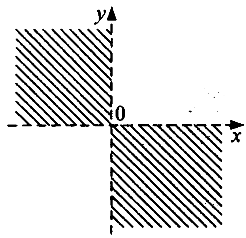
490. а) $(x-2)^2 + y^2 \le 9$ б) $x^2 + (y-4)^2 > 4$

491. а) $y > x^2 - 9$ б) $y < (x+2)^2$

492. а) $x \cdot y \geq 0$

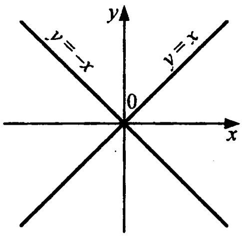


б) $x \cdot y < 0$

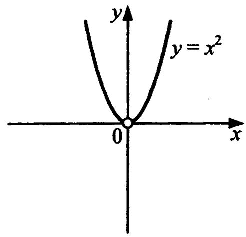


493. а) $x^2 - y^2 = 0$;

$(x-y)(x+y) = 0$



б) $\dfrac{x^2 - y}{x} = 0$; $y = x^2$, $x \neq 0$



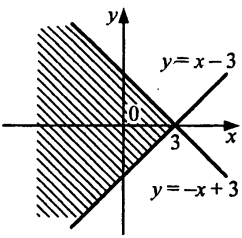
494. $\dfrac{x-1}{x+2} - \dfrac{1-x}{x^2+3x+2} = \dfrac{x-1}{x+2}\left(1 + \dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{x-1}{x+1}$

495. $\begin{cases} 5x - y - 2 = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x - 2 \\ (y-x)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 5x - 2 \\ y = x + 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 5x - 2 \\ y = x - 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \end{array}\right.$

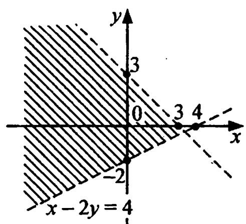
Ответ: (1; 3) и (0; –2).

496. а) нет; б) нет; в) нет; г) да.

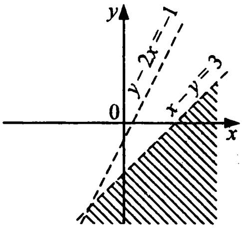
497. а) $\begin{cases} y \geq x - 3 \\ y \leq -x + 3 \end{cases}$



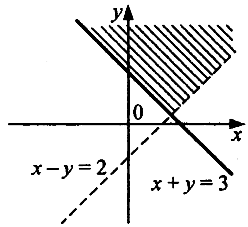
б) $\begin{cases} x - 2y < 4 \\ x + y < 3 \end{cases}$



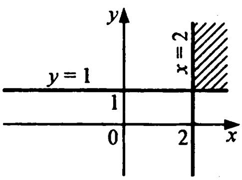
в) $\begin{cases} -2x + y < -1 \\ x - y > 3 \end{cases}$



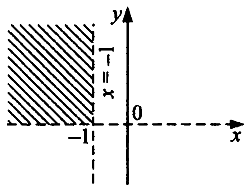
г) $\begin{cases} x + y \geq 3 \\ x - y < 2 \end{cases}$



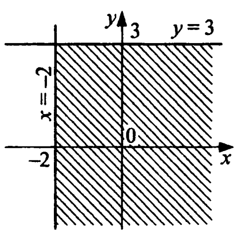
498. а) $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$



б) $\begin{cases} x < -1 \\ y > 0 \end{cases}$



в) $\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ y - 3 \leq 0 \end{cases}$

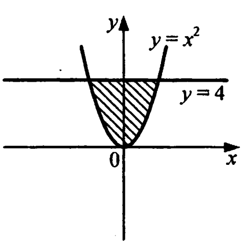


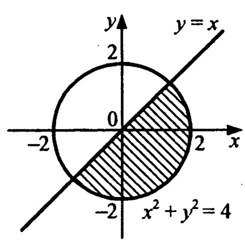
499. а) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

500. а) $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 4 \end{cases}$

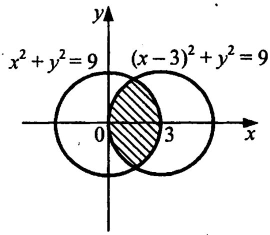
б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$

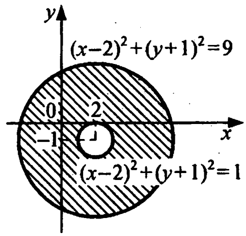




в) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ (x-3)^2 + y^2 \le 9 \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 \ge 1 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 \le 9 \end{cases}$





501. а) Прямоугольный треугольник ABC; $AB = 5$ и $h = 2{,}5$;
$S = \frac{1}{2} AB \cdot h = 6{,}25$.

б) Прямоугольник $ABCD$; $AB = CD = 2$ и $BC = AD = 6$; $S = AB \cdot BC = 12$.

502. а) $\begin{cases} 3x + 2y \le 6 \\ 2y - 3x \le 6 \\ y \ge 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 25 \\ x^2 + y^2 \le 100 \end{cases}$

503. Прямая, проходящая через точки (0) 0) и (3, 3) задается уравнением $y = x$, а прямая, проходящая через точки (0; –2) и (3; –2) — уравнением $y = -2$. Тогда: $\begin{cases} y \le x \\ y \ge -2 \end{cases}$

504. а) $(x + 2)^2 + 9(x + 2) + 20 = 0$
$\big((x+2)+5\big)\big((x+2)+4\big) = 0$
$(x + 7)(x + 6) = 0$
$x = -6$ и $x = -7$

б) $(x - 5)^2 + 2(x - 5) - 63 = 0$
$\big((x-5)+9\big)\big((x-5)-7\big) = 0$
$(x + 4)(x - 12) = 0$
$x = -4$ и $x = 12$

505. $y = \sqrt{x-5} + \sqrt{15-x}$. ООФ: $\begin{cases} x \ge 5 \\ x \le 15 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \le x \le 15$

506. $6x(x + 8) - (5x - 27)(x + 17) = 6x^2 + 48x - 5x^2 - 58x + 459 =$
$= x^2 - 10x + 459 = (x - 5)^2 + 434 \ge 434 > 0$.

507. а) $\begin{cases} (x-2y)(x+3y) = 0 \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3y \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y \\ y^2 = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3y \\ y^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm 4 \\ y = \pm 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \mp\frac{3\sqrt{6}}{2} \\ y = \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(\pm 4; \pm 2), \left(\mp\frac{3\sqrt{6}}{2}; \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

б) $\begin{cases} x^2-4x+3y^2+2x-6y=0 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y+2)(x-3y)=0 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3y \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases} \\ \begin{cases} y=x+2 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3y \\ y^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=x+2 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(\pm 3; \pm 1), (1; 3)$.

508. а) $\begin{cases} x^2+xy-2y^2-x+y=0 \\ x^2+y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2y-1)(x-y)=0 \\ x^2+y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1-2y \\ x^2+y^2=8 \end{cases} \\ \begin{cases} x=y \\ x^2+y^2=8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1-2y \\ 5y^2-4y-7=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=y \\ y^2=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1+2\sqrt{39}}{5} \\ y=\dfrac{2-\sqrt{39}}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1-2\sqrt{39}}{5} \\ y=\dfrac{2+\sqrt{39}}{5} \end{cases} \\ x=y\pm 2 \end{array}\right.$$

Ответ: $(\pm 2; \pm 2), \left(\dfrac{1\pm 2\sqrt{39}}{5}; \dfrac{2\mp\sqrt{39}}{5}\right)$.

б) $\begin{cases} x^2-6xy+5y^2-x+5y=0 \\ x^2-20y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y-1)(x-5y)=0 \\ x^2-20y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y+1 \\ x^2-20y^2=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=5y \\ x^2-20y^2=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y+1 \\ 19y^2-2y+4=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=5y \\ y^2=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 5 \\ y=\pm 1 \end{cases}$$

Ответ: $(\pm 5; \pm 1)$.

509. а) $\begin{cases} x^2-3xy+14=0 \\ 3x^2+2xy-24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3xy+14=0 \\ 11x^2-44=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=6 \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\pm 3 \end{cases}$

Ответ: $(\pm 2; \pm 3)$.

б) $\begin{cases} 2x^2-6y=xy \\ 3x^2-8y=0,5xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-6y=xy \\ -2y=2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=5y \\ y(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=0,4 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: (0; 0), (–1; 0,4).

510. а) $\begin{cases} x^2+3xy-10y^2=0 \\ x^2-4xy+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5y)(x-2y)=0 \\ x^2-4xy+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-5y \\ x^2-4xy+3y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2y \\ x^2-4xy+3y=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-5y \\ 45y^2+3y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2y \\ 3y-4y^2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=-\dfrac{1}{15} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{3}{4} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (0; 0), $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{15}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

б) $\begin{cases} x^2+xy-6y^2=0 \\ x^2+3xy+2y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3y)(x-2y)=0 \\ x^2+3xy+2y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3y \\ x^2+3xy+2y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2y \\ x^2+3xy+2y=6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3y \\ 2y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2y \\ 5y^2+y-3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-9 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{-1\mp\sqrt{61}}{5} \\ y=\dfrac{-1\mp\sqrt{61}}{10} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (–9; 3), $\left(\frac{-1\mp\sqrt{61}}{5}; \frac{-1\pm\sqrt{61}}{10}\right)$.

511. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12} \\ x^2-y^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-25\left(\dfrac{x}{y}\right)+12=0 \\ x^2-y^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{3} \\ y^2=9 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4} \\ y^2=-9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 4 \\ y=\pm 3 \end{cases}$

Ответ: $(\pm 4;\ \pm 3)$.

б) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 2,1 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 21\left(\frac{x}{y}\right) - 10 = 0 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{2} \\ y^2 = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{2}{5} \\ y^2 = 25 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm 5 \\ y = \pm 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \mp 2 \\ y = \pm 5 \end{cases} \end{array} \right.$

Ответ: $(\pm 5; \pm 2), (\mp 2; \pm 5)$.

512. а) $\begin{cases} x^2 + xy = 6 \\ y^2 + xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ y^2 + xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)(x+y) = 0 \\ y^2 + xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y \\ y^2 + xy = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -y \\ y^2 + xy = 3 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y \\ y^2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -y \\ 0 = 3 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

Ответ: $(\pm 2; \pm 1)$.

б) $\begin{cases} x^2 - xy = 7 \\ y^2 - xy = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \frac{7}{x} \\ x - y = -\frac{9}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \frac{7}{x} \\ \frac{7}{x} = -\frac{9}{y} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{49}{16} \\ y = -\frac{9}{7}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{7}{4} \\ y = \mp\frac{9}{4} \end{cases}$

Ответ: $\left(\pm\frac{7}{4}; \mp\frac{9}{4}\right)$.

513. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 1 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 1 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y + 1 \\ xy = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} x = y - 1 \\ xy = 12 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y + 1 \\ y^2 + y - 12 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = y - 1 \\ y^2 - y - 12 = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm 4 \\ y = \pm 3 \end{cases} \end{array} \right.$

Ответ: $(\pm 3; \pm 4), (\pm 4; \pm 3)$.

б) $\begin{cases} x^2+y^2=26 \\ x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+5=0 \\ y=6-x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: (1; 5), (5; 1).

514. а) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x+xy+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-v=7 \\ u+v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+u-12=0 \\ v=5-u \end{cases} \Leftrightarrow$

$x+y=u;\ x\cdot y=v;$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-4 \\ v=9 \end{cases} \\ \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=-4 \\ x\cdot y=9 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=3 \\ x\cdot y=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: (1; 2), (2; 1).

б) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19 \\ x+xy+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-v=19 \\ u+v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+u-20=0 \\ v=1-u \end{cases} \Leftrightarrow$

$x+y=u;\ x\cdot y=v;$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-5 \\ v=6 \end{cases} \\ \begin{cases} u=4 \\ v=-3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=-5 \\ x\cdot y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=4 \\ x\cdot y=-3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2\pm\sqrt{7} \\ y=2\mp\sqrt{7} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: (–2; –3), (–3; –2), $\left(2\pm\sqrt{7}, 2\mp\sqrt{7}\right)$.

515. а) $\begin{cases} 4x(x+y)+y^2=49 \\ 4x(x-y)+y^2=81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+4xy+y^2=49 \\ 4x^2-4xy+y^2=81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)^2=49 \\ (2x-y)^2=81 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+y=7 \\ 2x-y=\pm9 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+y=-7 \\ 2x-y=\pm9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm4 \\ y=\mp1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm\dfrac{1}{2} \\ y=\mp8 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(\pm4; \mp1), \left(\pm\dfrac{1}{2}; \mp8\right)$.

б) $\begin{cases} 3x(3x-4y)+4y^2=64 \\ 3x(3x+4y)+4y^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2-12xy+4y^2=64 \\ 9x^2+12xy+4y^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2y)^2=64 \\ (3x+2y)^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-2y=8 \\ 3x+2y=\pm 4 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-2y=-8 \\ 3x+2y=\pm 4 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\mp 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm \dfrac{2}{3} \\ y=\mp 3 \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $(\pm 2; \mp 1), \left(\pm\dfrac{2}{3}; \mp 3\right)$.

516. а) $x^2+4xy+4y^2+5=(x+2y)^2+5 \ge 5 > 0$;

б) $x^2-2xy+8+y^2=(x-y)^2+8 \ge 8 > 0$;

в) $x^2-2x+y^2-4y+6=(x-1)^2+(y-2)^2+1 \ge 1 > 0$;

г) $x^2y^2-2xy+3=(xy-1)^2+2 \ge 2 > 0$.

517. а) $x^2+y^2+2x+1=(x+1)^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=-1$ и $y=0$;

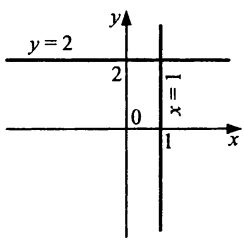
б) $x^2-2x+y^2+4y+5=(x-1)^2+(y+2)^2=0 \Leftrightarrow x=1$ и $y=-2$.

518. а) $(y-x-5)(y-x+5)=0$;

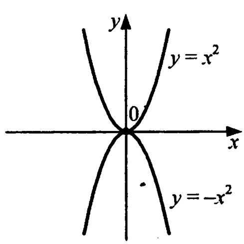
б) $(x^2+y^2-4)(y^2-9)=0$;

в) $(xy-6)(x^2+y^2-1)=0$.

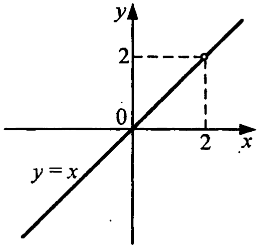
519. а) $x^2+y^2-2x-4y+5=(x-1)^2+(y-2)^2=0 \Leftrightarrow$
$x=1$ и $y=2$



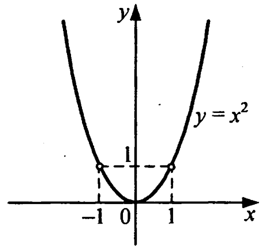
б) $y^2-x^4=(y-x^2)(y+x^2)=0$



520. а) $\dfrac{y-x}{x-2}=0 \Leftrightarrow y=x$ и $x\neq 2$

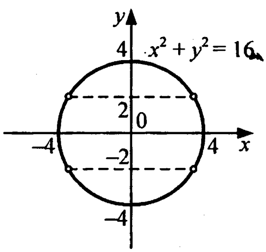


б) $\dfrac{y-x^2}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow y=x^2$ и $x\neq \pm 1$



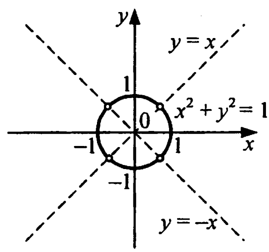
в) $\dfrac{x^2+y^2-16}{y^2-4}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=16$

и $x\neq \pm 2$



г) $\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2-y^2}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$

и $x\neq \pm y$



521. $(x-a)^2+(y-3)^2=16$;

а) $A(2;\ 3)$;

$(2-a)^2=16 \Leftrightarrow a=-2$ и $a=6$

б) $B(7;\ -1)$;

$(7-a)^2+16=16 \Leftrightarrow a=7$

а) $C(-2;\ 7)$;

$(a+2)^2+16=16 \Leftrightarrow a=-2$

г) $D(1;\ 5)$;

$(a-1)^2+4=16 \Leftrightarrow a=1\pm 2\sqrt{3}$

522. а) $x^2-y^2=5 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=\pm 1\\ x+y=\pm 5\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=\pm 5\\ x+y=\pm 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\pm 3\\ y=\pm 2\end{cases}\\ \begin{cases}x=\pm 3\\ y=\mp 2\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ: $(\pm 3;\ \pm 2),\ (\pm 3;\ \mp 2)$.

б) $x^2-y^2=8 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=\pm1 \\ x+y=\pm8 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=\pm2 \\ x+y=\pm4 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=\pm4 \\ x+y=\pm2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=\pm8 \\ x+y=\pm1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm3 \\ y=\pm1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm3 \\ y=\mp1 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(\pm3; \pm1), (\pm3; \mp1)$.

523. а) $\begin{cases} y=-x^2-x, \\ y=x-10. \end{cases}$

1) График функции $y=-x^2-x$ – парабола, у которой ветви направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 отрицателен).

2) Найдем координаты вершины:

$$x_B=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\cdot(-1)}=-\frac{1}{2}; \quad y_B=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4};$$

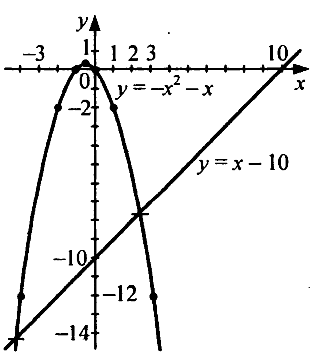
3)

x	–2	–1	0	1	2
y	–2	0	0	–2	–6

4) График функции $y=x-10$ – прямая.

x	0	5
y	–10	–5

Решение системы — (2,3; –7,7); (–4,3; –14,3).



б) 1) Уравнение $(x-2)^2+y^2=9$ задает окружность с центром в (2; 0) и радиусом 3.

2) График функции $y=x^2-4x+4$ – парабола, у которой ветви направлены вверх.

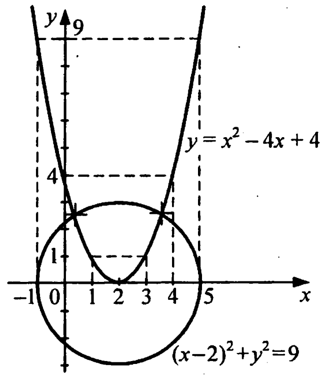
3) Найдем координаты вершины:

$$x_B=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\cdot 1}=2;$$

$$y_B=4-8+4=0;$$

4)

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	16	9	4	1	0	1	4	9



Решение системы — (0,4; 2,5); (3,6; 2,5).

в) 1) Уравнение $x^2+y^2=25$ задает окружность с центром в (0; 0) и радиусом 5.

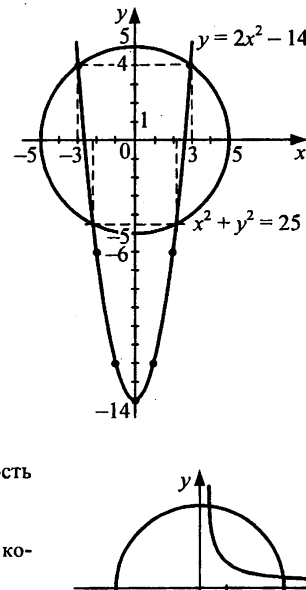
2) График функции $y=2x^2-14$ – парабола, у которой ветви направлены вверх.

3) Найдем координаты вершины:

$$x_B=-\frac{b}{2a}=-\frac{0}{2\cdot 2}=0;\ y_B=-14;$$

4)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	4	−6	−12	−14	−12	−6	4



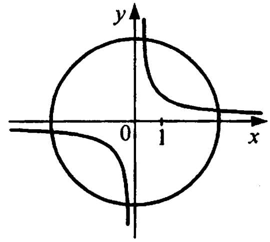
Решение системы — (3; 4); (–3; 4); (2,2; –4,5); (–2,2; –4,5).

г) 1) Уравнение $x^2+y^2=10$ задает окружность с центром в (0; 0) и радиусом $\sqrt{10}$.

2) График функции $y=\dfrac{3}{x}$ – гипербола, у которой ветви расположены в I и III четвертях.

3)

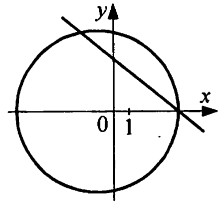
x	−3	−2	−1	1	1,5	2	3
y	−1	−1,5	−3	3	2	1,5	1



Решение системы — (–3; –1); (–1; –3); (1; 3); (3; 1).

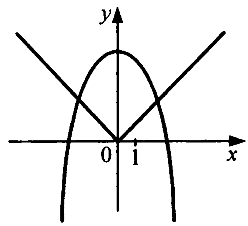
д) 1) График функции $y = 8 - x$ — прямая.

x	0	4
y	8	4



2) Уравнение $(x + 1)^2 + y^2 = 81$ задает окружность с центром в $(-1; 0)$ и радиусом 9.
Решение системы — $(8; 0)$; $(-1; 9)$.

е) 1) График функции $y = -x^2 + 4$ – парабола, у которой ветви направлены вниз.



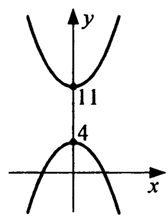
2) Найдем координаты вершины: $x_в = -\dfrac{b}{2a} = 0$;

$y_в = 4$.

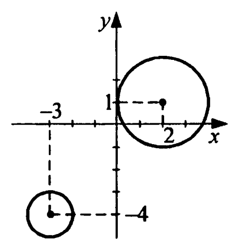
3)

x	−2	−1	0	1	2
y	0	3	4	3	0

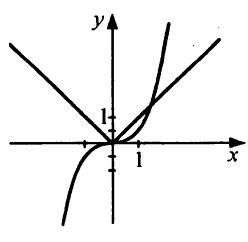
4) Графиком функции $y = |x|$ является объединение биссектрис I и II четвертей.
Решение системы — $(1{,}6; 1{,}6)$; $(-1{,}6; 1{,}6)$.



524. а) Первое уравнение: $y = x^2 + 11$; второе уравнение: $y = -x^2 + 4$. График первой функции получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом вверх на 11 единиц, вторая — из $y = -x^2$ сдвигом вверх на 4 единицы. Т.к. они не пересекаются, то решений нет.

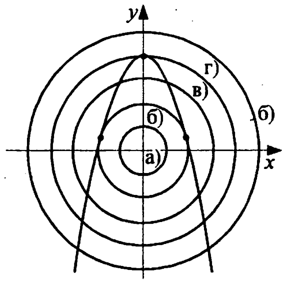


б) Первое уравнение — это уравнение окружности с центром $(-3; -4)$ и радиусом 1; второе — уравнение окружности с центром $(2; 1)$ и радиусом 2. Так как окружности не имеют общих точек, то решений нет.



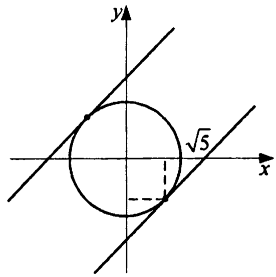
в) Второе уравнение $y = \dfrac{1}{2}x^3$ задает кубическую параболу, первое — две полупрямых: $y = x$ при $x \geq 0$ и $y = -x$ при $x < 0$. Т.к. графики этих функций пересекаются в двух точка, то существуют два решения.

525. Первое уравнение задает окружность с центром (0; 0) и радиусом r. Второе уравнение задает параболу, получающуюся из параболы $y=-x^2$ сдвигом вверх на 4 единицы.



В зависимости от r система может иметь: 0, 2, 4, 3 решений.

526. Графиком первого уравнения является окружность с центром (0, 0) и радиусом $\sqrt{5}$; второго — прямая $y = x-m$, получающуюся из биссектрисы I и III координатных углов сдвигом на $-m$ по вертикали.



а) Система имеет одно решение, когда уравнение $x^2 + (x-m)^2 = 5$ имеет одно решение.

$x^2+x^2-2mx+m^2-5=0;$

$2x^2-2mx+m^2-5=0;$

$D=(-2m)^2-4\cdot 2\left(m^2-5\right).$

Уравнение имеет единственное решение при $D = 0$, т.е.

$4m^2-8\left(m^2-5\right)=0;\ -4m^2+40=0;$

$m^2=\frac{40}{4}=10;\ m=\pm\sqrt{10}.$

б) Система имеет два решения, когда уравнение $x^2 + (x-m)^2 = 5$ имеет два решения.

Т.е. при $D>0$ $D=-4m^2+40>0$, т.е. $m^2<10$, откуда $-\sqrt{10}<m<\sqrt{10}$.

527. а) $\begin{cases} x=-3y-1, \\ (-3y-1)^2+2y(-3y-1)+y-3=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x=-3y-1, \\ 9y^2+6y+1-6y^2-2y+y-3=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3y-1, \\ 3y^2+5y-2=0. \end{cases}$

Решим уравнение $3y^2+5y-2=0$.

$D=5^2-4\cdot 3\cdot(-2)=49;$

$y_2=\frac{-5+7}{6}=\frac{1}{3}$ или $y_1=\frac{-5-7}{6}=-2;$ $\begin{cases} x_1=5, \\ y_1=-2; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=-2, \\ y_2=\frac{1}{3}. \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = 2x - 1, \\ x(2x-1) - (2x-1)^2 + 3x + 1 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2x - 1, \\ 2x^2 - x - 4x^2 + 4x - 1 + 3x + 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x - 1, \\ -2x^2 + 6x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x(x-3) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = -1; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 5. \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = 11 - 2x, \\ 2x + 5(11 - 2x) - (11 - 2x)^2 - 6 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 11 - 2x, \\ 2x + 55 - 10x - 121 + 44x - 4x^2 - 6 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 11 - 2x, \\ -4x^2 + 36x - 72 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 11 - 2x \\ x^2 - 9x + 18 = 0 \end{cases}$

Решим уравнение $x^2 - 9x + 18 = 0$;

$D = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 9$;

$x_2 = \dfrac{9+3}{2} = 6$ или $x_1 = \dfrac{9-3}{2} = 3$; $\begin{cases} x_2 = 6, \\ y_2 = -1; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 5. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2(4+y)^2 - 3y^2 - 5(4+y) - 2y - 26 = 0, \\ x = 4 + y; \end{cases}$

$\begin{cases} 32 + 16y + 2y^2 - 3y^2 - 20 - 5y - 2y - 26 = 0, \\ x = 4 + y; \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 - 9y + 14 = 0, \\ x = 4 + y. \end{cases}$

Решим уравнение $y^2 - 9y + 14 = 0$;

$D = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 = 25$;

$y_2 = \dfrac{9+5}{2} = 7$ или $y_1 = \dfrac{9-5}{2} = 2$;

$\begin{cases} y_2 = 7, \\ x_2 = 11; \end{cases}$ или $\begin{cases} y_1 = 2, \\ x_1 = 6. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 6, \\ y_1 = 2; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = 11, \\ y_2 = 7. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 + x - 40y = 19, \\ 2x = 3y + 5; \end{cases}$

$\begin{cases} 4(1,5y + 2,5)^2 - 9y^2 + 1,5y + 2,5 - 40y - 19 = 0, \\ x = 1,5y + 2,5; \end{cases}$

$$\begin{cases}9y^2+30y+25-9y^2+1{,}5y+2{,}5-40y-19=0,\\x=1{,}5y+2{,}5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-8{,}5y=-8{,}5,\\x=1{,}5y+2{,}5;\end{cases}\ \begin{cases}y=1,\\x=4.\end{cases}\ \begin{cases}x=4,\\y=1.\end{cases}$$

е) $\begin{cases}3(y-2)^2+y^2+8(y-2)+13y-5=0,\\x=y-2;\end{cases}$

$$\begin{cases}3y^2-12y+12+y^2+8y-16+13y-5=0,\\x=y-2.\end{cases}\quad \begin{cases}4y^2+9y-9=0,\\x=y-2.\end{cases}$$

Решим уравнение $4y^2+9y-9=0$;

$D=9^2-4\cdot4\cdot(-9)=225$; $y_2=\dfrac{-9+15}{8}=\dfrac{3}{4}$ или $y_1=\dfrac{-9-15}{8}=-3$;

$$\begin{cases}y_2=\dfrac{3}{4},\\x_2=-1\dfrac{1}{4}.\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}y_1=-3,\\x_1=-5;\end{cases}\ \begin{cases}x_1=-5,\\y_1=-3;\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}x_2=-1\dfrac{1}{4},\\y_2=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

528. а) $\begin{cases}x=y+4,\\(y+3)(y+1)-2y(y+4)-3=0;\end{cases}$

$$\begin{cases}x=y+4,\\y^2+3y+y+3-2y^2-8y-3=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x=y+4,\\-y^2-4y=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x=y+4\\y(y+4)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=4,\\y_1=0;\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}x_2=0,\\y_2=-4.\end{cases}$$

б) $\begin{cases}y=x+1,\\(2x+3)(x-1)-x(x+1)-1=0;\end{cases}$

$$\begin{cases}y=x+1,\\2x^2+3x-2x-3-x^2-x-1=0;\end{cases}\quad \begin{cases}y=x+1,\\x^2-4=0;\end{cases}\quad \begin{cases}y=x+1\\(x+2)(x-2)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=2,\\y_2=3;\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}x_1=-2,\\y_1=-1.\end{cases}$$

в) $\begin{cases}y=2x-5,\\(x+1)(2x-1)-2x(2x-5)+1=0;\end{cases}$

$$\begin{cases}y=2x-5,\\2x^2+2x-x-1-4x^2+10x+1=0;\end{cases}\quad \begin{cases}y=2x-5,\\-2x^2+11x=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=2x-5\\x(2x-11)=0\end{cases}\ \begin{cases}x_1=0,\\y_1=-5;\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}x_2=5{,}5,\\y_2=6.\end{cases}$$

г) $\begin{cases} x=1-y, \\ -y(y+5)-y^2+12=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1-y, \\ -y^2-5y-y^2+12=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x=1-y, \\ -2y^2-5y+12=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1-y \\ 2y^2+5y-12=0 \end{cases}$

Решим уравнение $2y^2+5y-12=0$;

$D=5^2-4\cdot 2\cdot(-12)=121$;

$y_2=\dfrac{-5+11}{4}=1,5$ или $y_1=\dfrac{-5-11}{4}=-4$.

$\begin{cases} x_1=5, \\ y_1=-4; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=-0,5, \\ y_2=1,5. \end{cases}$

529. а) $\begin{cases} \left(-\dfrac{12}{y}\right)^2+y^2=40, \\ x=-\dfrac{12}{y}; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{144}{y^2}+y^2-40=0, \\ x=-\dfrac{12}{y}; \end{cases}$

$\begin{cases} 144+y^4-40y^2=0 \\ x=-\dfrac{12}{y} \end{cases}$ $\begin{cases} y^4-40y^2+144=0, \\ x=-\dfrac{12}{y}; \end{cases}$

Решим уравнение $y^4-40y^2+144=0$.

Обозначим $y^2=t \Rightarrow t^2-40t+144=0$;

$D=(-40)^2-4\cdot 1\cdot 144=1024$;

$t_1=\dfrac{40+32}{2}=36$ или $t_2=\dfrac{40-32}{2}=4 \Rightarrow y^2=36$ или $y^2=4$.

$\begin{cases} y_1=6, \\ x_1=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} y_2=-6, \\ x_2=2; \end{cases}$ $\begin{cases} y_3=2, \\ x_3=-6; \end{cases}$ $\begin{cases} y_4=-2, \\ x_4=6. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=-2, \\ y_1=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=2, \\ y_2=-6; \end{cases}$

$\begin{cases} x_3=-6, \\ y_3=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=6, \\ y_4=-2. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2=228-2y^2, \\ 3(228-2y^2)-2y^2-172=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=228-2y^2, \\ 684-6y^2-2y^2-172=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2=228-2y^2 \\ -8y^2+512=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=228-2y^2, \\ y^2=64; \end{cases}$ $\begin{cases} y=8, \\ x^2=100 \end{cases}$ или $\begin{cases} y=-8, \\ x^2=100; \end{cases}$

$\begin{cases} x_1=10, \\ y_1=8; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-10, \\ y_2=8; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=-10, \\ y_3=-8; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=10, \\ y_4=-8; \end{cases}$

530. а) $\begin{cases} x^2+3x-4\left(2x-x^2-5\right)-20=0, \\ y=2x-x^2-5; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+3x-8x+4x^2+20-20=0, \\ y=2x-x^2-5; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x^2-5x=0, \\ y=2x-x^2-5; \end{cases}$ $\begin{cases} x(x-1)=0 \\ y=2x-x^2-5 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=-5; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=1, \\ y_2=-4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x=y-y^2+1, \\ y^2+6x-2y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{y-y^2+1}{3}, \\ y^2+\dfrac{6\left(y-y^2+1\right)}{3}-2y-1=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x=\dfrac{y-y^2+1}{3} \\ y^2+2y-2y^2+2-2y-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{y-y^2+1}{3}, \\ y^2=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{3}, \\ y_1=-1; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=\dfrac{1}{3}, \\ y_2=1. \end{cases}$

531. а) $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x-y+xy=13; \end{cases}$ $\begin{cases} 2y=-8, \\ x+y+xy=5; \end{cases}$ $\begin{cases} y=-4 \\ x-4-4x=5 \end{cases}$

$\begin{cases} y=-4, \\ x=-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3, \\ y=-4. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x+2xy+2y=20, \\ xy-2x-2y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} 3xy=22, \\ xy-2x-2y=2; \end{cases}$

$\begin{cases} x=\dfrac{22}{3y}, \\ \dfrac{22}{3y}y-\dfrac{2\cdot 22}{3y}-2y-2=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{22}{3y}, \\ 22y-44-6y^2-6y=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{22}{3y} \\ 3y^2-8y+22=0 \end{cases}$

Решим уравнение $3y^2-8y+22=0$;

$D=(-8)^2-4\cdot 3\cdot 22=-200<0$. Нет корней.

532. а) $(x+y)(x-y)=0 \Rightarrow x+y=0$ или $x-y=0$.

Получим две новых системы:

1) $\begin{cases} x-y=0, \\ 2x-y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=y, \\ 2y-y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=1, \\ y_2=1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=0, \\ 2x-y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-y, \\ -2y-y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{3}, \\ y_1=-\dfrac{1}{3}; \end{cases}$

б) $(x-7y)(x+7y)=0 \Rightarrow x-7y=0$ или $x+7y=0$.

Получим две новые системы:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=100; \\ x+7y=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=100; \\ x=-7y; \end{cases}$ $\begin{cases} (-7y)^2+y^2=100; \\ x=-7y; \end{cases}$

$\begin{cases} 49y^2+y^2=100 \\ x=-7y \end{cases}$

Решим первое уравнение:

$49y^2+y^2=100;$ $50y^2=100;$ $y^2=2;$ $y=\sqrt{2}$ или $y=-\sqrt{2}$.

Отсюда $\begin{cases} x_1=7\sqrt{2}, \\ y_1=-\sqrt{2}; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=-7\sqrt{2}, \\ y_2=\sqrt{2}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=100; \\ x-7y=0; \end{cases}$ $\begin{cases} (7y)^2+y^2=100; \\ x=7y; \end{cases}$ $\begin{cases} 49y^2+y^2=100 \\ x=7y \end{cases}$

Из первого уравнения $y=\sqrt{2}$ или $y=-\sqrt{2}$. Откуда

$\begin{cases} x_3=-7\sqrt{2}, \\ y_3=-\sqrt{2}; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_4=7\sqrt{2}, \\ y_4=\sqrt{2}. \end{cases}$

в) $(x-3)(y-5)=0 \Rightarrow x-3=0$ или $y-5=0$.

Получаем две новые системы:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=0, \\ y_3=5. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x=3; \end{cases}$ $\begin{cases} y^2=16, \\ x=3; \end{cases}$ $\begin{cases} y_1=4, \\ x_1=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} y_2=-4, \\ x_2=3. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=4; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=3, \\ y_2=-4. \end{cases}$

г) $x(y+1)=0 \Rightarrow x=0$ или $y=-1$.

Получаем две новые системы:

1) $\begin{cases} x^2-y^2=50, \\ y=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=51, \\ y=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=\sqrt{51}, \\ y_1=-1; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=-\sqrt{51}, \\ y_2=-1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-y^2=50, \\ x=0; \end{cases}$ $\begin{cases} -y^2=50, \\ x=0; \end{cases}$ – корней нет, т.к. $-y^2 \le 0$ при всех y.

533. а) Из второго уравнения $y=2x-5$; подставим в первое уравнение:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x-5}=\frac{1}{6};$ $\frac{6(2x-5)+6x-x(2x-5)}{6x(2x-5)}=0;$

$12x-30+6x-2x^2+5x=0;$ $\left(x \ne 0; x \ne \frac{5}{2}\right);$

$2x^2-23x+30=0;$

$D=(-23)^2-4\cdot 2\cdot 30=289;$

$x=\dfrac{23\pm 17}{4};\ x_2=10;\ x_1=\dfrac{3}{2}.$

Окончательно:

$\begin{cases}x_2=10,\\ y_2=2x-5;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=10,\\ y_2=15.\end{cases}$ или $\begin{cases}x_1=-\dfrac{3}{2},\\ y_1=2x-5;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{2},\\ y_1=-2.\end{cases}$

б) Из второго уравнения $x=14-2y$, подставим в первое уравнение:

$\dfrac{1}{14-2y}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{20};\ \dfrac{1}{2(7-y)}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2\cdot 10};$

$\dfrac{10y-20(7-y)-y(7-y)}{2\cdot 10y(7-y)}=0;$

$10y-140+20y-7y+y^2=0;\ (y\neq 0, y\neq 7);$

$y^2+23y-140=0;$

$D=23^2+4\cdot 1\cdot(-140)=1089;\ y=\dfrac{-23\pm 33}{2};\ y_2=5$ или $y_1=-28.$

Окончательно: $\begin{cases}x_1=14-2\cdot(-28),\\ y_1=-28;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=70,\\ y_1=-28;\end{cases}$ или $\begin{cases}x_2=14-2\cdot 5,\\ y_2=5;\end{cases}$

$\begin{cases}x_2=4,\\ y_2=5.\end{cases}$

в) Обозначим $\dfrac{x}{y}=t$. Тогда из второго уравнения: $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{25}{12};$

$\dfrac{12t^2+12-25t}{12t}=0\ (t\neq 0);\ 12t^2-25t+12=0;$

$D=(-25)^2-4\cdot 12\cdot 12=49;\ t=\dfrac{25\pm 7}{24};\ t_1=\dfrac{4}{3}$ или $t_2=\dfrac{3}{4}.$

Имеем:

$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{3},\\ x+y=14;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{4}{3}y,\\ y+\dfrac{4}{3}y=14;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{4}{3}y,\\ y=6;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=8,\\ y_1=6.\end{cases}$ или

$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4},\\ x+y=14;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{3}{4}y,\\ y+\dfrac{3}{4}y=14;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{3}{4}y,\\ y=8;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=6,\\ y_2=8.\end{cases}$

г) Обозначим $\frac{x}{y}=t$.

Тогда из второго уравнения: $t-\frac{1}{t}=\frac{5}{6}$; $\frac{6t^2-6-5t}{6t}=0$; $6t^2-5t-6=0$

$(t\neq 0)$; $D=(-5)^2-4\cdot 6\cdot(-6)=169$; $t=\frac{5\pm 13}{12}$; $t_1=\frac{3}{2}$ или $t_2=-\frac{2}{3}$.

Имеем:

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=-\frac{2}{3},\\ x-y=2;\end{cases}\quad \begin{cases}x=-\frac{2}{3}y,\\ -\frac{2}{3}y-y=2;\end{cases}\quad \begin{cases}x=-\frac{2}{3}y,\\ -\frac{5}{3}y=2;\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=\frac{4}{5},\\ y_2=-\frac{6}{5}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{3}{2},\\ x-y=2;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\frac{3}{2}y,\\ \frac{3}{2}y-y=2;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\frac{3}{2}y,\\ \frac{1}{2}y=2;\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=6,\\ y_1=4.\end{cases}$$

534. Вычтем первое уравнение из второго: $\begin{cases}y^2+4y=12,\\ 3x-4y=-2,\\ x^2-y^2-x-y=100.\end{cases}$

Решим уравнение: $y^2+4y-12=0$; $D=4^2-4\cdot 1\cdot(-12)=64$;

$y=\frac{-4\pm 8}{2}$, $y_2=-6$; $y_1=2$.

Имеем:

$$\begin{cases}y=-6,\\ 3x-4y=-2,\\ x^2-y^2-x+y=100;\end{cases}\quad \begin{cases}y=-6,\\ 3x+24=-2,\\ x^2-y^2-x+y=100;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=-6,\\ x=-\frac{26}{3},\\ \left(\frac{26}{3}\right)^2-36+\frac{26}{3}-6=100.\end{cases}$$. Но $\left(\frac{26}{3}\right)^2+\frac{26}{3}-42\neq 100$, значит, $y\neq -6$

$$\begin{cases}y=2,\\ 3x-4y=-2,\\ x^2-y^2-x+y=100;\end{cases}\quad \begin{cases}y=2,\\ x=2,\\ x^2-y^2-x+y=100;\end{cases}$$

Но $2^2-2^2-2+2\neq 100$, следовательно, система не имеет решений.

535. Решим сначала систему:

$$\begin{cases} x+y=7, \\ 2x-y=2; \end{cases} \begin{cases} x+y=7, \\ y=2x-2; \end{cases} \begin{cases} x+2x-2=7, \\ y=2x-2; \end{cases} \begin{cases} 3x=9, \\ y=2x-2; \end{cases} \begin{cases} x=3, \\ y=4. \end{cases}$$

У этих двух функций только одна общая точка; если все три графика имеют общие точки, то это должна быть найденная точка. Проверим:

$3^2+3\cdot 4-4^2-4=1..$

Значит, существует общая точка для трех графиков.

536. а) Сложим и вычтем уравнения:

$$\begin{cases} 2x^2+2x=24, \\ 2y^2+2y=12; \end{cases} \begin{cases} (x-3)(x+4)=0, \\ (y-2)(y+3)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=2. \end{cases} \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=-3 \end{cases} \begin{cases} x_3=-4, \\ y_3=2. \end{cases} \begin{cases} x_4=-4, \\ y_4=-3 \end{cases}$$

б) Обозначим xy через t, из первого уравнения:

$t^2+t-72=0;$

$D=1^2–4\cdot 1\cdot(-72)=289;\ t=\dfrac{-1\pm 17}{2};\ t_1=–9;\ t_2=8.$

Получаем две системы:

$$1)\ \begin{cases} xy=-9; \\ x+y=6; \end{cases} \begin{cases} x(6-x)=-9; \\ y=6-x; \end{cases} \begin{cases} -x^2+6x+9=0; \\ y=6-x; \end{cases} \begin{cases} x^2-6x-9=0 \\ y=6-x \end{cases}$$

Решим уравнение: $x^2-6x-9=0;\ D=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-9)=72;$

$x=\dfrac{6\pm 6\sqrt{2}}{2};\ x_2=3+3\sqrt{2}$ или $x_1=3-3\sqrt{2};$ откуда

$$\begin{cases} x_2=3+3\sqrt{2}, \\ y_2=3-3\sqrt{2}; \end{cases} \text{или} \begin{cases} x_1=3-3\sqrt{2}, \\ y_1=3+3\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} xy=8; \\ x+y=6; \end{cases} \begin{cases} x(6-x)=8; \\ y=6-x; \end{cases} \begin{cases} 6x-x^2=8 \\ y=6-x; \end{cases} \begin{cases} x^2-6x+8=0 \\ y=6-x \end{cases}$$

$x^2-6x+8=0;\ D=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 8=4;$

$x=\dfrac{6\pm 2}{2};\ x_3=4$ или $x_4=2.$

$$\begin{cases} x_3=4, \\ y_3=2 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x_4=2, \\ y_4=4. \end{cases}$$

в) Обозначим $x+y=t$.

Тогда из первого уравнения: $t^2-2t-15=0;\ t_1=5,\ t_2=–3.$

Получаем две новых системы:

$$1)\ \begin{cases} x+y=-3; \\ xy=14; \end{cases} \begin{cases} x=-y-3; \\ (-y-3)y-14=0; \end{cases} \begin{cases} x=-y-3; \\ y^2+3y+14=0; \end{cases}$$ — корней нет

2) $\begin{cases} x+y=5; \\ xy=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x=5-y; \\ (5-y)y-6=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=5-y; \\ y^2-5y+6=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=3, \\ y_2=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=3; \end{cases}$

г) Обозначим $x+y=t$.
Тогда из первого уравнения: $t^2-4t-45=0$; $t_1=9$, $t_2=-5$. Обозначим $x-y=z$.
Тогда из второго уравнения: $z^2-2z-3=0$; $z_1=3$, $z_2=-1$.
Возможны четыре варианта:

$\begin{cases} x+y=9; \\ x-y=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=9; \\ x-y=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-5; \\ x-y=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-5; \\ x-y=-1. \end{cases}$

Окончательно:

$\begin{cases} x_1=6; \\ y_1=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=4; \\ y_2=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=-1; \\ y_2=-4; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=-3; \\ y_4=-2. \end{cases}$

537. Найдем коэффициент при x^2: $-a-2a+b=8$, $b=8+3a$, а коэффициент при x: $2+ab=-2$; $ab=-4$. Получим систему:

$\begin{cases} b=8+3a, \\ ab=-4; \end{cases}$ $\begin{cases} b=8+3a, \\ a(8+3a)=-4; \end{cases}$ $\begin{cases} b=8+3a, \\ 3a^2+8a+4=0; \end{cases}$

Решим уравнение: $3a^2+8a+4=0$; $D=8^2-4\cdot3\cdot4=16$;

$a=\dfrac{-8\pm4}{6}$; $a_1=-2$;; $a_2=-\dfrac{2}{3}$. $\begin{cases} a_1=-2, \\ b_1=2; \end{cases}$ $\begin{cases} a_2=-\dfrac{2}{3}, \\ b_2=6. \end{cases}$

538. Обозначив первое число a, второе — b. Имеем систему:

$\begin{cases} a+b=5(a-b), \\ a^2-b^2=180; \end{cases}$ $\begin{cases} 6b=4a, \\ a^2-b^2=180; \end{cases}$ $\begin{cases} b=\dfrac{2}{3}a, \\ a^2-\left(\dfrac{2}{3}a\right)^2=180; \end{cases}$

$\begin{cases} b=\dfrac{2}{3}a, \\ a^2=\dfrac{180\cdot9}{5}; \end{cases}$ $\begin{cases} b=\dfrac{2}{3}a, \\ a^2=324; \end{cases}$ $\begin{cases} a=18, \\ b=\dfrac{2\cdot18}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a=18, \\ b=12. \end{cases}$; $a=-18$ – не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 18 и 12.

539. Обозначив первое число a, а второе — b. Имеем систему:

$\begin{cases} ab=15(a+b), \\ a+2b=100; \end{cases}$ $\begin{cases} (100-2b)b=15(100-2b)+15b, \\ a=100-2b. \end{cases}$

Решим уравнение $2b^2-115b+1500=0$; $D=115^2-4\cdot2\cdot1500=1225$;

$b_2=\dfrac{115+35}{4}=37{,}5$ или $b_1=\dfrac{115-35}{4}=20$; $\begin{cases} b_2=37{,}5, \\ a_2=25; \end{cases}$ или $\begin{cases} b_1=20, \\ a_1=60. \end{cases}$

Ответ: 25 и 37,5 или 60 и 20.

540. Обозначив первое число a, а второе — b. Имеем систему:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 100, \\ 3a - 2b = 30; \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\dfrac{30+2b}{3}\right)^2 - b^2 - 100 = 0, \\ a = \dfrac{30+2b}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 900 + 120b + 4b^2 - 9b^2 - 900 = 0, \\ a = \dfrac{30+2b}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} -5b^2 + 120b = 0, \\ a = \dfrac{30+2b}{3}; \end{cases}$$

$-b(5b-120) = 0$; $b_1 = 0$ или $b_2 = 24$; $\begin{cases} b_1 = 0, \\ a_1 = 10; \end{cases}$ или $\begin{cases} b_2 = 24, \\ a_2 = 26. \end{cases}$

Ответ: 10 и 0 или 26 и 24.

541. Обозначим первую цифру числа через x, а вторую — y. Тогда число равно $10x + y$; исходя из условия, составим систему:

$$\begin{cases} 10x + y = 4(x+y); \\ 10x + y = 2xy. \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x, \\ 2x + 10x = 4x^2. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 3x = 0, \\ y = 2x. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 6. \end{cases}$$

при $x = 0$ число не является двузначным, что не удовлетворяет условию.

Ответ: 36.

542. Обозначив числитель x, а знаменатель y, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y-1} = 2, \\ \dfrac{x-1}{y+1} = \dfrac{1}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 2(y-1), \\ 4x - 4 = y + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 2(4x-6), \\ y = 4x - 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 8x + 12 = 0, \\ y = 4x - 5; \end{cases}$$

Решим уравнение $x^2 - 8x + 12 = 0$; $D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 16$;

$x_1 = \dfrac{8+4}{2} = 6$ или $x_2 = \dfrac{8-4}{2} = 2$. $\begin{cases} x_2 = 6, \\ y_2 = 19; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3. \end{cases}$

Ответ: $\dfrac{6}{19}$ или $\dfrac{2}{3}$.

543. Обозначим числитель x, а знаменатель y, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x+7}{y^2} = \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{x}{y+6} = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 6, \\ 4x + 28 = 3(2x-6)^2, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 6, \\ 3x^2 - 19x + 20 = 0. \end{cases}$$

Решим уравнение $3x^2 - 19x + 20 = 0$; $D = (-19)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 20 = 121$;

$x_1 = \dfrac{19+11}{6} = 5$ или $x_2 = \dfrac{19-11}{6} = \dfrac{4}{3}$ — не подходит по условию задачи.

$\begin{cases} x = 5, \\ y = 2 \cdot 5 - 6 = 4. \end{cases}$ Ответ: $\dfrac{5}{4}$.

544. Обозначим длины сторон прямоугольника x и y. Тогда по теореме Пифагора $x^2+y^2=15^2=225$; и получим систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2=225, \\ 2(x-6)+2(y-8)=\dfrac{2(x+y)}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=225, \\ x-6+y-8=\dfrac{x+y}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=225, \\ 3x+3y-42=x+y; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=225, \\ x+y=21; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (21-y)^2+y^2-225=0, \\ x=21-y; \end{cases} \quad \begin{cases} 441-42y+y^2+y^2-225=0 \\ x=21-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y^2-42y+216=0, \\ x=21-y; \end{cases}$$

Решим уравнение $y^2-21y+108=0$;

$D=(-21)^2-4\cdot1\cdot108=9$;

$y_2=\dfrac{21+3}{2}=12$ или $y_1=\dfrac{21-3}{2}=9$;

$$\begin{cases} x_2=9, \\ y_2=12; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1=12, \\ y_1=9. \end{cases}$$

Ответ: 9 см и 12 см.

545. Обозначим время заполнения бассейна первой трубой a часов, а второй – b часов. Тогда за 1 ч первая труба наполняет $\dfrac{1}{a}$ часть бассейна, а вторая — $\dfrac{1}{b}$ часть бассейна. Получим систему:

$$\begin{cases} b=5+a, \\ \dfrac{5}{a}+\dfrac{7{,}5}{b}=1, \end{cases} \quad \begin{cases} b=5+a, \\ \dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{a+5}=\dfrac{2}{5}, \end{cases} \quad \begin{cases} b=5+a, \\ 10a+50+15a=2a^2+10a. \end{cases}$$

Решим уравнение: $2a^2-15a-50=0$;

$D=(-15)^2-4\cdot2\cdot(-50)=625$;

$a_1=\dfrac{15+25}{4}=10$ или $a_2=\dfrac{15-25}{4}=-\dfrac{5}{2}$ — не подходит по смыслу задачи.

$$\begin{cases} a=10, \\ b=5+10=15, \end{cases}$$

За 1 ч совместной работы обеих труб будет заполнена $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{1}{6}$ бассейна, следовательно, весь бассейн заполнится за 6 ч.

Ответ: 6 ч.

546. Обозначим время заполнения бассейна первой трубой a часов, а второй – b часов. Тогда за 1 ч первая труба наполняет $\frac{1}{a}$ часть бассейна, а вторая — $\frac{1}{b}$ часть бассейна. Получим систему:

$$\begin{cases} a = 1{,}5b, \\ \frac{2}{a} + 4(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1{,}5b, \\ \frac{6}{a} + \frac{4}{b} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1{,}5b, \\ \frac{8}{b} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 12, \\ b = 8. \end{cases}$$

Ответ: 12 ч и 8 ч.

547. Обозначим скорость первого поезда x км/ч, а второго — y км/ч. Имеем систему:

$$\begin{cases} x + y = \frac{270}{3}, \\ \frac{270}{x} = \frac{270}{y} + 1\frac{21}{60}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 90 - y, \\ \frac{270}{90 - y} = \frac{270}{y} + \frac{81}{60}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 90 - y, \\ \frac{10}{90 - y} = \frac{10}{y} + \frac{1}{20}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 90 - y, \\ 200y = 18000 - 200y + 90y - y^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 90 - y \\ y^2 + 310y - 18000 = 0 \end{cases}$$

Решим уравнение $y^2 + 310y – 18000 = 0$;

$D = 310^2 – 4 \cdot 1 \cdot (–18000) = 168100$;

$y_1 = \frac{-310 + 410}{2} = 50$ или $y_2 = \frac{-310 - 410}{2} = -360$ — не подходит по смыслу задачи. $\begin{cases} x = 90 - 50 = 40, \\ y = 50. \end{cases}$

Ответ: 40 км/ч и 50 км/ч.

548. Обозначим скорости автомобилей x км/ч и y км/ч. До встречи они двигались $\frac{90}{x+y}$ ч, и первый автомобиль прошел $\frac{90x}{x+y}$ км, а второй $\frac{90y}{x+y}$ км. Тогда остаток пути, равный $\frac{90y}{x+y}$ км, первый автомобиль прошел за $\frac{90y}{x(x+y)}$ ч, а второй — за $\frac{90x}{y(x+y)}$ ч. Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{90y}{x(x+y)} = \frac{5}{4} \\ \frac{90x}{y(x+y)} = \frac{4}{5} \end{cases} \quad \frac{90y}{x(x+y)} = \frac{y(x+y)}{90x} \Rightarrow \frac{90}{(x+y)} = \frac{(x+y)}{90} \Rightarrow x + y = 90.$$

$$\frac{90y}{x(x+y)} \cdot \frac{y(x+y)}{90x} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4}; \quad \frac{y^2}{x^2} = \frac{25}{16};$$

$$\frac{y}{x}=\frac{5}{4}\Rightarrow \begin{cases} x+y=90, \\ y=\frac{5}{4}x; \end{cases} \quad \begin{cases} x+\frac{5}{4}y=90, \\ y=\frac{5}{4}x; \end{cases} \quad \begin{cases} x=40, \\ y=50. \end{cases}$$

Ответ: 40 км/ч и 50 км/ч.

549. Обозначим x км/ч — скорость первого туриста, y км/ч — скорость второго. Сначала 6 часов второй турист шел один и прошел расстояние $6y$. Затем они двигались одновременно до места встречи, пройдя $tx + ty$ км, где t – время движения до встречи. От места встречи второй шел 9 ч и прошел $9y$ км, а первый — 8 ч и прошел $8x$ км. По условию участок длиной $9y$ км первый прошел за время $\frac{9y}{x}=t$ часов, а второй за это же время прошел расстояние $8x–6y$ со скоростью y, имеем уравнение $\frac{9y}{x}=\frac{8x-6y}{y}$. Так как к моменту встречи второй прошел на 12 км больше, имеем второе уравнение: $8x–9y = 12$. Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{9y}{x}=\frac{8x-6y}{y}, \\ 8x-9y=12; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{24y}{4+3y}=\frac{12+3y}{y}, \\ x=\frac{3(4+3y)}{8}; \end{cases} \quad \begin{cases} 8y^2=16+4y+12y+3y^2, \\ x=\frac{12+9y}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y^2-16y-16=0 \\ x=\frac{12+9y}{8} \end{cases}$$

Решим уравнение: $5y^2–16y–16 = 0$;

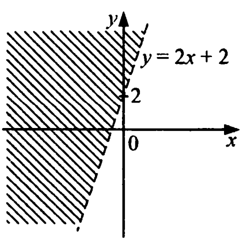
$D = (–16)^2–4\cdot 5\cdot(–16) = 576$;

$y_2=\frac{16+24}{10}=4$ или $y_1=\frac{16-24}{10}=-0{,}8$ — не подходит по смыслу задачи.

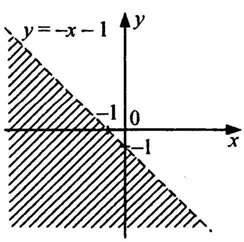
$$\begin{cases} y=4, \\ x=6. \end{cases}$$

Ответ: 6 км/ч и 4 км/ч.

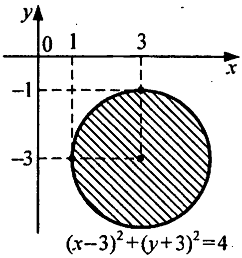
550. а) $y-2x>2$

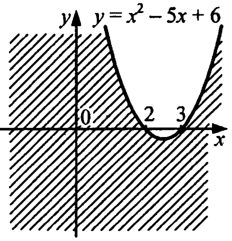


б) $x+y<-1$



551. а) $(x-3)^2+(y+3)^2 \le 4$ б) $y \le x^2-5x+6$





552. а) Под графиком функции $y = x$;
б) над графиком функции $y = x$.

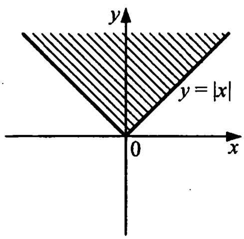
553. а) $x^2+y^2-4x-8y=(x-2)^2+(y-4)^2-20 \le 0$

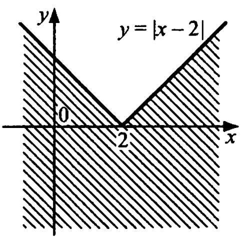
Круг с центром в точке (2; 4) и радиусом $2\sqrt{5}$.

б) $x^2-6x+y+4>0$

Это множество точек, лежащих над графиком параболы $y=-x^2+6x-4$.

554. а) $y \ge |x|$ б) $y \le |x-2|$

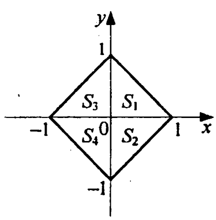




555. а) Объединение двух прямых углов, образованных прямыми $x = 1$ и $y = 1$ и содержащих точки (2; 2) и (0; 0).

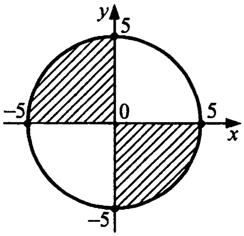
б) Объединение внутренностей двух прямых углов, образованных прямыми $y = x$ и $y = -x$ и содержащих точки (1; 0) и (–1; 0).

$$
\textbf{556.}\ |x|+|y|\le 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y\le 1 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y\le 1 \\ x\ge 0,\ y<0 \end{cases} \\ \begin{cases} y-x\le 1 \\ x<0,\ y\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y\le 1 \\ x<0,\ y<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x,y)\in S_1 \\ (x,y)\in S_2 \\ (x,y)\in S_3 \\ (x,y)\in S_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow
$$

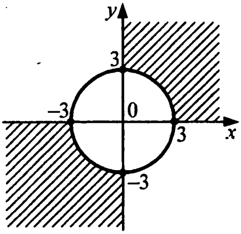


$\Leftrightarrow (x,y)\in S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$

557. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 25 \\ xy \le 0 \end{cases}$



б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 9 \\ xy \ge 0 \end{cases}$



558. $\begin{cases} y \le 2x + 3 \\ y \ge kx + b \end{cases}$

а) $k = 2$; $b = 0$;
б) $k = 0$; $b = 3$.

559. а) Объединение двух областей A и B, где A — верхняя полуплоскость ($y \ge 0$), из которой исключен полукруг ($x^2 + y^2 \le 1$), B — полукруг, расположенный ниже оси x.

б) Объединение двух областей A и B, где A — множество точек левой полуплоскости ($x \le 0$), лежащих под параболой ($y = x^2$), B — множество точек правой полуплоскости ($x \ge 0$), лежащей под параболой ($y = x^2$).

ГЛАВА IV. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

§ 9. Арифметическая прогрессия

560. 3; 6; 9; 12; ... $a_1 = 3$; $a_5 = 3 \cdot 5 = 15$; $a_{10} = 3 \cdot 10 = 30$; $a_{100} = 3 \cdot 100 = 300$; $a_n = 3n$.

561. –1; 0; –1; 0; –1; 0; –1; 0; $c_{10} = 0$; $c_{25} = -1$; $c_{253} = -1$; $c_{2k} = 0$; $c_{2k+1} = -1$.

562. 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100, $a_{20} = 20^2 = 400$; $a_{40} = 40^2 = 1600$; $a_n = n^2$.

563. а) a_{100}, a_{201}, a_{n+1}, a_n, a_{n+2}, a_{2n+1}

б) a_{70}, a_{99}, a_{n-3}, a_{n+2}, a_{3n-1}

564. а) x_{32}, x_{33}, x_{34}; б) x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+5};

в) x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}; г) x_{n-1}, x_n, x_{n+1}.

565. а) $x_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$; $x_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$; $x_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$; $x_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$; $x_5 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$; $x_6 = 2 \cdot 6 - 1 = 11$.

б) $x_1 = 1^2 + 1 = 2$; $x_2 = 2^2 + 1 = 5$; $x_3 = 3^2 + 1 = 10$; $x_4 = 4^2 + 1 = 17$; $x_5 = 5^2 + 1 = 26$; $x_6 = 6^2 + 1 = 37$.

в) $x_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$; $x_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$; $x_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$;

$x_5 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$; $x_6 = \frac{6}{6+1} = \frac{6}{7}$.

г) $x_1 = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2$; $x_2 = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$; $x_3 = (-1)^{3+1} \cdot 2 = 2$; $x_4 = (-1)^{4+1} \cdot 2 = -2$; $x_5 = (-1)^{5+1} \cdot 2 = 2$; $x_6 = (-1)^{6+1} \cdot 2 = -2$.

д) $x_1 = 2^{1-3} = \frac{1}{4}$; $x_2 = 2^{2-3} = \frac{1}{2}$; $x_3 = 2^{3-3} = 1$; $x_4 = 2^{4-3} = 2$;

$x_5 = 2^{5-3} = 4$; $x_6 = 2^{6-3} = 8$;

е) $x_1 = 0{,}5 \cdot 4^1 = 2$; $x_2 = 0{,}5 \cdot 4^2 = 8$; $x_3 = 0{,}5 \cdot 4^3 = 32$; $x_4 = 0{,}5 \cdot 4^4 = 128$; $x_5 = 0{,}5 \cdot 4^5 = 512$; $x_6 = 0{,}5 \cdot 4^6 = 2048$.

566. а) $b_5 = 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 = 56$;

б) $b_{10} = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 = 230$;

в) $b_{50} = 2 \cdot 50^2 + 3 \cdot 50 = 5150$.

567. $a_n = n^2 - n - 20 < 0 \Leftrightarrow (n-5)(n+4) < 0 \Leftrightarrow -4 < n < 5$

$a_1 = -20$; $a_2 = -18$; $a_3 = -14$; $a_4 = -8$.

568. а) $b_{1+1}=b_2=b_1+3=10+3=13$;

$b_{2+1}=b_3=b_2+3=13+3=16$; $b_{3+1}=b_4=b_3+3=16+3=19$;

$b_{4+1}=b_5=b_4+3=19+3=22$.

б) $b_2=b_{1+1}=\dfrac{b_1}{2}=20$; $b_3=b_{2+1}=\dfrac{b_2}{2}=\dfrac{20}{2}=10$;

$b_4=b_{3+1}=\dfrac{b_3}{2}=\dfrac{10}{2}=5$; $b_5=b_{4+1}=\dfrac{b_4}{2}=\dfrac{5}{2}=2{,}5$.

569. а) $a_1=1$; $a_2=a_1+1=1+1=2$; $a_3=a_2+1=2+1=3$;

$a_4=a_3+1=3+1=4$; $a_5=a_4+1=4+1=5$.

б) $a_1=1000$; $a_2=a_1\cdot 0{,}1=1000\cdot 0{,}1=100$; $a_3=a_2\cdot 0{,}1= \; =100\cdot 0{,}1=10$;

$a_4=a_3\cdot 0{,}1=10\cdot 0{,}1=1$; $a_5=a_4\cdot 0{,}1=1\cdot 0{,}1=0{,}1$.

в) $a_1=16$; $a_2=-0{,}5\cdot a_1=-0{,}5\cdot 16=-8$; $a_3=-0{,}5\cdot a_2= \; =-0{,}5\cdot(-8)=4$;

$a_4=-0{,}5\cdot a_3=-0{,}5\cdot 4=-2$; $a_5=-0{,}5\cdot a_4=-0{,}5\cdot(-2)=1$.

г) $a_1=3$; $a_2=a_1^{-1}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$; $a_3=a_2^{-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=3$; $a_4=a_3^{-1}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$;

$a_5=a_4^{-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=3$.

570. а) $b_1=5$; $b_2=b_1+5=5+5=10$; $b_3=b_2+5=10+5=15$;

$b_4=b_3+5=15+5=20$.

б) $b_1=5$; $b_2=b_1\cdot 5=5\cdot 5=25$; $b_3=b_2\cdot 5=25\cdot 5=125$;

$b_4=b_3\cdot 5=125\cdot 5=625$.

571. Исходя из условия, запишем систему:

$\begin{cases}x^2+y^2=45,\\ y=2x;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+(2x)^2-45=0,\\ y=2x;\end{cases}$ $\begin{cases}5x^2=45\\ y=2x\end{cases}$ $\begin{cases}x^2=9\\ y=2x\end{cases}$

По условию $x, y>0$. Значит $x=3$, $y=6$.

572. а) Обозначим $x^2=t \Rightarrow 4t^2+4t-15=0$; $D=4^2-4\cdot 4\cdot(-15)=256$;

$t_1=\dfrac{-4+16}{8}=1{,}5$ или $t_2=\dfrac{-4-16}{8}=-2{,}5 \Rightarrow$

$x^2=1{,}5$; или $x^2=-2{,}5$ (нет корней); $x_1=\sqrt{1{,}5}$ или $x_2=-\sqrt{1{,}5}$

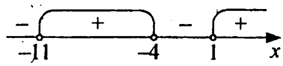
б) Пусть $x^2=t \Rightarrow 2t^2-t-36=0$;

$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-36)=289$; $t_1=\dfrac{1+17}{4}=4{,}5$ или $t_2=\dfrac{1-17}{4}=-4 \Rightarrow$

$x^2=4{,}5$; или $x^2=-4$ (нет корней). $x_1=\sqrt{4{,}5}$ или $x_2=-\sqrt{4{,}5}$

573. а) $x^2+x-42\le 0 \Leftrightarrow (x+7)(x-6)\le 0 \Leftrightarrow -7\le x\le 6$;

б) $(x+11)(x+4)(x-1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -11<x<-4 \\ x>1 \end{array}\right.$



574. а) $81\cdot 3^{-6}=3^4\cdot 3^{-6}=3^{4-6}=3^{-2}=\frac{1}{9}$

б) $\frac{(-3^{-3})^3}{-9^{-2}}=\frac{(-3)^{-9}}{-(3)^{-4}}=\frac{3^4}{3^9}=3^{4-9}=3^{-5}=\frac{1}{243}.$

в) $9^{-5}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}=\left(3^2\right)^{-5}\cdot\left(3^{-2}\right)^{-3}=3^{-10}\cdot 3^6=3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}.$

г) $\left(-3^{-3}\right)^2\cdot 27^3=(-3)^{-6}\cdot\left(3^3\right)^3=3^{-6}\cdot 3^9=3^{-6+9}=3^3=27.$

575. а) $a_n=a_1+d(n-1)$; $a_1=10$; $a_2=10+4\cdot(2-1)=10+4=14$;

$a_3=10+4\cdot(3-1)=10+8=18$; $a_4=10+4\cdot(4-1)=10+12=22$;

$a_5=10+4\cdot(5-1)=10+16=26$.

б) $a_n=a_1+d(n-1)$; $a_1=1{,}7$; $a_2=1{,}7-0{,}2(2-1)=1{,}7-0{,}2=1{,}5$;

$a_3=1{,}7-0{,}2(3-1)=1{,}7-0{,}2(3-1)=1{,}7-0{,}4=1{,}3$; $a_4=1{,}7-0{,}2(4-1)=$

$=1{,}7-0{,}6=1{,}1$; $a_5=1{,}7-0{,}2(5-1)=1{,}7-0{,}8=0{,}9$;

в) $a_n=a_1+d(n-1)$; $a_1=-3{,}5$; $a_2=-3{,}5+0{,}6(2-1)=\ -3{,}5+0{,}6=$

$=-2{,}9$; $a_3=-3{,}5+0{,}6(3-1)=-3{,}5+1{,}2=-2{,}3$; $a_4=-3{,}5+0{,}6(4-1)=$

$=-3{,}5+1{,}8=-1{,}7$; $a_5=-3{,}5+0{,}6(5-1)=-3{,}5+2{,}4=-1{,}1$;

576. а) $b_n=b_1+d(n-1)$; $b_7=b_1+d(7-1)=b_1+6d\sigma$.

б) $b_{26}=b_1+d(26-1)=b_1+25d$.

в) $b_{231}=b_1+d(231-1)=b_1+230d.$ г) $b_k=b_1+d(k-1).$

д) $b_{k+5}=b_1+d(k+5-1)=b_1+d(k+4).$ е) $b_{2k}=b_1+d(2k-1).$

577. а) $c_n=c_1+d(n-1)$; $c_5=20+3(5-1)=20+12=32$.

б) $c_n=c_1+d(n-1)$; $c_{21}=5{,}8-1{,}5\cdot(21-1)=5{,}8-30=-24{,}2.$

578. а) $a_n=a_1+d(n-1)$; $a_{11}=-3+0{,}7(11-1)=-3+7=4.$

б) $a_n=a_1+d(n-1)$; $a_{26}=18-0{,}6(26-1)=18-15=3.$

579. а) $a_1=\frac{1}{3}$; $a_2=-1$; $d=a_2-a_1=-1-\frac{1}{3}=-1\frac{1}{3}$;

$a_n=a_1+d(n-1)=\frac{1}{3}-1\frac{1}{3}(n-1)=\frac{1}{3}-1\frac{1}{3}n+1\frac{1}{3}=1\frac{2}{3}-1\frac{1}{3}n;$

$a_{10}=\frac{1}{3}-1\frac{1}{3}\cdot 9=\frac{1}{3}-\frac{4\cdot 9}{3}=-11\frac{2}{3}.$

б) $b_1 = 2,3;\ \ b_2 = 1;\ \ d = b_2 - b_1 = 1 - 2,3 = -1,3;$

$b_n = b_1 + d(n-1) = 2,3 - 1,3(n-1) = 2,3 - 1,3n + 1,3 = 3,6 - 1,3n;$

$b_{10} = 2,3 - 1,3 \cdot 9 = 2,3 - 11,7 = -9,4.$

580. а) $a_1 = -8;\ \ a_2 = -6,5;\ \ d = a_2 - a_1 = -6,5 - (-8) = 1,5;$

$a_n = a_1 + d(n-1) = -8 + 1,5(n-1) = -8 + 1,5n - 1,5 = 1,5n - 9,5;$

$a_{23} = -8 + 1,5(23-1) = -8 + 33 = 25.$

б) $a_1 = 11;\ \ a_2 = 7;\ \ d = a_2 - a_1 = 7 - 11 = -4;$

$a_n = a_1 + d(n-1) = 11 - 4(n-1) = 11 - 4n + 4 = 15 - 4n;$

$a_{23} = 15 - 4 \cdot 23 = -77.$

581. $a_1 = 7;\ \ d = 3;\ \ a_n = a_1 + d(n-1);\ \ a_8 = 7 + 3(8-1) = 7 + 3 \cdot 7 = 28.$

Ответ: 28 м.

582. Скорость поезда v_{20} в конце 20-й минуты — 21-й член арифметической прогрессии $a_1 = 0$; $d = 50$; $a_n = a_1 + d(n-1)$, $a_{21} = 0 + 50 \cdot 20 = 1000$.

Ответ: 1000 м/мин.

583. Рассмотрим ΔOA_1B_1 и ΔOA_nB_n. $\Delta OA_1B_1 \sim \Delta OA_nB_n$, так как $\angle O$ — общий, $OA_n = nOA_1$,

$OB_n = nOB_1, \Rightarrow \dfrac{OA_n}{OA_1} = \dfrac{OB_n}{OB_1}$. Отсюда $\dfrac{A_nB_n}{A_1B_1} = \dfrac{OA_n}{OA_1} = n$; $A_nB_n = nA_1B_1$.

$A_5B_5 = 5 \cdot 1,5 = 7,5$ см; $A_{10}B_{10} = 10 \cdot 1,5 = 15$ см.

584. а) $x_n = x_1 + d(n-1);\ \ x_1 = x_n - d(n-1);\ x_1 = x_{30} - d(30-1) = 128 - 4 \cdot 29 = 12.$

б) $x_n = x_1 + d(n-1);\ \ x_1 = x_{45} - d(45-1) = -208 - (-7) \cdot 44 = 100.$

585. а) $y_n = y_1 + d(n-1);\ \ d = \dfrac{y_n - y_1}{n-1};\ d = \dfrac{22-10}{5-1} = 3.$

б) $y_n = y_1 + d(n-1);\ \ d = \dfrac{y_n - y_1}{n-1};\ d = \dfrac{-21-28}{15-1} = -\dfrac{49}{14} = -3,5$

586. а) $c_n = c_1 + d(n-1);\ \ c_1 = c_n - d(n-1);\ c_1 = 26 - 0,7(36-1) = 1,5.$

б) $c_n = c_1 + d(n-1);\ \ d = \dfrac{c_n - c_1}{n-1};\ d = \dfrac{1,2-(-10)}{15-1} = 0,8.$

587. $a_1 = 5;\ a_9 = 1;$ 1) $d = \dfrac{a_n - a_1}{n-1} = \dfrac{1-5}{9-1} = -0,5.$

2) $a_2 = a_1 + d(2-1) = 5 - 0,5 \cdot 1 = 4,5;\ \ a_3 = 5 - 0,5 \cdot 2 = 4;$

$a_4 = 5 - 0,5 \cdot 3 = 3,5;\ \ a_5 = 5 - 0,5 \cdot 4 = 3;\ \ a_6 = 5 - 0,5 \cdot 5 = 2,5;$

$a_7 = 5 - 0,5 \cdot 6 = 2;\ \ a_8 = 5 - 0,5 \cdot 7 = 1,5.$

588. $a_1 = 2,5;\ \ a_6 = 4;$

1) $d = \dfrac{a_n - a_1}{n-1} = \dfrac{4-2,5}{6-1} = 0,3.$

2) $a_2 = 2{,}5 + 0{,}3(2-1) = 2{,}5 + 0{,}3 = 2{,}8$; $a_3 = 2{,}5 + 0{,}3(3-1) = 2{,}5 + 0{,}3 \cdot 2 = 3{,}1$;
$a_4 = 2{,}5 + 0{,}3 \cdot 3 = 3{,}4$; $a_5 = 2{,}5 + 0{,}3 \cdot 4 = 3{,}7$.

589. а) $c_n = c_1 + d(n-1)$;

$$\begin{cases} c_1 + 4d = 27 \\ c_1 + 26d = 60; \end{cases} \begin{cases} -22d = -33 \\ c_1 + 4d = 27; \end{cases} \begin{cases} d = 1{,}5 \\ c_1 = 27 - 4 \cdot 1{,}5; \end{cases} \begin{cases} d = 1{,}5 \\ c_1 = 21. \end{cases}$$

б) $c_n = c_1 + d(n-1)$;

$$\begin{cases} c_1 + 19d = 0 \\ c_1 + 65d = -92; \end{cases} \begin{cases} -46d = 92 \\ c_1 + 19d = 0; \end{cases} \begin{cases} d = -2 \\ c_1 = -19 \cdot (-2); \end{cases} \begin{cases} d = -2 \\ c_1 = 38. \end{cases}$$

590. $x_n = x_1 + d(n-1)$;

$$\begin{cases} x_1 + 15d = -7 \\ x_1 + 25d = 55; \end{cases} \begin{cases} 10d = 62 \\ x_1 + 15d = -7; \end{cases} \begin{cases} d = 6{,}2 \\ x_1 = -7 - 15 \cdot 6{,}2; \end{cases} \begin{cases} d = 6{,}2 \\ x_1 = -100. \end{cases}$$

591. $a_1 = 2$; $a_2 = 9 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 9 - 2 = 7$; $a_n = a_1 + d(n-1) = 2 + 7(n-1) = -5 + 7n$.
а) $156 = -5 + 7n$; $n = 23$. Значит $a_{23} = 156$.

б) $295 = -5 + 7n$; $n = 42\frac{6}{7} \notin N$. Значит $295 \notin (a_n)$.

592. $a_n = a_1 + d(n-1) = 32 - 1{,}5(n-1) = 32 - 1{,}5n + 1{,}5 = 33{,}5 - 1{,}5n$.

а) $0 = 33{,}5 - 1{,}5n$; $n = 22\frac{1}{3} \notin N \Rightarrow 0 \notin (a_n)$;

б) $-28 = 33{,}5 - 1{,}5n$; $n = 41$. Значит $a_{41} = -28$.

593. $x_1 = 8{,}7$; $d = -0{,}3$; $x_n = x_1 + d(n-1)$; $x_n = 8{,}7 - 0{,}3(n-1) = 8{,}7 - 0{,}3n + 0{,}3 = 9 - 0{,}3n$;
а) $9 - 0{,}3n \geq 0$; $n \leq 30$. б) $9 - 0{,}3n < 0$; $n > 30$.

594. $a_1 = -20{,}3$; $a_2 = -18{,}7$; $d = a_2 - a_1 = -18{,}7 + 20{,}3 = 1{,}6$;
$a_n = a_1 + d(n-1) = -20{,}3 + 1{,}6n - 1{,}6 = 1{,}6n - 21{,}9$; $1{,}6n - 21{,}9 < 0$;

$1{,}6n < 21{,}9$; $n < \frac{219}{16}$; $n \leq 13$; $a_{14} = a_1 + d(n-1) = -20{,}3 + 1{,}6 \cdot 13 = 0{,}5$.

595. a, b, c — последовательные члены арифметической прогрессии, поэтому:
$a = t$; $b = t + d$; $c = t + 2d$;
Пусть $a^2 + ab + b^2 = S$, тогда
$a^2 + ac + c^2 = a^2 + (a + c) \cdot c = a^2 + 2(t + d)(t + 2d) =$
$= a^2 + ab + b^2 + 3td + 3d^2 = S + 3td + 3d^2$
$b^2 + bc + c^2 = (c - b)^2 + 3bc = d^2 + 3(t + d)(t + 2d) =$
$= a^2 + ab + b^2 + 6td + 6d^2 = S + 2(3td + 3d^2)$

596. $a^2 = t$; $b^2 = t + d$; $c^2 = t + 2d$

Пусть $\frac{1}{b+c} = S$, тогда

$$\frac{1}{a+c} = \frac{1}{b+c} + \left(\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c}\right) = \frac{1}{b+c} + \frac{b-a}{(a+c)(b+c)} =$$

$$= S + \frac{d}{(a+c)(b+c)(a+b)}$$

597. а) (a_n) задана формулой вида $a_n = kn + b$, а, следовательно, является арифметической прогрессией. $d = k = 3$; $a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$.

б) $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 5 - n^2 + 5 = 2n + 1$, т.е. разность между соседними членами прогрессии зависит от n, а значит (a_n) — не является арифметической прогрессией.

в) (a_n) задана формулой вида $a_n = kn + b$, а значит является арифметической прогрессией. $d = k = 1$; $a_1 = 1 + 4 = 5$.

г) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+5} - \dfrac{1}{n+4} = -\dfrac{1}{(n+5)(n+4)}$, т.е. разность между соседними членами прогрессии зависит от n, а значит (a_n) — не арифметическая прогрессия.

д) (a_n) задана формулой вида $a_n = kn + b$, а значит является арифметической прогрессией. $d = k = -0{,}5$; $a_1 = -0{,}5 \cdot 1 + 1 = 0{,}5$.

е) (a_n) задана формулой вида $a_n = kn + b$, а значит является арифметической прогрессией. $d = k = 6$; $a_1 = 6 \cdot 1 = 6$.

598. Каждый выпуклый $(n + 1)$-угольник получается из n-угольника добавлением треугольника с суммой углов, равной $180°$; следовательно, $S_{n+1} - S_n = 180°$, т.е. последовательность S_n является арифметической прогрессией с разностью $d = 180°$.

599. $\begin{cases} 3x + y = 2. \\ x^2 - y^2 = -12; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -3x + 2, \\ x^2 - (-3x+2)^2 + 12 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} y = -3x + 2, \\ x^2 - 9x^2 + 12x - 4 + 12 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -3x + 2, \\ -8x^2 + 12x + 8 = 0 \end{cases}$

Решим уравнение $2x^2 - 3x - 2 = 0$; $D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25$;

$x_1 = \dfrac{3+5}{4} = 2$ или $x_2 = \dfrac{3-5}{4} = -0{,}5$; $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -4; \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = -0{,}5, \\ y_2 = 3{,}5. \end{cases}$

600. а) $x(x^2 + 4x - 32) = 0$; $x_1 = 0$ или $x^2 + 4x - 32 = 0$; $D = 16 - 4 \cdot (-32) = 144$;

$x_2 = \dfrac{-4+12}{2} = 4$ или $x_3 = \dfrac{-4-12}{2} = -8$.

б) $x^2(x - 10) + 4(x - 10) = 0$; $(x-10)(x^2 + 4) = 0$; $x = 10$ ($x^2 + 4 = 0$ — нет корней).

601. а) $2(x-0{,}5)(x+8) > 0$

$(x-0{,}5)(x+8) > 0$

$(-\infty; -8) \cup (0{,}5; \infty)$

б) $-2(x-33)(x+8) \le 0$;

$(x-33)(x+8) \ge 0$;

$(-\infty; -8] \cup [33; \infty)$.

602. а) $125^{-1} \cdot 25^2 = (5^3)^{-1} \cdot (5^2)^2 = 5^{-3} \cdot 5^4 = 5^1 = 5$.

б) $0{,}0001 \cdot (10^3)^2 \cdot (0{,}1)^{-2} = 10^{-4} \cdot 10^6 \cdot (10^{-1})^{-2} = 10^{-4} \cdot 10^6 \cdot 10^2 = 10^4 = 10000$.

в) $\dfrac{16^{-3} 4^5}{8} = \dfrac{(2^4)^{-3}(2^2)^5}{2^3} = \dfrac{2^{-12} 2^{10}}{2^3} = 2^{-12} 2^{10} 2^{-3} = 2^{-5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$

г) $9^4 \cdot \left(\dfrac{1}{27}\right)^{-3} \cdot 81^{-4} = (3^2)^4 \cdot (3^{-3})^{-3} \cdot (3^4)^{-4} = 3^8 \cdot 3^9 \cdot 3^{-16} = 3$.

603. $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$; а) $S_{60} = \dfrac{(3+57)\cdot 60}{2} = \dfrac{60\cdot 60}{2} = 1800$

б) $S_{60} = \dfrac{(-10,5+51,5)\cdot 60}{2} = \dfrac{41\cdot 60}{2} = 1230$

604. $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$;

а) $a_1 = -23$; $a_2 = -20$; $d = -20 + 23 = 3$; $S_8 = \dfrac{2\cdot(-23)+3\cdot(8-1)}{2}\cdot 8 = -100$.

б) $a_1 = 14,2$; $a_2 = 9,6$; $d = 9,6-14,2 = -4,6$; $S_8 = \dfrac{2\cdot 14,2 - 4,6\cdot(8-1)}{2}\cdot 8 = -15,2$

605. $S_n = \dfrac{2b_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$;

а) $S_9 = \dfrac{2\cdot(-17)+6\cdot(9-1)}{2}\cdot 9 = 63$. б) $S_9 = \dfrac{2\cdot 6,4+0,8\cdot(9-1)}{2}\cdot 9 = 86,4$.

606. $S_n = \dfrac{(x_1 + x_n)}{2}\cdot n$;

а) $x_1 = 4\cdot 1 + 2 = 6$; $x_n = 4n + 2$; $S_n = \dfrac{6+4n+2}{2}\cdot n = (4 + 2n)n = 2n(2 + n)$

$S_{50} = 2\cdot 50(2 + 50) = 5200$; $S_{100} = 2\cdot 100(2 + 100) = 20400$.

б) $x_1 = 2\cdot 1 + 3 = 5$; $x_n = 2n + 3$; $S_n = \dfrac{5+2n+3}{2}\cdot n = (n+4)n$;

$S_{50} = 50(50 + 4) = 2700$; $S_{100} = 100(100 + 4) = 10400$.

607. $a_1 = 3\cdot 1 + 2 = 5$; $a_{20} = 3\cdot 20 + 2 = 62$; $S_{20} = \dfrac{5+62}{2}\cdot 20 = 670$.

608. а) $a_1 = 2$; $a_n = 2n$; $S_n = \dfrac{(a_1+a_n)n}{2} = \dfrac{(2+2n)n}{2} = \dfrac{2n(n+1)}{2} = (n+1)n$.

б) $a_1 = 1$; $a_n = 2n-1$; $S_n = \dfrac{(1+2n-1)\cdot n}{2} = \dfrac{2n\cdot n}{2} = n^2$.

609. а) $a_1 = 1$; $a_{150} = 150$; $n = 150$; $S_{150} = \dfrac{(150+1)\cdot 150}{2} = 11325$.

б) $20 \le n \le 120$; $a_1 = 20$; $a_{101} = 120$; $n = 101$

$S_{101} = \dfrac{(a_1 + a_{101})\cdot 101}{2} = \dfrac{(20+120)\cdot 101}{2} = 7070$.

в) $a_n = 4n$; $4n \le 300$; $n \le 75$; $a_1 = 4$; $a_{75} = 4\cdot 75 = 300$; $S_{75} = \dfrac{(4+300)\cdot 75}{2} = 11400$.

г) $a_n = 7n$; $7n \le 130$; $n \le 18\frac{4}{7}$; $n = 18$; $a_1 = 7$; $a_{18} = 7\cdot 18 = 126$;

$S_{18} = \dfrac{(7+126)\cdot 18}{2} = 1197$.

610. $a_1 = 10$; $d = 3$; $a_n = a_1 + d(n-1)$;
$a_{15} = 10 + 3(15-1) = 52$; $a_{30} = 10 + 3(30-1) = 97$;
$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$; $S = \frac{(a_{15} + a_{30})16}{2} = \frac{(52+97)16}{2} = 1192.$

611. $a_1 = 21$; $d = -0{,}5$; $a_n = a_1 + d(n-1)$;
$a_6 = 21-0{,}5(6-1) = 18{,}5$; $a_{25} = 21-0{,}5(25-1) = 9$;
$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$; $S = \frac{(a_6 + a_{25})\cdot 20}{2} = \frac{(18{,}5+9)\cdot 20}{2} = 275.$

612. 1) $c_n = c_1 + d(n-1)$;
$\begin{cases} c_1 + 6d = 18{,}5, \\ c_1 + 16d = -26{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} 10d = -45, \\ c_1 + 6d = 18{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} d = -4{,}5, \\ c_1 = 18{,}5 - 6\cdot(-4{,}5); \end{cases}$ $\begin{cases} d = -4{,}5, \\ c_1 = 45{,}5. \end{cases}$

2) $S_n = \frac{2c_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$; $S_{20} = \frac{2\cdot 45{,}5 - 4{,}5(20-1)}{2}\cdot 20 = 55.$

613. 1) $b_n = b_1 + d(n-1)$; $b_1 = 4{,}2$; $b_{10} = 15{,}9$;
$d = \frac{b_n - b_1}{n-1}$; $d = \frac{15{,}9 - 4{,}2}{10-1} = 1{,}3$

2) $S_n = \frac{2b_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$; $S_{15} = \frac{2\cdot 4{,}2 + 1{,}3\cdot(15-1)}{2}\cdot 15 = 199{,}5$

614. Последовательность $h_n = h(n)$ пройденных за n секунд расстояний по условию — арифметическая прогрессия с $h_1 = 5$ и $d = 10$. Значит, $H_5 = \frac{2h_1 + d(5-1)}{2}\cdot 5 = \frac{2\cdot 5 + 10\cdot 4}{2}\cdot 5 = 125$.

Ответ: 125 м.

615. а) $h(5) = h_5 = 5 + 4\cdot 10 = 45$ (м)

б) За 5 секунд тело пройдет расстояние $H = S_5 = \frac{h_1 + h_5}{2}\cdot 5 = \frac{5+45}{2}\cdot 5 = 125$ (м)

Ответ: 45 м; 125 м.

616. Количество шаров в каждом ряду представляет собой арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 1$. Число шаров в треугольнике из n рядов равно $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$.

Поэтому $120 = \frac{2\cdot 1 + 1(n-1)}{2}\cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\Rightarrow n(n+1) = 240$; $n^2 + n - 240 = 0$;

$D = 1^2 - 4\cdot 1(-240) = 961$; $n = \frac{-1+31}{2} = 16$ $(n>0)$;

$S_{30} = \frac{2+29}{2}\cdot 30 = 15\cdot 31 = 465$ (шаров).

617. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\cdot n = \frac{6 + 2(n-1)}{2}\cdot n =$

$= n(n+2) \le 120 \Leftrightarrow n^2 + 24 - 120 \le 0 \Leftrightarrow (n+12)(n-10) \le 0 \Leftrightarrow -12 \le n \le 10$

Ответ: $n = 10$.

618. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{34 - 3(n-1)}{2} \cdot n = \frac{n(37 - 3n)}{2} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < n < \frac{37}{3} \Rightarrow n = 12$

Ответ: $n = 12$.

619. $a_n = a_1 + d(n-1)$;

$\begin{cases} a_1 + 6d = 8, \\ a_1 + 10d = 12{,}8; \end{cases}$ $\begin{cases} 4d = 4{,}8, \\ a_1 + 6d = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} d = 1{,}2, \\ a_1 = 8 - 6 \cdot 1{,}2; \end{cases}$ $\begin{cases} d = 1{,}2, \\ a = 0{,}8; \end{cases}$

620. $a_1 = 20{,}7$; $a_2 = 18{,}3$; $d = a_2 - a_1 = 18{,}3 - 20{,}7 = -2{,}4$; $a_n = a_1 + d(n-1) =$

$= 20{,}7 - 2{,}4n + 2{,}4 = 23{,}1 - 2{,}4n$; $a_n = 23{,}1 - 2{,}4n$; $n = \frac{23{,}1 - a_n}{2{,}4}$

а) $n = \frac{23{,}1 - (-1{,}3)}{2{,}4} = 3{,}7$ – не целое число, т.е. $-1{,}3 \notin a_n$.

б) $\frac{23{,}1 - (-3{,}3)}{2{,}4} = 11$, т.е. $a_n = -3{,}3$.

621. а) $\begin{cases} 9x^2 + 9 \cdot (\frac{2}{3x})^2 = 13, \\ y = \frac{2}{3x}; \end{cases}$. Решим уравнение $9x^2 + \frac{4}{x^2} - 13 = 0$;

$9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$; пусть $x^2 = t \Rightarrow 9t^2 - 13t + 4 = 0$; $D = (-13)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 25$;

$t = \frac{13 + 5}{18} = 1$ или $t = \frac{13 - 5}{18} = \frac{4}{9}$;

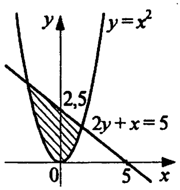
$x^2 = 1$ или $x^2 = \frac{4}{9}$; $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = \frac{2}{3}$; $x_4 = -\frac{2}{3}$.

$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = \frac{2}{3}, \\ y_3 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -\frac{2}{3}, \\ y_4 = -1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + 9 + 4x^2 = 29, \\ y^2 = 9 + 4x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x^2 = 20, \\ y^2 = 9 + 4x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 4, \\ y^2 = 9 + 4x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 4, \\ y^2 = 25; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2, \\ y^2 = 25 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -2, \\ y^2 = 25; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = -5; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = -2, \\ y_3 = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = -5. \end{cases}$

622. $\begin{cases} y \ge x^2 \\ 2y + x \le 5 \end{cases}$



§ 10. Геометрическая прогрессия

623. $b_{n+1} = b_n q$;

а) $b_1 = 6$; $b_2 = 6 \cdot 2 = 12$; $b_3 = 12 \cdot 2 = 24$; $b_4 = 24 \cdot 2 = 48$; $b_5 = 48 \cdot 2 = 96$.

б) $b_1 = -16$; $b_2 = -16 \cdot \frac{1}{2} = -8$; $b_3 = -8 \cdot \frac{1}{2} = -4$; $b_4 = -4 \cdot \frac{1}{2} = -2$; $b_5 = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$.

в) $b_1 = -24$; $b_2 = -24 \cdot (-1{,}5) = 36$; $b_3 = 36 \cdot (-1{,}5) = -54$; $b_4 = -54 \cdot (-1{,}5) = 81$; $b_5 = 81 \cdot (-1{,}5) = -121{,}5$

г) $b_1 = 0{,}4$; $b_2 = 0{,}4 \cdot \sqrt{2}$; $b_3 = 0{,}4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 0{,}8$; $b_4 = 0{,}8 \cdot \sqrt{2}$;

$b_5 = 0{,}8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1{,}6$.

624. $c_n = c_1 q^{n-1}$;

а) $c_6 = c_1 q^{6-1} = c_1 q^5$

б) $c_{20} = c_1 q^{20-1} = c_1 q^{19}$

в) $c_{125} = c_1 q^{125-1} = c_1 q^{124}$

г) $c_k = c_1 q^{k-1}$

д) $c_{k+3} = c_1 q^{k+3-1} = c_1 q^{k+2}$

е) $c_{2k} = c_1 q^{2k-1}$

625. $x_n = x_1 q^{n-1}$;

а) $x_7 = x_1 q^{7-1} = x_1 q^6 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 2^4 \cdot 2^{-6} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$.

б) $x_8 = x_1 q^{8-1} = x_1 q^7 = -810 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = -10 \cdot 3^4 \cdot 3^{-7} = \frac{-10}{3^3} = -\frac{10}{27}$.

в) $x_{10} = x_1 q^{10-1} = x_1 q^9 = \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2})^9 = -(\sqrt{2})^{10} = -2^5 = -32$.

г) $x_6 = x_1 q^{6-1} = x_1 q^5 = 125 \cdot 0{,}2^5 = 5^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 = 5^3 \cdot 5^{-5} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$.

626. $b_n = b_1 q^{n-1}$;

а) $b_5 = b_1 q^{5-1} = b_1 q^4 = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{3 \cdot 16}{4 \cdot 81} = \frac{4}{27}$.

б) $b_4 = b_1 q^{4-1} = b_1 q^3 = 1{,}8 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = 1{,}8 \cdot 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{1{,}8 \cdot 3}{27} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

627. а) $x_1 = 2$; $x_2 = -6$; $q = -\frac{6}{2} = -3$;

$x_n = x_1 q^{n-1} = 2 \cdot (-3)^{n-1}$; $x_7 = 2 \cdot (-3)^6 = 2 \cdot 729 = 1458$.

б) $x_1 = -40$; $x_2 = -20$; $q = \frac{-20}{-40} = \frac{1}{2}$;

$x_n = (-40) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $x_7 = -40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = -\frac{40}{64} = -\frac{5}{8}$.

в) $x_1 = -0{,}125$; $x_2 = 0{,}25$; $q = \frac{0{,}25}{-0{,}125} = -2$; $x_n = -0{,}125 \cdot (-2)^{n-1}$

$x_7 = -0{,}125(-2)^6 = -0{,}125 \cdot 64 = -8$.

г) $x_1=-10$; $x_2=10$; $\Rightarrow q=\dfrac{10}{-10}=-1$;

$x_n=(-10)\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^n\cdot 10$; $x_7=(-1)^7\cdot 10=-10$.

628. а) $x_1=48$; $x_2=12$; $q=\dfrac{12}{48}=\dfrac{1}{4}$; $x_n=x_1q^{n-1}$;

$x_6=48\cdot(\dfrac{1}{4})^5=\dfrac{3}{64}$; $x_n=48\cdot(\dfrac{1}{4})^{n-1}$.

б) $x_1=\dfrac{64}{9}$; $x_2=-\dfrac{32}{3}$; $q=-\dfrac{32\cdot 9}{3\cdot 64}=-\dfrac{3}{2}$;

$x_6=x_1q^5=\dfrac{64}{9}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^5=-\dfrac{64\cdot 243}{9\cdot 32}=-54$; $x_n=\dfrac{64}{9}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$.

в) $x_1=-0{,}001$; $x_2=-0{,}01$; $q=\dfrac{-0{,}01}{-0{,}001}=10$;

$x_6=x_1q^5=-10^{-3}\cdot 10^5=-10^2=-100$; $x^n=-10^{-3}\cdot 10^{n-1}$.

г) $x_1=-100$; $x_2=10$; $q=\dfrac{10}{-100}=-\dfrac{1}{10}$;

$x^6=x_1q^5=-100\cdot(-\dfrac{1}{10})^5=10^2\cdot 10^{-5}=10^{-3}=0{,}001$; $x_n=x_1q^{n-1}=-10^2\cdot\left(-\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$

629. $\Delta A_{n+1}BC_{n+1}\sim\Delta A_nBC_n$. Это значит, что площади треугольников составляют геометрическую прогрессию (S_n) со знаменателем $q=\dfrac{1}{4}$, откуда

$S_9=S_1(\dfrac{1}{4})^9$; $S_9=\dfrac{768}{4^9}=\dfrac{3\cdot 4^4}{4^9}=\dfrac{3}{4^5}=\dfrac{3}{1024}$ см^2.

630. а) $b_n=b_1q^{n-1}\Rightarrow b_1=\dfrac{b_n}{q^{n-1}}$; $b_1=\dfrac{3}{3^5}=\dfrac{1}{3^4}=\dfrac{1}{81}$.

б) $b_n=b_1q^{n-1}\Rightarrow b_1=\dfrac{b_n}{q^{n-1}}=\dfrac{17\frac{1}{2}}{\left(-2\frac{1}{2}\right)^4}=\dfrac{56}{125}$.

631. а) $c_n=c_1q^{n-1}$; $c_5=c_1\cdot q^{5-1}=c_1\cdot q^4$; $c_7=c_1\cdot q^6$; $\dfrac{c_7}{c_5}=\dfrac{c_1q^6}{c_1q^4}=q^2=\dfrac{-54}{-6}=9$;

$q=3$ $q=-3$. б) $c_6=c_1q^5$; $c_8=c_1q^7$; $\dfrac{c_8}{c_6}=\dfrac{c_1q^7}{c_1q^5}=q^2=\dfrac{9}{25}$; $q=\dfrac{3}{5}$ или $q=-\dfrac{3}{5}$.

632. а) $x_n=x_1q^{n-1}$; $x_1=\dfrac{x_n}{q^{n-1}}$; $x_1=\dfrac{0{,}32}{(0{,}2)^5}=0{,}32\cdot 5^5=1000$.

б) $x_n=x_1q^{n-1}$; $\dfrac{x_5}{x_3}=\dfrac{x_1q^4}{x_1q^2}=q^2=\dfrac{-18}{-162}=\dfrac{1}{9}$; $q_1=\dfrac{1}{3}$ или $q_2=-\dfrac{1}{3}$.

633. а) 1) $b_3 = b_1 \cdot q^2$; $q^2 = \dfrac{5}{125} = \dfrac{1}{25}$; $q = \dfrac{1}{5}$ или $-\dfrac{1}{5}$.

2) $b_6 = b_1 q^5$; $b_6 = 125 \cdot (\dfrac{1}{5})^5 = \dfrac{125}{3125} = \dfrac{1}{25}$ или $b_6 = 125 \cdot (-\dfrac{1}{5})^5 = -\dfrac{125}{3125} = -\dfrac{1}{25}$.

б) 1) $b_3 = b_1 q^2$; $q^2 = \dfrac{-2}{-\dfrac{2}{9}} = 9$; $q = 3$ или $q = -3$;

2) $b_7 = b_1 q^6$; $b_7 = -\dfrac{2}{9} \cdot 3^6 = -162$ или $b_7 = -\dfrac{2}{9} \cdot (-3)^6 = -162$.

в) 1) $b_4 = b_1 q^3$; $b_6 = b_1 q^5$; $\dfrac{b_6}{b_4} = \dfrac{b_1 q^5}{b_1 q^3} = q^2$; $q^2 = \dfrac{-100}{-1} = 100$; $q = 10$ или $q = -10$.

2) $b_4 = b_1 q^3$; $b_1 = \dfrac{b_4}{q^3}$; $b_1 = \dfrac{-1}{10^3} = -0{,}001$, или $b_1 = \dfrac{-1}{(-10)^3} = 0{,}001$.

634. $b_1 = 2$; $b_5 = 162$.

1) $b_n = b_1 q^{n-1}$; $b_5 = 2 \cdot q^{5-1} = 2 \cdot q^4 = 162 \Rightarrow q^4 = \dfrac{162}{2} = 81$; $q = 3$ или $q = -3$;

2) При $q = 3$, то $b_2 = b_1 q = 2 \cdot 3 = 6$; $b_3 = b_1 q^2 = 2 \cdot 3^2 = 18$; $b_4 = b_1 q^3 = 2 \cdot 3^3 = 54$;

3) При $q = -3$, то $b_2 = b_1 q = 2 \cdot (-3) = -6$;

$b_3 = b_1 q^2 = 2 \cdot (-3)^2 = 18$; $b_4 = b_1 q^3 = 2 \cdot (-3)^3 = -54$.

635. $a = 2 \cdot q$; $b = 2 \cdot q^2$; $\dfrac{1}{4} = 2 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow q = \dfrac{1}{2}$

$a = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$; $b = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$.

636. $b_2 = b_1 \cdot q = 6$; $b_4 = b_1 \cdot q^3 = 24 \Rightarrow q^2 = 4$; $q_1 = 2$; $q_2 = -2$

1) при $q = 2$ $b_6 = b_4 \cdot q^2 = 24 \cdot 4 = 96$

2) при $q = -2$ $b_6 = b_4 \cdot q^2 = 24 \cdot 4 = 96$.

637. Ежегодно сумма вклада возрастает на 90%, т.е. в 1,9 раза. Следовательно, через 4 года она возрастет в $(1{,}9)^4$ раза. $S_4 = 8000 \cdot (1{,}9)^4 = 104256{,}8$ р.

638. $S_5 = 60 \cdot (1 + 0{,}02)^5 = 60 \cdot (1{,}02)^5 = 66{,}245$ тыс. человек

639. $S_6 = 2 \cdot 10^4 (1 + 0{,}1)^6 = 2 \cdot 10^4 \cdot (1{,}1)^6 = 35431$ м^3

640. $S_6 = 760 \cdot (1 - 0{,}2)^6 = 760 \cdot (0{,}8)^6 = 200$ мм.рт.стр.

641. В равностороннем треугольнике со стороной a_n высота равна $h_n = \dfrac{a_n\sqrt{3}}{2}$; следовательно, $p_{n+1} = 3h_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2} p_n$, т.е. периметры треугольников образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $p_6 = p_1 (\dfrac{\sqrt{3}}{2})^5 = \dfrac{9\sqrt{3}}{2^5} p_1$; $p_1 = 3 \cdot 8 = 24$. Значит $p_6 = 24 \cdot \dfrac{9\sqrt{3}}{2^5} = 3 \cdot 2^3 \cdot \dfrac{9\sqrt{3}}{2^5} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ см.

642. Так как стороны каждого следующего треугольника являются средними линиями для предыдущего, то $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$, $p_{n+1} = 3a_n = 3\cdot\frac{1}{2}a_n = \frac{1}{2}p_n$, т.е. периметры треугольников являются членами геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$.

$p_8 = (\frac{1}{2})^7 p_1$; $p_1 = 3\cdot 16$;

$p_8 = \frac{1}{2^7}\cdot 3\cdot 2^4 = \frac{48}{128} = \frac{3}{8}$ см.

643. $x_1 = a$; $x_2 = a + d$; $x_3 = a + 2d$;
$x_2 - 1 = a\cdot q$;
$x_3 + 1 = a\cdot q^2$;

$$\begin{cases} a + d - 1 = a\cdot q \\ a + 2d + 1 = a\cdot q^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d - 1 = a(q-1) \\ 2d + 1 = a(q^2 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{d+2}{d-1} \\ d - 1 = a(q-1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{d+2}{d-1} \\ a = \dfrac{(d-1)^2}{3} \end{cases}$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 3a + 3d = d^2 + d + 1 = 21 \Leftrightarrow d^2 + d - 20 = 0 \Leftrightarrow d = -5$ и $d = 4$
$d = -5 \Rightarrow x_1 = 12; x_2 = 7; x_3 = 2$
$d = 4 \Rightarrow x_1 = 3; x_2 = 7; x_3 = 11$
Ответ: 12, 7, 2 и 3, 7, 11.

644. $x_1 = a$; $x_2 = a + c$; $x_3 = a + 2c$
$x_1 + 1 = a + 1$; $x_2 + 1 = (a+1)q$; $(x_3 + 4) = (a+1)q^2$

$$\begin{cases} a + d + 1 = (a+1)q \\ a + 2d + 4 = (a+1)q^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = (a+1)(q-1) \\ 2d + 3 = (a+1)(q^2 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{3}{d} + 1 \\ a = \dfrac{d^2}{3} - 1 \end{cases}$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 3(a + d) = d^2 + 3d - 3 = 15 \Leftrightarrow d^2 + 3d - 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = -6 \\ d = 3 \end{array}\right.$

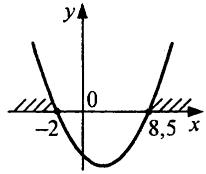
$d = -6 \Rightarrow x_1 = 11, x_2 = 5, x_3 = -1$, но по условию все числа положительны;
$d = 3 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 8$
Ответ: 2, 5, 8.

645. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 30, \\ x + y = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} (5-y)^2 - y^2 - 30 = 0, \\ x = 5 - y; \end{cases}$ $\begin{cases} 25 - 10y + y^2 - y^2 - 30 = 0, \\ x = 5 - y; \end{cases}$

$\begin{cases} -10y = 5, \\ x = 5 - y; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -0{,}5, \\ x = 5 - (-0{,}5); \end{cases}$ $\begin{cases} y = -0{,}5, \\ x = 5{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5{,}5, \\ y = -0{,}5. \end{cases}$

7-10898

646. а) 1) График функции $y = 2x^2 - 13x - 34$ – парабола, у которой ветви направлены вверх, (т.к коэффициент при x^2 положителен).



2) Решим уравнение $2x^2 - 13x - 34 = 0$;

$D = (-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-34) = 441$;

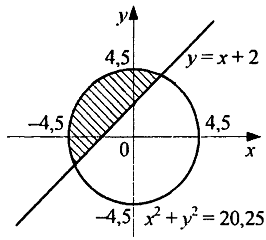
$$x_1 = \frac{13+21}{4} = 8{,}5;\ x_2 = \frac{13-21}{4} = -2.$$

3) $(-\infty; -2] \cup [8{,}5; +\infty)$.

б) $2x(5-2x)<0$; $x(x-2{,}5)>0$; $(-\infty; 0) \cup (2{,}5; +\infty)$.

в) $\dfrac{x-4}{2x+5} \le 0 \Leftrightarrow -2{,}5 < x \le 4$

647. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 20{,}25 \\ y - x \ge 2 \end{cases}$



648. $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$;

$$\text{а) } S_5 = \frac{8 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{8 \cdot \left(\frac{1}{32} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = -16\left(\frac{1}{32} - 1\right) = 16 - \frac{1}{2} = 15\frac{1}{2}.$$

$$\text{б) } S_5 = \frac{500 \cdot \left(\left(\frac{1}{5}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{500 \cdot \left(\frac{1}{3125} - 1\right)}{-\frac{4}{5}} = \frac{3124}{5} = 624{,}8.$$

649. а) $b_1 = 3$; $b_2 = -6$; $q = \dfrac{-6}{3} = -2$; $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$;

$$S_5 = \frac{3 \cdot \left((-2)^6 - 1\right)}{-2-1} = \frac{3 \cdot (64 - 1)}{-3} = -63.$$

б) $b_1 = 54$; $b_2 = 36$; $q = \dfrac{36}{54} = \dfrac{2}{3}$;

$$S_6 = \frac{54 \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^6 - 1\right)}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{54 \cdot \left(\frac{64}{729} - 1\right)}{-\frac{1}{3}} = \frac{665 \cdot 54 \cdot 3}{729 \cdot 1} = \frac{1330}{9} = 147\frac{7}{9}.$$

в) $b_1 = -32$; $b_2 = -16$;

$$q = \frac{-16}{-32} = \frac{1}{2};\ S_6 = \frac{-32 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 64\left(\frac{1}{64} - 1\right) = 1 - 64 = -63.$$

г) $b_1 = 1$; $b_2 = -\frac{1}{2}$; $q = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$; $S_6 = \frac{1\cdot((-\frac{1}{2})^6 - 1)}{-\frac{1}{2}-1} = \frac{2(\frac{1}{64}-1)}{-3} = \frac{21}{32}$.

650. $S_n = \frac{c_1(q^n-1)}{q-1}$;

а) $S_9 = \frac{-4\cdot(3^9-1)}{3-1} = -39364$. б) $S_9 = \frac{1\cdot\left(\left(-2^9\right)-1\right)}{-2-1} = 171$.

651. а) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{0,2\cdot 5^{n+1}}{0,2\cdot 5^n} = 5$. Значит (b_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 5$. $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{0,2\cdot 5\cdot(5^n-1)}{5-1} = \frac{5^n-1}{4}$.

б) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3\cdot 2^n}{3\cdot 2^{n-1}} = 2$. Значит (b_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 2$. $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{3\cdot 2^0\cdot(2^n-1)}{2-1} = 3(2^n-1)$.

в) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^{n+2}}{3^{n+1}} = 3$.

Значит (b_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 3$.

$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{3^2\cdot(3^n-1)}{3-1} = \frac{9}{2}(3^n-1)$.

652. а) $b_1 = 1$; $b_2 = 3$; $q = \frac{3}{1} = 3$;

$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1} = \frac{3^n-1}{2}$.

б) $b_1 = 2$; $b_2 = 4$; $q = \frac{4}{2} = 2$; $S_n = \frac{2\cdot(2^n-1)}{2-1} = 2\cdot(2^n-1)$.

в) $b_1 = \frac{1}{2}$; $b_2 = -\frac{1}{4}$; $q = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$; $S_n = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}{3}$.

г) $b_1 = 1$; $b_2 = -x$; $q = \frac{-x}{1} = -x$; $S_n = \frac{1\cdot((-x)^n-1)}{-x-1} = -\frac{(-x)^n-1}{x+1}$.

д) $b_1 = 1$; $b_2 = x^2$; $q = \frac{x^2}{1} = x^2$; $S_n = \frac{1(x^{2n}-1)}{x^2-1} = \frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$.

е) $b_1 = 1$; $b_2 = -x^3$; $q = \frac{-x^3}{1} = -x^3$; $S_n = \frac{1\cdot((-x^3)^n-1)}{-x^3-1} = -\frac{(-x^3)^n-1}{x^3+1}$.

653. а) $b_7 = b_1q^6$; $b_1 = \frac{b_7}{q^6} = \frac{72,9}{1,5^6} = 6,4$; $S_7 = \frac{6,4\cdot(1,5^7-1)}{1,5-1} = \frac{102,95}{0,5} = 205,9.$

б) $b_5 = b_1q^4$; $b_1 = \frac{b_5}{q^4} = \frac{16}{9}:\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16\cdot 34}{9\cdot 24} = 9;$

$$S_7 = \frac{9\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^7-1\right)}{\frac{2}{3}-1} = \frac{9\cdot\left(\frac{128}{2187}-1\right)}{-\frac{1}{3}} = \frac{2059}{81} = 25\frac{34}{81}.$$

654. а) $x_5 = x_1q^4$; $x_1 = \frac{x_5}{q^4} = \frac{\frac{10}{9}}{\left(\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{10\cdot 81}{9} = 90;$

$$S_5 = \frac{90\left(\left(\frac{1}{3}\right)^5-1\right)}{\frac{1}{3}-1} = \frac{90\cdot 242\cdot 3}{2\cdot 243} = 134\frac{4}{9}.$$

б) $x_4 = x_1q^3$; $x_1 = \frac{x_4}{q^3} = \frac{121,5}{(-3)^3} = -4,5;$

$$S_5 = \frac{-4,5\cdot\left((-3)^5-1\right)}{-3-1} = -\frac{9\cdot 244}{4\cdot 2} = -274,5.$$

655. $b_1 = 1$; $b_5 = 162$; $b_5 = b_1q^4$; $q^4 = \frac{b_5}{b_1} = \frac{162}{2} = 81 \Rightarrow q = 3$ или $q = -3$; но $q = 3$ — не удовлетворяет условию задачи, т.к. прогрессия знакопеременная, следовательно, $q = -3$; $S_6 = \frac{2\cdot((-3)^6-1)}{-3-1} = -\frac{728}{2} = -364.$

656. $b_2 = b_1q$; $b_4 = b_1\cdot q^3$; $\Rightarrow \frac{b_4}{b_2} = \frac{b_1q^3}{b_1q} = q^2$; $\frac{b_4}{b_2} = \frac{54}{6} = 9$; $q_1 = 3$; $q_2 = -3$ – не подходит по условию, следовательно, $q = 3$. $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{6}{3} = 2;$

$$S_7 = \frac{2\cdot(3^7-1)}{-3-1} = 2186.$$

657. $\begin{cases} b_1+b_2=8 \\ b_3+b_4=72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q)=8 \\ b_3(1+q)=72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1)1+q)=8 \\ b_1\cdot q^2(1+q)=72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q)=8 \\ q^2=9 \end{cases}$

т.к. $b_i > 0$, то $q = 3$ и $b_1 = 2$

$$S_n = b_1\frac{q^n-1}{q-1} = 3^n - 1 = 242 \Leftrightarrow n = 5$$

Ответ: $n = 5$.

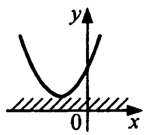
658. $b_n = b_1q^{n-1} \Rightarrow b_7 = b_1q^6$; $b_1 = \dfrac{b_7}{q^6} = \dfrac{0{,}012}{0{,}2^6} = 187{,}5$; $b_n = 187{,}5\cdot(0{,}2)^{n-1}$.

659. а) $\dfrac{2^{n+2} - 2^{n-2}}{2^n} = \dfrac{2^{n-2}(2^4 - 1)}{2^n} = \dfrac{15}{4}$

б) $\dfrac{25^n - 5^{2n-1}}{5^{2n}} = \dfrac{5^{2n-1}(5-1)}{5^{2n}} = \dfrac{4}{5}$

660. а) $x(1{,}5 - x) \le 0$; $x(x - 1{,}5) \ge 0$; $(-\infty; -0] \cup [1{,}5; +\infty)$.

б) 1) График функции $y = x^2 + x + 6$ – парабола, у которой ветви направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 положителен).



2) Решим уравнение $x^2 + x + 6 = 0$; $D = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 6 < 0$ –нет корней.
3) $(-\infty; +\infty)$.

661. Угол с вершиной в точке $\left(\dfrac{5}{3}; 5\right)$.

662. Пусть $n = 1$, тогда $\dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = 1 = 1^3$.

Пусть твержление верно при $n = k$, докажем его для $n = k + 1$.

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$$

$$= \frac{(k^2 + 4k + 4)(k+1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Что и требовалось доказать.

663. Пусть $n = 1$, тогда $1\cdot 2 = \dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3$.

Пусть утверждение верно при $n = k$, докажем его для $n = k + 1$.

$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n + 1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + k(k + 1) + (k + 1)(k + 2) =$

$$= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) =$$

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

Что и требовалось доказать.

664. Пусть $n = 1$, тогда $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1} = S_1$.

Пусть утверждение верно при $n = k$, докажем его для $n = k + 1$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}=\frac{n}{n+1}$$

Что и требовалось доказать.

665. Пусть $n = 1$, тогда $1 \cdot 4 = 1 \cdot (1 + 1)^2$.

Пусть утверждение верно при $n = k$, докажем его для $n = k + 1$.

$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + ... + n(3n + 1) =$

$= 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + ... + k(3k + 1) + (k + 1)(3k + 4) =$

$= k(k + 1)^2 + (k + 1)(3k + 4) = (k + 1)(k^2 + 4k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2 =$

$= n(n + 1)^2$

Что и требовалось доказать.

666. Пусть $n = 1$, тогда $b_1 = -3 = 3 \cdot 1^2 - 6$.

Пусть для $n = k$ $b_n = b_k = 3k^2 - 6$, докажем это для $n = k + 1$.

$b_n = b_{k+1} = b_k + 6k + 3 = 3k^2 - 6 + 6k + 3 = 3(k + 1)^2 - 6 = 3n^2 - 6$

Что и требовалось доказать.

667. Пусть $n = 1$, тогда $a_1 = -5 = 5 \cdot 1^2 - 10$.

Пусть для $n = k$ $a_n = a_k = 5k^2 - 10$, докажем это для $n = k + 1$.

$a_n = a_{k+1} = a_k + 10k + 5 = 5k^2 - 10 + 10k + 5 = 5(k + 1)^2 - 10 = 5n^2 - 10$

Что и требовалось доказать.

668. Пусть $n = 1$, тогда $49^n - 1 = 48$.

Пусть для $n = k$ это верно, докажем для $n = k + 1$.

$49^n - 1 = 49^{k+1} - 1 = 49 \cdot (49^k - 1 + 1) - 1 = 49(49^k - 1) + 48$

Так как $49^k - 1$ делится на 48, то $49^{k+1} - 1$ тоже делится на 48.

Что и требовалось доказать.

669. а) $u_1 + u_3 + u_5 ... + u_{2n-1} = u_{2n}$. $n = 1$, тогда $u_1 = u_2 = 1$

Пусть для $n = k$ это верно, докажем для $n = k + 1$.

$u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{2k-1} + u_{2k+1} = u_{2k} + u_{2k+1} = u_{2k+2} = u_{2(k+1)}$

Что и требовалось доказать.

б) $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + ... + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$. $n = 1$, тогда $u_1^2 = 1 = u_1 \cdot u_2$

Пусть это верно для $n = k$, докажем для $n = k + 1$.

$u_1^2 + u_2^2 + ... + u_k^2 + u_{k+1}^2 = u_k \cdot u_{k+1} + u_{k+1}^2 = u_{k+1}(u_k + u_{k+1}) = u_{k+1}u_{k+2}$

Что и требовалось доказать.

670. а) $c_1 = -2\cdot 1^2 + 7 = 5$; $c_2 = -2\cdot 2^2 + 7 = -1$; $c_3 = -2\cdot 3^2 + 7 = -11$;
$c_4 = -2\cdot 4^2 + 7 = -25$; $c_5 = -2\cdot 5^2 + 7 = -43$.

б) $c_1 = \frac{100}{1^2 - 5} = -25$; $c_2 = \frac{100}{2^2 - 5} = -100$; $c_3 = \frac{100}{3^2 - 5} = 25$;

$c_4 = \frac{100}{4^2 - 5} = \frac{100}{11} = 9\frac{1}{11}$; $c_5 = \frac{100}{5^2 - 5} = 5$.

в) $c_1 = -2,5\cdot 2^1 = -5$; $c_2 = -2,5\cdot 2^2 = -10$; $c_3 = -2,5\cdot 2^3 = -20$; $c_4 = -2,5\cdot 2^4 = -40$; $c_5 = -2,5\cdot 2^5 = -80$.
г) $c_1 = 3,2\cdot 2^{-1} = 1,6$; $c_2 = 3,2\cdot 2^{-2} = 0,8$; $c_3 = 3,2\cdot 2^{-3} = 0,4$; $c_4 = 3,2\cdot 2^{-4} = 0,2$; $c_5 = 3,2\cdot 2^{-5} = 0,1$.

д) $c_1 = \dfrac{(-1)^{1-1}}{4\cdot 1} = \dfrac{1}{4}$; $c_2 = \dfrac{(-1)^{2-1}}{4\cdot 2} = -\dfrac{1}{8}$; $c_3 = \dfrac{(-1)^{3-1}}{4\cdot 3} = \dfrac{1}{12}$;

$c_4 = \dfrac{(-1)^{4-1}}{4\cdot 4} = -\dfrac{1}{16}$; $c_5 = \dfrac{(-1)^{5-1}}{4\cdot 5} = \dfrac{1}{20}$.

е) $c_1 = \dfrac{1-(-1)^1}{2\cdot 1+1} = \dfrac{2}{3}$; $c_2 = \dfrac{1-(-1)^2}{2\cdot 2+1} = \dfrac{0}{5} = 0$; $c_3 = \dfrac{1-(-1)^3}{2\cdot 3+1} = \dfrac{2}{7}$;

$c_4 = \dfrac{1-(-1)^4}{2\cdot 4+1} = 0$; $c_5 = \dfrac{1-(-1)^5}{2\cdot 5+1} = \dfrac{2}{11}$.

671. а) $a_n = 5n$; $a_1 = 5\cdot 1 = 5$; $a_2 = 5\cdot 2 = 10$; $a_3 = 5\cdot 3 = 15$.
б) $a_n = 5n + 1$; $a_1 = 5\cdot 1 + 1 = 6$; $a_2 = 5\cdot 2 + 1 = 11$; $a_3 = 5\cdot 3 + 1 = 16$.

672. а) $y_2 = y_1 + 10 = -3 + 10 = 7$; $y_3 = y_2 + 10 = 17$; $y_4 = y_3 + 10 = 27$.

б) $y_1 = 10$; $y_2\cdot y_1 = 2,5$; $y_2 = \dfrac{2,5}{10} = 0,25$; $y_3\cdot y_2 = 2,5$; $y_3 = \dfrac{2,5}{0,25} = 10$;

$y_4\cdot y_3 = 2,5$; $y_4 = 0,25$.
в) $y_1 = 1,5$, $y_2 - y_1 = 1$; $y_2 = 1 + y_1 = 2,5$; $y_3 = 2 + 2,5 = 4,5$; $y_4 = 3 + 4,5 = 7,5$.
г) $y_1 = -4$; $y_2 : y_1 = -1^2$; $y_2 = -1^2\cdot(-4) = 4$; $y_3 = -2^2\cdot 4 = -16$; $y_4 = -3^2\cdot(-16) = 144$;

673. а) $a_3 = -19$; $a_4 = -11,5$; $d = a_4 - a_3 = -11,5 + 19 = 7,5$;
$a_5 = a_4 + d = -11,5 + 7,5 = -4$;
$a_2 = a_3 - d = -19 - 7,5 = -26,5$; $a_1 = a_2 - d = -26,5 - 7,5 = -34$.
б) $-8,5 + 2d = -4,5 \Rightarrow d = 2$; $a_2 = a_1 + d$; $a_1 = a_2 - d = -8,5 - 2 = -10,5$;
$a_n = a_1 + d(n-1)$; $a_3 = -10,5 + 2(3-1) = -10,5 + 4 = -6,5$;
$a_5 = -10,5 + 2(5-1) = -10,5 + 8 = -2,5$;
$a_6 = -10,5 + 2(6-1) = -10,5 + 10 = -0,5$.

674. $p = a_1 + a_2 + a_3 = 24$, a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия, значит, $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, поэтому периметр $p = 3a_1 + 3d = 3(a_1 + d)$; $3(a_1 + d) = 24$; $a_1 + d = 8$; но $a_1 + d = a_2$, значит $a_2 = 8$. $p - 8 = a_1 + a_3 = 16$, $a_3 = 16 - a_1$. Следовательно, a_1 может принимать любое целое значение от 1 до 15. Итак, стороны Δ равны a, 8, $16-a$, где $a \in Z$, $1 \le a \le 15$.

675. $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 180°$; $\varphi_2 = \varphi_1 + d$, $\varphi_3 = \varphi_2 + d = \varphi_1 + 2d$.
Тогда $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_1 + d + \varphi_1 + 2d = 3\varphi_1 + 3d$; $3(\varphi_1 + d) = 180°$;
$\varphi_1 + d = \varphi_2 = 60°$.

676. а) $a_4 - a_2 = 2d$; $a_{2n+2} - a_{2n} = 2d$. Следовательно, (a_{2n}) — арифметическая прогрессия с разностью $2d$.
б) $(a_{n+1} - 1) - (a_n - 1) = a_{n+1} - a_n = d$. Следовательно, $(a_n - 1)$ — арифметическая прогрессия с разностью d.
в) $2a_{n+1} - 2a_n = 2(a_{n+1} - a_n) = 2d$. Следовательно, $(2a_n)$ — арифметическая прогрессия с разностью $2d$.
г) $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} - a_n)(a_1 + dn + a_1 + d(n-1)) = d(2a_1 + d(2n-1))$ – зависит от n. Следовательно, (a_n^2) — не является арифметической прогрессией.

677. а) $a_n = a_1 + d(n-1)$; $a_{12} = 9\sqrt{3} - 2 + (2-\sqrt{3})\cdot(12-1) =$
$= 9\sqrt{3} - 2 + 22 - 11\sqrt{3} = 20 - 2\sqrt{3}$.

б) $a_n = a_1 + d(n-1)$; $a_8 = \frac{5\sqrt{3}-7}{3} + \frac{\sqrt{3}-2}{3}\cdot(8-1) = \frac{5\sqrt{3}-7}{3} + \frac{7\sqrt{3}-14}{3} =$

$= \frac{5\sqrt{3}-7+7\sqrt{3}-14}{3} = \frac{12\sqrt{3}-21}{3} = 4\sqrt{3} - 7$.

678. а) $\frac{a_n - a_1}{d} + 1 = n$; $\frac{-2,94-1,26}{-0,3} + 1 = 15$.

б) $a_n = a_1 + d(n-1)$; $a_5 = a_1 - 0,6\cdot 4 = a_1 - 2,4 = -3,7$; $a_1 = -1,3$; $a_n = -1,3 - 0,6(n-1) =$
$= -0,7 - 0,6n = -9,7$; $0,6n = 9$; $n = 15$.

379. а) $b_n = b_1 + d(n-1)$; $b_n = 2\frac{3}{4} + \frac{2}{5}(n-1) = 2\frac{3}{4} + \frac{2}{5}n - \frac{2}{5} = \frac{47}{20} + \frac{2}{5}n$;

$\frac{47}{20} + \frac{2}{5}n = 14\frac{3}{4} = \frac{59}{4}$; $\frac{2}{5}n = \frac{59}{4} - \frac{47}{20} = \frac{295-47}{20} = \frac{248}{20}$; $n = \frac{248\cdot 5}{20\cdot 2} = 31$;

следовательно, $b_{31} = 14\frac{3}{4}$.

б) $b_n = b_1 + d(n-1)$; $b_n = \frac{47}{20} + \frac{2}{5}n$; $\frac{47}{20} + \frac{2}{5}n = 8,35$; $\frac{2}{5}n = 8\frac{7}{20} - 2\frac{7}{20} = 6$;

$n = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15$; следовательно, $b_{15} = 8,35$.

680. а) $d = (-10\frac{1}{4}) - (-10\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$; $a_n = -10\frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{4}$; $-10\frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{4} > 0$;

$-10\frac{1}{2} + \frac{1}{4}n - \frac{1}{4} > 0$; $-10\frac{3}{4} > -\frac{1}{4}n$; $\frac{1}{4}n > \frac{43}{4}$; $n > 43 \Rightarrow n = 44$.

Следовательно, $a_{44} = -10\frac{1}{2} + \frac{43}{4} = -\frac{21}{2} + \frac{43}{4} = \frac{43}{4} - \frac{42}{4} = \frac{43-42}{4} = \frac{1}{4}$.

б) $d = 8\frac{1}{3} - 8\frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6}$; $a_n = 8\frac{1}{3} + (n-1)d$; $8\frac{1}{3} + (n-1)(-\frac{1}{6}) < 0$;

$\frac{25}{3} - \frac{1}{6}n + \frac{1}{6} < 0$; $\frac{50+1}{6} < \frac{1}{6}n$; $n > 51 \Rightarrow n = 52$

Следовательно,

$a_{52} = 8\frac{1}{3} + (52-1)(-\frac{1}{6}) = 8\frac{1}{3} - \frac{51}{6} = \frac{50-51}{6} = -\frac{1}{6}$.

681. а) $y_n = y_1 + d(n-1)$; $y_2 = y_1 + d$; $y_7 = y_1 + 6d$; $y_4 = y_1 + 3d$; $y_5 = y_5 + 4d$;
следовательно, $y_2 + y_7 - y_4 - y_5 = y_1 + d + y_1 + 6d - (y_1 + 3d) - (y_1 + 4d) = 0$, т.е.
$y_2 + y_7 = y_4 + y_5$.

б) $y_n = y_1 + d(n-1)$; $y_{n-5} = y_1 + d(n-6)$; $y_{n+10} = y_1 + d(n+9)$; $y_{n+5} = y_1 + d(n+4)$;
следовательно,
$y_{n-5} + y_{n+10} - y_n - y_{n+5} = y_1 + d(n-6) + y_1 + d(n+9) - y_1 - d(n-1) - y_1 - d(n+4) =$
$= d(n - 6 + n + 9 - n + 1 - n - 4) = 0$, т.е. $y_{n-5} + y_{n+10} = y_n + y_{n+5}$.

682. $x_m = x_1 + d(m-1)$; $x_n = x_1 + d(n-1)$.

$x_m - x_n = x_1 + d(m-1) - x_1 - d(n-1) = dm - dn = d(m-n)$, $\Rightarrow d = \dfrac{x_m - x_n}{m-n}$.

683. а) $a_{37} = a_{20} + 17d \Rightarrow d = \dfrac{a_{37} - a_{20}}{17} = -0{,}1$.

б) $a_{100} = a_{10} + 90d = 270 + 90(-3) = 0$.

684. а) $a_1 = \dfrac{2}{3}$; $a_2 = \dfrac{3}{4}$; $d = a_2 - a_1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{9-8}{12} = \dfrac{1}{12}$;

$S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$;

$S_{10} = \dfrac{2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{12}(10-1)}{2} \cdot 10 = \dfrac{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}}{2} \cdot 10 = \dfrac{(16+9) \cdot 5}{12} = 10\dfrac{5}{12}$;

б) $a_1 = \sqrt{3}$; $a_2 = \sqrt{12}$; $d = a_2 - a_1 = \sqrt{12} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$

$S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$;

$S_{10} = \dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{3}(10-1)}{2} \cdot 10 = \dfrac{2\sqrt{3} + 9\sqrt{3}}{2} \cdot 10 = 11\sqrt{3} \cdot 5 = 55\sqrt{3}$;

685. а) $a_1 = 2$; $a_2 = 6$; $d = a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4$; $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$;

$198 = 2 + 4(n-1)$; $n = 50$; $S_{50} = \dfrac{2 \cdot 2 + 4(50-1)}{2} \cdot 50 = 5000$;

б) $a_1 = 95$; $a_2 = 85$; $d = a_2 - a_1 = 85 - 95 = -10$; $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$;

$-155 = 95 - 10(n-1)$; $n = 26$; $S_{26} = \dfrac{2 \cdot 95 - 10(26-1)}{2} \cdot 26 = -780$.

686. Пусть O — вершина, $A_1, \ldots, A_{12}$ — на одной стороне угла ($A_kA_{k+1} = a$), $B_1, \ldots B_{12}$ — на другой стороне угла $\Delta OA_kB_k \sim \Delta OA_1B_1$. Значит, $\dfrac{A_kB_k}{A_1B_1} = \dfrac{OA_k}{OA_1} = k$; $A_kB_k = kA_1B_1$; $A_{k+1}B_{k+1} - A_kB_k = A_1B_1$. Следовательно, длины отрезков являются членами арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 3$ и разностью $d = a_1 = 3$, а сумма их длин равна

$S_{12} = \dfrac{2a_1 + d(12-1)}{2} \cdot 12 = \dfrac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 11}{2} \cdot 12 = 6 \cdot 3(2 + 11) = 18 \cdot 13 = 234$ см.

687. а) $a_n = a_1 + d(n-1) = a_1 + 11(-0{,}4)$; $2{,}4 = a_1 - 4{,}4$; $a_1 = 6{,}8$

$S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$; $S_{12} = \dfrac{2 \cdot 6{,}8 - 0{,}4 \cdot 11}{2} \cdot 12 = 6 \cdot 9{,}2 = 55{,}2$.

б) $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = 250$; $\dfrac{-70 + 5(n-1)}{2} \cdot n = 250$;

$n^2–15n–100 = 0$; $D = (-15)^2–4\cdot 1\cdot(-100) = 625$;

$n = \dfrac{15 \pm 25}{2}$; $n = 20$ или $n = -5$, не подходит по смыслу задачи

$a_n = a_{20} = a_1 + d(n–1) = -35 + 5\cdot 19 = 60$.

в) $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$; $2525 = \dfrac{a_1 + 50}{2}\cdot n$; $5050 = (a_1 + 50)n$. В тоже время $a_n = a_1 + d(n–1)$; $50 = a_1 + \dfrac{1}{2}(n–1)$. Имеем систему:

$$\begin{cases} 5050 = a_1 n + 50n; \\ 50 = a_1 + \dfrac{1}{2}n - \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{101-n}{2}\cdot n + 50n = 5050 \\ a_1 = \dfrac{101-n}{2} \end{cases}$$

$5050 = \dfrac{101}{2}n - \dfrac{n^2}{2} + 50n$; $n^2–201n + 10100 = 0$; $D = (-201)^2–4\cdot 1\cdot 10100 = 1$;

$n = \dfrac{201 \pm 1}{2}$; $n_1 = 100$ или $n_2 = 101$; $n_1 = 100$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$; $n_2 = 101$, $a_1 = 0$.

г) $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$; $-450 = \dfrac{-\dfrac{1}{2} - 29\dfrac{1}{2}}{2}\cdot n$; $900 = 30n$; $n = 30$. $a_n = a_1 + d(n–1)$;

$-29\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + d(30–1)$; $-29\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} + 29d$; $-29 = 29d$; $d = -1$.

688. $x_{10} = x_1 + 9d$; $1 = x_1 + 9d$; $S_{16} = \dfrac{2x_1 + 15d}{2}\cdot 16$; $4 = (2x_1 + 15d)8$. Получим

систему: $\begin{cases} x_1 + 9d = 1, \\ 4x_1 + 30d = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1 - 9d, \\ 4(1-9d) + 30d = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1 - 9d, \\ 6d = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{7}{2}, \\ d = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

689. а) $d = 1$; $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$; Найдем количество двузначных чисел:

$99 = 10 + n–1$; $n = 90$; $S_{90} = \dfrac{2\cdot 10 + 1(90-1)}{2}\cdot 90 = 4905$.

б) $d = 1$; $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$; Найдем количество двузначных чисел:

$999 = 100 + n–1$; $n = 900$; $S_{900} = \dfrac{2\cdot 100 + 1(900-1)}{2}\cdot 900 = 494550$.

690. а) $a_n = 2n$. $2n \le 200$; $n \le 100$. $a_1 = 2$; $a_{100} = 2\cdot 100 = 200$; $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$;

$S_{100} = \dfrac{(2 + 200)}{2}\cdot 100 = 10100$.

б) $a_n = 2n-1$. $2n-1 \le 150$; $2n \le 151$; $n \le 75{,}5$; $n = 75$ $a_1 = 1$; $a_{75} = 2 \cdot 75 - 1 = 149$;

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$; $S_{75} = \dfrac{(1+149)}{2} \cdot 75 = 5625$.

в) $a_1 = 102$; $a_{33} = 198 = a_1 + 33(n-1)$; $n = 33$; $a_n = 3n$.

$S_{33} = \dfrac{(102+198)}{2} \cdot 33 = 4950$.

691. а) Числа, не кратные трем, имеют вид: $b_n = 1 + 3(n-1)$ и $c_n = 2 + 3(n-1)$. Получим:

1) $b_n < 100$; $1 + 3(n-1) < 100$; $3(n-1) < 99$; $n-1 < 33$; $n < 34$, тогда

$S_n = S_{33} = \dfrac{2 \cdot 1 + 3(n-1)}{2} \cdot n = \dfrac{2 + 3 \cdot 32}{2} \cdot 33 = (1 + 3 \cdot 16) \cdot 33 = 49 \cdot 33 = 1617$;

2) $c_n < 100$; $2 + 3(n-1) < 100$; $3(n-1) < 98$; $n-1 < \dfrac{98}{3}$; $n < 32\dfrac{2}{3} + 1$. Тогда:

$S_{33} = \dfrac{2 \cdot 2 + 3(33-1)}{2} \cdot 33 = \dfrac{4 + 3 \cdot 32}{2} \cdot 33 = (2 + 3 \cdot 16) \cdot 33 = 50 \cdot 33 = 1650$;

3) $S = 1657 + 1650 = 3267$.

б) Рассмотрим арифметические прогрессии $a_n = 51 + (n-1)$ и $b_n = 55 + 5(n-1)$, тогда искомая сумма $S = S_{an} - S_{bn}$, найдем S_{an} и S_{bn}:

1) $a_n = 149$; $149 = 51 + n - 1$; $n = 149 - 50 = 99$. $S_{an} = S_{99} = \dfrac{149+51}{2} \cdot 99 =$
$= 99 \cdot 100 = 9900$.

2) $b_n = 145$ — наибольшее число, кратное 5 и меньшее 150;
$145 = 55 + 5(n-1)$; $145 = 55 + 5n - 5$; $5n = 145 - 50 = 95$; $n = 19$;

$S_{bn} = S_{19} = \dfrac{55+145}{2} \cdot 19 = 100 \cdot 19 = 1900$.

3) $S = S_{an} - S_{bn} = 9900 - 1900 = 8000$.

692. а) $a_n = 1 + (n-1)$; $S_n = \dfrac{2 \cdot 1 + 1(n-1)}{2} \cdot n = \dfrac{n}{2}(n+1)$;

по условию $5a_{n+1} = S_n$; тогда $5(1 + (n-1) + 1) = \dfrac{n}{2}(n+1)$;

$5(n+1) = \dfrac{n}{2}(n+1)$; т.к. $n + 1 \ne 0$; тогда $\dfrac{n}{2} = 5$, $n = 10$.

Искомое число $a_{n+1} = a_{11} = 1 + (11-1) = 11$.

б) По условию $a_{n+1} = S_n$; $n + 1 = \dfrac{n}{2}(n+1)$; $\dfrac{n}{2} = 1$; $n = 2$;

аналогично $a_3 = 3$.

693. $a_1 = 2$; $a_2 = 5$; $d = a_2 - a_1 = 3$; $a_n = 2 + 3(n-1) = 3n-2$. При замене четных членов на противоположное число последовательность имеет вид 2; –5; 8; –11; 14; –17;... При $n = 2k$ ее член $x_n = -a_n$, при $n = 2k+1$ имеем $x_n = a_n$; следовательно, $x_n = (-1)^{n+1} a_n = (-1)^{n+1}(3n-2)$.

Сумма n членов этой последовательности равна $S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n =$
$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n = (a_1 + a_3 + \ldots) - (a_2 + a_4 + \ldots)$.

$S_{50} = S' - S''$, где S' – сумма нечетных членов, S'' – сумма четных членов.

Последовательность нечетных членов (a_n): a_1; a_3; ...; a_{2k-1}; ... $n \le 50$, т.е. $2k-1 \le 50$, $2k \le 51$; $k \le 25$. Это — арифметическая прогрессия с разностью $2d$: $a_{2k-1}-a_{2(k-1)-1} = a_1 + (2k-1-1)d - a_1 - (2(k-1)-2)d = (2k-2)d - (2k-4)d =$ $= 2d$. $S' = \frac{2a_1 + 2d \cdot 24}{2} \cdot 25 = (2 + 24 \cdot 3) \cdot 25 = 1850$.

Последовательность a_{2k} четных членов (a_n); является арифметической прогрессией с разностью $2d$, и с первым членом, равным a_2; $2k \le 50$, т.е. $k \le 25$.

$$S'' = \frac{2 \cdot a_2 + 2d \cdot 24}{2} \cdot 25 = (5 + 3 \cdot 24) \cdot 25 = 1925.$$

Итак, искомая сумма $S'_{50} = 1850 - 1925 = -75$.

694. а) $\frac{x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \ldots \cdot x^n}{x \cdot x^3 \cdot x^5 \cdot \ldots \cdot x^{2n-1}} = \frac{x^{1+2+\ldots+n}}{x^{1+3+\ldots+2n-1}}$; $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n}{2}(n+1)$;

$$1 + 3 + \ldots + (2n-1) = \frac{1+(2n-1)}{2} \cdot n = n^2;\ \frac{x^{\frac{n}{2}(n+1)}}{x^{n^2}} = x^{\frac{1}{2}n^2 + \frac{n}{2} - n^2} = x^{\frac{n-n^2}{2}}.$$

б) $$\frac{x^2 \cdot x^4 \cdot x^6 \cdot \ldots \cdot x^{2n}}{x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \ldots \cdot x^n} = \frac{x^{2+4+\ldots+2n}}{x^{1+2+\ldots+n}} = \frac{(x^2)^{1+2+\ldots+n}}{x^{1+2+\ldots+n}} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{x}\right)^{1+2+\ldots+n} = x^{1+2+\ldots+n} = x^{\frac{n}{2}(n+1)}.$$

695. а) $a_1 = 8{,}2$; $a_2 = 7{,}4$; $d = 7{,}4 - 8{,}2 = -0{,}8$. Определим номер последнего положительного члена прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1) > 0$; $8{,}2 + (-0{,}8)(n-1) > 0$;

$8{,}2 - 0{,}8n + 0{,}8 > 0$; $0{,}8n < 9$; $n < 9:0{,}8$; $9:0{,}8 = 9\frac{5}{4} = 11{,}25$; $n < 11\frac{1}{4}$, т.е. $n \le 11$.

Итак, последним положительным членом является a_{11}.
Тогда:

$$S_{11} = \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = \frac{2 \cdot 8{,}2 + 10 \cdot (-0{,}8)}{2} \cdot 11 = 46{,}2.$$

б) $a_1 = -6{,}5$; $a_2 = -6$; $d = -6 + 6{,}5 = 0{,}5$.
Определим номер последнего отрицательного члена последовательности:
$a_n = a_1 + d(n-1) < 0$; $-6{,}5 + 0{,}5(n-1) < 0$; $-6{,}5 + 0{,}5n - 0{,}5 < 0$;
$0{,}5n < 6{,}5 + 0{,}5$; $0{,}5n < 7$; $n < 14$.
Итак, последним отрицательным членом является a_{13}. Тогда:

$$S_{13} = \frac{2a_1 + 12d}{2} \cdot 13 = \frac{-6{,}5 \cdot 2 + 12 \cdot 0{,}5}{2} \cdot 13 =$$

$$= \frac{-13+6}{2} \cdot 13 = -\frac{7}{2} \cdot 13 = -45{,}5.$$

696. $S_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = (2a_1 + 9d) \cdot 5 = 100$; $2a_1 + 9d = 20$

$$S_{30} = \frac{2a_1 + 29d}{2} \cdot 30 = (2a_1 + 29d) \cdot 15 = 900;\ 2a_1 + 29d = 60.$$

Получим систему: $\begin{cases}2a_1+9d=20\\2a_1+29d=60\end{cases}$ $\begin{cases}2a_1+9d=20\\20d=40\end{cases}$ $\begin{cases}2a_1+9d=20\\d=2\end{cases}$ $\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$.

$S_{40}=\dfrac{2a_1+39d}{2}\cdot 40=(2+2\cdot 39)\cdot 20=80\cdot 20=1600.$

697. а) $S_{20}=\dfrac{2a_1+19d}{2}\cdot 20=(2a_1+19d)\cdot 10=1000;\ 2a_1+19d=100$

$S_{40}=\dfrac{2a_1+39d}{2}\cdot 40=(2a_1+39d)\cdot 20=10000;\ 2a_1+39d=500.$

Получим систему:

$\begin{cases}2a_1+19d=100\\2a_1+39d=500\end{cases}$; $\begin{cases}2a_1+19d=100\\20d=400;\end{cases}$ $\begin{cases}a_1=-140\\d=20\end{cases}$

$a_{50}=a_1+49d=-140+49\cdot 20=140\cdot 6=840.$

б) $S_5=\dfrac{2a_1+4d}{2}\cdot 5=(a_1+2d)\cdot 5=0{,}5;\ a_1+2d=0{,}1;$

$S_{15}=\dfrac{2a_1+14d}{2}\cdot 15=(a_1+7d)\cdot 15=-81;\ a_1+7d=-5{,}4.$ Тогда:

$\begin{cases}a_1+2d=0{,}1,\\a_1+7d=-5{,}4;\end{cases}$ $\begin{cases}a_1+2d=0{,}1\\5d=-5{,}5\end{cases}$ $\begin{cases}a_1=2{,}3\\d=-1{,}1\end{cases}$

Тогда $a_{50}=a_1+49d=2{,}3+49(-1{,}1)=-51{,}6.$

698. а) $a_n=2n+1;\ a_1=2\cdot 1+1=3;$

$S_n=\dfrac{(a_1+a_n)}{2}\cdot n=\dfrac{(3+2n+1)n}{2}=\dfrac{4n+2n^2}{2}=2n+n^2.$

б) $a_n=3-n;\ a_1=3-1=2;\ S_n=\dfrac{(a_1+a_n)}{2}\cdot n=\dfrac{(2+3-n)}{2}\cdot n=\dfrac{5n-n^2}{2}.$

699. $S_n=n^2-8n;\ a_1=S_1=-7$, т.к. $S_n=S_{n-1}+a_n$, то $a_n=S_n-S_{n-1}=$
$=n^2-8n-((n-1)^2-8(n-1))=n^2-8n-(n^2-2n+1-8n+8)=2n-9=$
$=-7+2(n-1).$

Следовательно (a_n) является арифметической прогрессией. $a_5=-7+2\cdot 4=1.$

700. $S_n=\dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}n=a_1n+\dfrac{d}{2}(n-1)n=\dfrac{d}{2}n^2+n(a_1-\dfrac{d}{2}).$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях n; получим:

а) $S_n=-n^2+3n=\dfrac{d}{2}n^2+(a_1-\dfrac{d}{2})n.\ d=-2;\ a_1+1=3,\ a_1=2.$

б), в), г) не являются арифметическими прогрессиями, так как в их формулах суммы n членов присутствует слагаемое, не зависящее от n.

701. а) $q=\dfrac{b_3}{b_4}=-\dfrac{135}{225}=-\dfrac{3}{5}=-0{,}6;\ b_2=\dfrac{b_3}{q}=\dfrac{225\cdot 3}{-5}=-135;\ b_1=$

$\dfrac{b_2}{q}=\dfrac{-135\cdot 3}{-5}=81;\ b_6=b_5\cdot q=81\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-48{,}6.$

б) $q = \frac{b_5}{b_4} = \frac{54}{36} = 1{,}5$; $b_3 = \frac{b_4}{q} = \frac{36}{1{,}5} = 24$; $b_2 = \frac{b_3}{q} = \frac{24}{1{,}5} = 16$;

$b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{16}{1{,}5} = 1\frac{2}{3}$;

702. а) $y_n = x_n + 1$; $y_{n+1} = x_{n+1} + 1$;

Найдем знаменатель геометрической прогрессии:

$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1}+1}{x_n+1} = \frac{x_1q^n+1}{x_1q^{n-1}+1}$ — зависит от n, следовательно, (y_n) не является геометрической прогрессией.

б) $y_n = 3x_n$; $y_{n+1} = 3x_{n+1}$;

Найдем знаменатель геометрической прогрессии:

$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{3x_n+1}{3x_n} = \frac{x_n+1}{x_n} = q$; значит (y_n) является геометрической прогрессией со знаменателем q.

в) $y_n = x_n^2$; $y_{n+1} = x_{n+1}^2$;

Найдем знаменатель геометрической прогрессии:

$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1}^2}{x_n^2} = \frac{(x_1q^n)^2}{(x_1q^{n-1})^2} = \frac{x_1^2q^{2n}}{x_1^2q^{2(n-1)}} = \frac{q^{2n}}{q^{2(n-1)}} = q^2$; значит (y_n) является геометрической прогрессией со знаменателем q^2.

г) $y_n = \frac{1}{x_n}$; $y_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1}}$;

Найдем знаменатель геометрической прогрессии: $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{q}$; значит (y_n) является геометрической прогрессией со знаменателем $\frac{1}{q}$.

703. Пусть x_1, x_2, x_3 — арифметическая прогрессия, тогда $x_2 = x_1 + d$, $x_3 = x_1 + 2d = x_2 + d$. Пусть x_1, x_2, x_3 — геометрическая прогрессия, тогда $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2}$,

$x_2^2 = x_1 \cdot x_3$; $(x_1 + d)^2 = x_1(x_1 + 2d)$; $x_1^2 + 2x_1d + d^2 = x_1^2 + 2dx_1$; $d^2 = 0$, $d = 0$, это значит, что $x_1 = x_2 = x_3$ – любые числа, не равные нулю.

704. а) Найдем следующее отношение: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$; следовательно, (x_n) является геометрической прогрессией со знаменателем $q = 2$.

б) Найдем следующее отношение: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3^{-n-1}}{3^{-n}} = \frac{1}{3}$; $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n$, следовательно, (x_n) является геометрической прогрессией со знаменателем $q = \frac{1}{3}$.

в) Найдем следующее отношение: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{n^2}$ — зависит от n, следовательно, (x_n) не геометрическая прогрессия.

г) Найдем следующее отношение: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{ab^{n+1}}{ab^n} = b$; следовательно, (x_n) является геометрической прогрессией со знаменателем $q = b$.

705. а) $b_n = b_1q^{n-1}$; $b_8 = \frac{243}{256}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{8-1} = \frac{3^5\cdot 2^7}{2^8\cdot 3^7} = \frac{1}{2^1\cdot 3^2} = \frac{1}{18}$.

б) $b_n = b_1q^{n-1}$; $b_5 = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\left(-\sqrt{6}\right)^{5-1} = \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{6})^4}{\sqrt{3}} = 36\frac{\sqrt{6}}{3} = 12\sqrt{6}$.

706. $b_5 = 135$; $b_9 = \frac{5}{3}$; $b_9 = b_5q^4$; $q^4 = \frac{b_9}{b_5} = \frac{5\cdot 1}{3\cdot 135} = \frac{1}{81}$; $q_1 = \frac{1}{3}$; $q_2 = -\frac{1}{3}$;

1) $q = \frac{1}{3}$; $b_6 = 135\cdot\frac{1}{3} = 45$; $b_7 = 45\cdot\frac{1}{3} = 15$; $b_8 = 15\cdot\frac{1}{3} = 5$.

2) $q = -\frac{1}{3}$; $b_6 = 135\cdot(-\frac{1}{3}) = -45$; $b_7 = -45\cdot(-\frac{1}{3}) = 15$; $b_8 = 15\cdot(-\frac{1}{3}) = -5$.

707. $b_n = b_1q^{n-1}$; $b_{n+1} = b_1q^n$. Рассмотрим разность: $b_{n+1} - b_n = b_1q^{n-1}(q-1)$;
а) $b_1>0$, $q>1$; следовательно, $b_{n+1}>b_n$.
б) $b_1>0$, $0<q<1$; следовательно, $b_{n+1}<b_n$.
в) $b_1<0$, $q>1$; следовательно, $b_{n+1}<b_n$.
г) $b_1<0$, $0<q<1$; следовательно, $b_{n+1}>b_1$.

708. а) $a_n = a_1q^{n-1}$; $a_2 = a_1q$; $a_3 = a_1q^2$; $a_5 = a_1q^4$; $a_6 = a_1q^5$.
$a_1q\cdot a_1q^5 - a_1q^2\cdot a_1q^4 = a_1^2q^6 - a_1^2q^6 = 0$. Следовательно, $a_2a_6 = a_3a_5$.
б) $a_n = a_1q^{n-1}$; $a_{n-3} = a_1q^{n-4}$; $a_{n+8} = a_1q^{n+7}$; $a_{n+5} = a_1q^{n+4}$.
$a_1q^{n-4}\cdot a_1q^{n+7} - a_1q^{n-1}\cdot a_1q^{n+4} = a_1^2q^{2n+3} - a_1^2q^{2n+3} = 0$; следовательно,
$a_{n-3}a_{n+8} = a_na_{n+5}$

709. $b_n = b_1q^{n-1}$; $b_m = b_1q^{m-1}$;

Рассмотрим отношение $\frac{b_n}{b_m} = \frac{b_1q^{n-1}}{b_1q^{m-1}} = q^{n-1-(m-1)} = q^{n-m}$; следовательно,
$b_n = b_mq^{n-m}$.

710. $S_n = \frac{x_1(q^n-1)}{q-1}$; $20\frac{1}{3} = \frac{x_1\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^5-1\right)}{-1\frac{1}{3}}$; $\frac{61}{3}\cdot(-\frac{4}{3}) = x_1(-\frac{1}{3^5}-1)$;

$x_1 = \frac{61\cdot 4}{9}\cdot\frac{3^5}{1+3^5} = \frac{61\cdot 4\cdot 3^3}{1+3^5} = \frac{244\cdot 27}{244} = 27$,

$x_n = x_5 = 27\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3}$.

б) $S_n = x_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$;

Исходя из условия, запишем систему:

$$\begin{cases}165 = 11\dfrac{q^n-1}{q-1},\\ 88 = 11q^{n-1};\end{cases} \quad \begin{cases}15 = \dfrac{8q-1}{q-1},\\ q^{n-1} = 8;\end{cases} \quad \begin{cases}7q = 14,\\ q^{n-1} = 8;\end{cases} \quad \begin{cases}q = 2,\\ n = 4.\end{cases}$$

в) $x_1 = \dfrac{1}{2}$; $S_n = x_1\dfrac{q^n-1}{q-1} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{3}{2}}$; $\dfrac{21}{64} = -\dfrac{1}{3}\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n - 1\right)$;

$\dfrac{63}{64} = \dfrac{(-1)^n}{2^n} - 1$; $\dfrac{1}{64} = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$; $\dfrac{1}{64} > 0 \Rightarrow n$ – четно $\Rightarrow (-1)^n = 1$; $\dfrac{1}{64} = \dfrac{1}{2^n}$;

$n = 6$. $x_n = x_6 = \dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5 = -\dfrac{1}{2^6} = -\dfrac{1}{64}$.

г) $q = \sqrt{3}$; $S_n = \dfrac{x_nq^n - x_1}{q-1} = \dfrac{18\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} - x_1}{\sqrt{3}-1}$;

$26\sqrt{3} + 24 = \dfrac{3\cdot 18 - x_1}{\sqrt{3}-1}$;

$(26\sqrt{3} + 24)(\sqrt{3} - 1) = 3\cdot 18 - x_1$;

$26\cdot 3 + 24\sqrt{3} - 26\sqrt{3} - 24 - 3\cdot 18 = -x_1$; $x_1 = 2\sqrt{3}$;

$x_n = x_1q^{n-1}$; $18\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,(\sqrt{3})^{n-1}$; $9 = 9^{\frac{n-1}{4}}$; $n = 5$.

711. $x_n = S_n - S_{n-1}$; $x_n = \dfrac{3}{4}(5^n - 1) - \dfrac{3}{4}(5^{n-1} - 1) = \dfrac{3}{4}(5^n - 5^{n-1}) = \dfrac{3}{4}\cdot 5^{n-1}\cdot 4 = 3\cdot 5^{n-1}$.

Следовательно, (x_n) является геометрической прогрессией с $x_1 = 3$ и $q = 5$.

712. $S_5 = b_1\dfrac{q^5-1}{q-1} = \dfrac{11}{64}$; $S_{10} - S_5 = b_1\cdot\dfrac{q^{10}-1}{q-1} - b_1\cdot\dfrac{q^5-1}{q-1} =$

$= \dfrac{b_1}{q-1}\left(q^{10} - q^5\right) = q^5\cdot S_5 = -\dfrac{11}{2}$; $-\dfrac{11}{2} = q^5\dfrac{11}{2}$; $q^5 = -\dfrac{11}{2}\cdot\dfrac{11}{2} = -\dfrac{64}{2} = -32$.

$S_{15} - S_{10} = \dfrac{b_1}{q-1}(q^{15} - 1 - q^{10} + 1) = \dfrac{b_1}{q-1}q^{10}(q^5 - 1) = q^{10}\cdot S_5 = (-32)^2$.

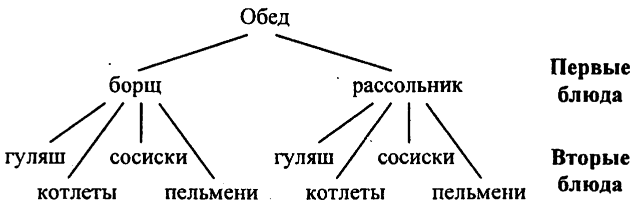
$S_5 = 16\cdot 64\cdot\dfrac{11}{64} = 16\cdot 11 = 176$.

713. а) $q = x$; $S_n = b_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$; $S_5 = \dfrac{x^5-1}{x-1}$

б) $q = -x$; $S_n = b_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$; $S_7 = \dfrac{-x^7-1}{-x-1} = \dfrac{x^7+1}{x+1}$.

ГЛАВА V. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 11. Элементы комбинаторики



714.

715: Всего таких вариантов 10: ВЗ, ВМ, ВП, ВС, ЗМ, ЗП, ЗС, МП, МС, ПС.

716. Всего таких способов 12: АВ, АС, АД, ВА, ВС, ВД, СА, СВ, СД, ДА, ДВ, ДС.

717.

1-я ваза	0	1	2	3
2-я ваза	3	2	1	0

718. а) 16, 18, 61, 68, 81, 86; б) 30, 34, 40, 43.

719. а) 12, 13, 21, 23, 31, 32; б) 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.

720. 204, 206, 240, 246, 260, 264, 402, 406, 420, 426, 460, 462, 602, 604, 620, 624, 640, 642.

721. $8 + 7 + ... + 2 + 1 = 36$ партий.

722. $2 \cdot 11 + 2 \cdot 10 + ... + 2 \cdot 2 + 2 = 2(11 + 10 + ... + 2 + 1) = 132$ игры.

723. $7 + 6 + ... + 2 + 1 = 28$ рукопожатий.

724. Каждый отдал 23 фотографии, поэтому потребовалось $23 \cdot 24 = 552$ фотографии.

725. Всего таких кодов $10^2 = 100$, $100 > 96$, поэтому хватит.

726. $3 \cdot 4 = 12$ способами.

727. $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ способами.

728. $5 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = 180$ костюмов.

729. а) $$\left(\frac{2ab}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{2a+2b}\right)\cdot\frac{2a}{a+b}+\frac{b}{b-a}=\frac{4ab+(a-b)^2}{2(a-b)(a+b)}\cdot\frac{2a}{a+b}+\frac{b}{b-a}=$$

$$=\frac{(a+b)^2}{2(a-b)(a+b)}\cdot\frac{2a}{a+b}-\frac{b}{a-b}=\frac{a}{a-b}=\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}=1$$

б) $$\frac{y}{x-y}-\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\left(\frac{x}{(x-y)^2}-\frac{y}{x^2-y^2}\right)=$$

$$=\frac{y}{x-y}-\frac{x(x^2-y^2)\big(x(x+y)-y(x-y)\big)}{(x^2+y^2)(x-y)(x^2-y^2)}=\frac{y}{x-y}-\frac{x}{x-y}=-1$$

730. а) $(2{,}5x + 3)(4x - 1) - 2{,}5x(4x + 2) < 3$

$4{,}5x < 6$; $\quad x < 1\frac{1}{3}$

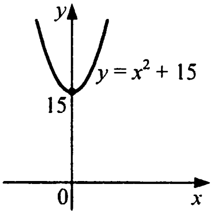
б) $(1 - 4x)^2 - (8x - 1)(2x + 1) > 0$

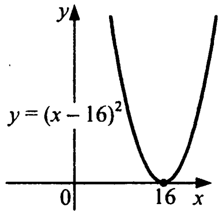
$2 - 14x > 0$; $x < \frac{1}{7}$

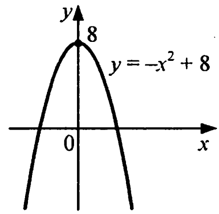
731. а) $y = x^2 + 15$
ОЗФ: $[15; +\infty)$

б) $y = (x - 16)^2$
ОЗФ: $[0; +\infty)$

в) $y = -x^2 + 8$
ОЗФ: $(-\infty; 8]$.







732. $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ способами.
733. $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$ маршрутов.
734. $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = 9! = 362880$ способами.
735. $5! - 1 = 119$ выражений.
736. $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ вариантов.
737. а) $6! = 720$ чисел; б) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 5! = 600$ чисел.
738. а) $3! = 6$ чисел;
б) число, составленное из этих цифр кратно 15, если оно оканчивается на 5, поэтому таких чисел $3! = 6$.
739. Таких чисел $4! = 24$, поэтому сумма цифр равна $24(1 + 3 + 5 + 7) = 384$.
740. а) Это четырехзначные числа, начинающиеся с 3, поэтому их
$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 3! = 12$.
б) Это четырехзначные числа, начинающиеся с 2, поэтому их
$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 3! = 18$.
741. а) $6! = 720$; б) $5! = 120$;
в) Пусть Олег стоит левее Игоря, тогда таких комбинаций $6 \cdot 5! = 6! = 720$. Если же Игорь стоит левее Олега, то таких комбинаций тоже 720, поэтому всего 1440 комбинаций.
742. Если алгебра стоит раньше геометрии, то $5 \cdot 4! = 5! = 120$ способов; если же геометрия стоит раньше алгебры, то тоже 120 способов; поэтому всего 240 способов.
743. $3 \cdot 2! = 3! = 6$.
744. Если порядок сборников фиксирован, то $8 \cdot 7! = 8! = 40320$ способов, поэтому всего $5! \cdot 8! = 4838400$ способов.
745. а) $10! = 3628800$ способами; б) $5! \cdot 5! = 14400$ способами.
746. а) $90 = 9 \cdot 10$, поэтому делится; б) $92 = 4 \cdot 23$, поэтому делится;
в) $94 = 2 \cdot 47$ и $47 > 30$, поэтому не делится;
г) $96 = 6 \cdot 16$: поэтому делится.
747. а) $168 = 3 \cdot 7 \cdot 8$, поэтому делится;
б) $136 = 8 \cdot 17$ и $17 > 14$, поэтому не делится;
в) $147 = 3 \cdot 7 \cdot 7$, поэтому делится;
г) $132 = 3 \cdot 4 \cdot 11$, поэтому делится.

748. а) $\frac{15!}{14!}=15$; б) $\frac{8!}{10!}=\frac{1}{9\cdot 10}=\frac{1}{90}$; в) $\frac{42!}{40!}=41\cdot 42=1722$;

г) $\frac{16!}{14!\cdot 3!}=\frac{15\cdot 16}{3!}=\frac{240}{6}=40$; д) $\frac{28!}{4!\cdot 26!}=\frac{27\cdot 28}{4!}=\frac{756}{24}=31{,}5$;

е) $\frac{45!}{43!\cdot 3!}=\frac{44\cdot 45}{3!}=\frac{1980}{6}=330$.

749. а) $\frac{12!}{9!}=10\cdot 11\cdot 12=1320$; б) $\frac{14!}{12!}=13\cdot 14=182$;

в) $\frac{30!}{29!\cdot 2!}=\frac{30}{2}=15$; г) $\frac{36!}{2!\cdot 34!}=\frac{35\cdot 36}{2}=630$;

д) $\frac{15!}{2!\cdot 16!}=\frac{1}{2\cdot 16}=\frac{1}{32}$; е) $\frac{25!}{23!\cdot 5!}=\frac{24\cdot 25}{5!}=\frac{600}{120}=5$.

750. а) $6!\cdot 5=5!\cdot 6\cdot 5$, поэтому $6!\cdot 5$ больше $5!\cdot 6$ в 5 раз.
б) $(n+1)!\cdot n=n!(n+1)\cdot n$, поэтому $(n+1)!\cdot n$ больше $n!(n+1)$ в n раз.

751. а) $\left(\frac{a-3}{a^2-3a+9}-\frac{6a-18}{a^3+27}\right):\frac{5a-15}{4a^3+108}=$

$$=\frac{(a-3)(a+3)-6a+18}{a^3+27}:\frac{5(a-3)}{4(a^3+27)}=\frac{(a^2-6a+9)\cdot 4(a^3+27)}{(a^3+27)\cdot 5(a-3)}=\frac{4}{5}(a-3).$$

б) $$\frac{ab^2-a^2b}{a+b}\cdot\frac{a+\frac{ab}{a-b}}{a-\frac{ab}{a+b}}=\frac{ab(b-a)}{a+b}\cdot\frac{1+\frac{b}{a-b}}{1-\frac{b}{a+b}}=$$

$$=\frac{ab(b-a)}{a+b}\cdot\frac{\frac{a}{a-b}}{\frac{a}{a+b}}=\frac{ab(b-a)(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-ab.$$

752. а) $\begin{cases}7-3x-4(3-1{,}5x)<0\\ -6(1+2{,}5x)-10x-4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x<5\\ 25x<-10\end{cases}\Leftrightarrow x<-0{,}4.$

Ответ: $(-\infty;-0{,}4)$.

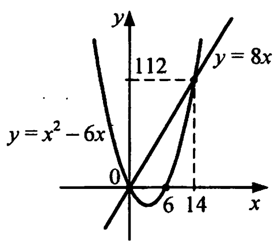
б) $\begin{cases}2(1{,}5x-1)-(x+4)\geq 0\\ -(2-x)-0{,}75x\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\geq 6\\ 0{,}25x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 3\\ x\leq 8\end{cases}\Leftrightarrow 3\leq x\leq 8.$

Ответ: [3; 8].

753. $x^2-6x=8x$
$x^2-14x=0$

$\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=14\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\ y=112\end{array}\right.$

Ответ: (0; 0) и (14; 112).



754. $A_4^3=\frac{4!}{1!}=4!=24$

755. $A_{30}^2 = \dfrac{30!}{28!} = 29 \cdot 30 = 870$

756. $A_7^4 = \dfrac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$

757. $A_{12}^4 = \dfrac{12!}{8!} = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 11880$

758. $A_{10}^5 = \dfrac{10!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 30240$

759. $A_{20}^6 = \dfrac{20!}{14!} = 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 = 27907200$

760. а) $A_6^2 = \dfrac{6!}{4!} = 5 \cdot 6 = 30$; б) $A_6^4 = \dfrac{6!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$; в) $A_6^6 = 6! = 720$.

761. $A_{26}^5 = \dfrac{26!}{21!} = 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 = 7893600$

762. а) $A_5^4 = \dfrac{5!}{4!} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; б) $A_5^4 - A_4^3 = \dfrac{5!}{1!} - \dfrac{4!}{1} = 4 \cdot 4! = 96$

763. $A_{10}^7 - A_9^6 = \dfrac{10!}{3!} - \dfrac{9!}{3!} = \dfrac{9 \cdot 9!}{3!} = 544320$

764. а) $A_4^2 + A_4^2 = 2A_4^2 = 2 \cdot \dfrac{4!}{2!} = 4! = 24$ б) $A_4^2 = \dfrac{4!}{2!} = 12$

765. а) $-2 < \dfrac{4x-1}{5} < 2$

$-10 < 4x - 1 < 10$

$-9 < 4x < 11$

$-2{,}25 < x < 2{,}75$

б) $0{,}2 \le \dfrac{1-5x}{20} \le 0{,}4$

$4 \le 1 - 5x \le 8$

$-7 \le 5x \le -3$

$-1{,}4 \le x \le -0{,}6$

766. а) $\begin{cases} 3y - 2x = 10 \\ 7x + 5y = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y - 5 \\ 31y = 124 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0{,}4x - 0{,}2y = 0{,}4 \\ x + 11y = 12{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0{,}5 = 1 \\ x + 11y = 12{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}5y + 1 \\ 11{,}5y = 11{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1{,}5 \\ y = 1 \end{cases}$

767. а) $\dfrac{8!}{6! \cdot 2!} = \dfrac{7 \cdot 8}{2} = 28$; б) $\dfrac{12!}{9! \cdot 3!} = \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} = 220$; в) $\dfrac{7! \cdot 5!}{8! \cdot 4!} = \dfrac{5}{8}$.

768. $C_7^2 = \dfrac{7!}{2! \cdot 5!} = \dfrac{6 \cdot 7}{2} = 21$

769. $C_8^3 = \dfrac{8!}{3! \cdot 5!} = \dfrac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56$

770. $C_{10}^6 = \dfrac{10!}{6! \cdot 4!} = \dfrac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{24} = 210$

771. $C_8^2 = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = \frac{7\cdot 8}{2} = 28$

772. а) $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{24} = 210$

б) $C_{10}^5 = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{}120 = 252$

773. а) $C_{11}^2 = \frac{11!}{2!\cdot 9!} = \frac{10\cdot 11}{2} = 55$ б) $C_{11}^3 = \frac{11!}{3!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10\cdot 11}{6} = 165$

774. $C_{12}^4 \cdot C_5^2 = \frac{12!}{4!\cdot 8!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{24}\cdot\frac{4\cdot 5}{2} = 4950$

775. $C_{10}^3 \cdot C_4^2 = \frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{6}\cdot\frac{3\cdot 4}{2} = 720$

776. а) $5! = 120$; б) $4! = 24$.

777. $5!\cdot 4! = 120\cdot 24 = 2880$

778. а) 10; б) $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{6} = 120$; в) $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10}{2} = 45$

779. а) $C_{16}^4 = \frac{16!}{4!\cdot 12!} = \frac{13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{24} = 1820$; б) $A_{16}^4 = \frac{16!}{12!} = 43680$

780. $A_5^2 \cdot A_{10}^3 = \frac{5!}{3!}\cdot\frac{10!}{7!} = 4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 14400$

781. $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-1)n}{2} = 378$; $n^2 - n - 756 = 0$; $n = 28$ и $n = -27$

Ответ: $n = 28$.

782. $C_n^4 = 13C_n^2$

$\frac{n!}{4!(n-4)!} = 13\frac{n!}{2!(n-2)!}$

$\frac{(n-2)!}{(n-4)!} = 13\cdot\frac{4!}{2!}$

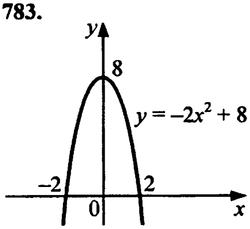
$(n-3)(n-2) = 13\cdot 12$

$n^2 - 5n - 150 = 0$

$n = 15$ и $n = -10$

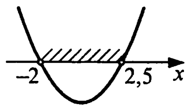
Ответ: $n = 15$.

783.



784. а) $x^2 - 0,5x - 5 < 0$

$D = 0,5^2 + 4 \cdot 5 = 20,25 = 4,5^2$

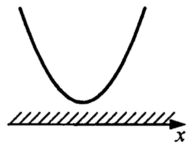


$$x_1 = \frac{0,5+4,5}{2} = 2,5$$

и $x_2 = \dfrac{0,5-4,5}{2} = -2$

Ответ: (–2; 2,5).

б) $x^2 - 2x + 12,5 > 0$



$D = 2^2 - 4 \cdot 12,5 = -46 < 0$

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

785. а) $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ y^2+y-240=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ (y+16)(y-15)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-15 \\ y=-16 \end{cases} \\ \begin{cases} x=16 \\ y=15 \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: (–15; –16) и (16; 15).

б) $\begin{cases} x^2+y^2=65 \\ 2x-y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-60x+160=0 \\ y=2x-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-12x+32=0 \\ y=2x-15 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x-8)=0 \\ y=2x-15 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=-7 \end{cases} \\ \begin{cases} x=8 \\ y=1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: (4; –7) и (8; 1).

786. а) $5\sqrt{x} = 1$

$\sqrt{x} = \dfrac{1}{5}$

$x = \dfrac{1}{25}$

б) $\sqrt{x-4} = 15$

$x - 4 = 225$

$x = 229.$

§ 12. Начальные сведения из теории вероятностей

787. $\dfrac{12}{1000} = 0,012$

788. $\dfrac{46}{31+31} = \dfrac{23}{31}$

789. $\dfrac{\text{число слов, составленных из 6 букв}}{150}$

790. $\dfrac{\text{число появлений буквы}}{\text{общее число букв}}$

791. а) $\dfrac{7}{164} \approx 0,0427 > 0,038$; б) $\dfrac{6}{164} \approx 0,0366 > 0,026$

792. $\dfrac{\text{общее число выпадений орла}}{\text{общее число подбрасываний}}$.

793. Относительная частота попаданий: 0,76; 0,8; 0,84; 0,8; 0,78; 0,84; 0,86; 0,9; 0,8.

Вероятность попадания равна

$$\frac{0,76+0,8+0,84+0,8+0,780,84+0,86+0,9+0,8}{9} = \frac{7,38}{9} = 0,82$$

794. Нельзя, т.к. это только предположение о вероятности попадания.

795. $0,9 \cdot 85 \approx 77$

796. а) $f(x) = x^2 - 10x - 17$; $x_в = \dfrac{10}{2} = 5$ и $y_в = f(x_в) = -42$

ООФ: $(-\infty; +\infty)$

ОЗФ: $[-42; +\infty)$

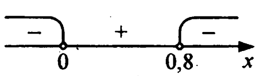
б) $g(x) = \dfrac{1}{|x| - x} = \begin{cases} \text{не определена, при } x \geq 0 \\ -\dfrac{1}{2x}, \text{ при } x < 0 \end{cases}$

ООФ: $(-\infty; 0)$

ОЗФ: $(0; +\infty)$

797. а) $4x - 5x^2 < 0$

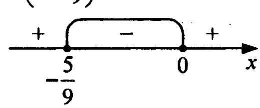
$x(0,8 - x) < 0$



$\left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 0,8 \end{array}\right.$

б) $9x^2 \leq -5x$

$x\left(x + \dfrac{5}{9}\right) \leq 0$

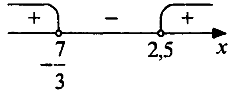


$-\dfrac{5}{9} \leq x \leq 0$.

в) $6x^2 - x - 35 > 0$

$D = 1^2 + 4 \cdot 6 \cdot 35 = 841 = 29^2$

$x_1 = \dfrac{1+29}{12} = 2,5$ и $x_2 = \dfrac{1-29}{12} = -\dfrac{7}{3}$



$\left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{7}{3} \\ x > 2,5 \end{array}\right.$

798. Вероятность равна $\frac{120}{1500} = 0{,}08$.

799. а) Всего исходов 6, а 1 очко только у одного исхода, поэтому вероятность равна $\frac{1}{6}$.

б) Всего исходов 6, а исходов, в которых выпало более, чем 4 очка, два, поэтому вероятность равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

800. Всего двузначных чисел 90 и только у 15, 24, 33, 42, 51, 60 сумма цифр равна 6, поэтому вероятность равна $\frac{6}{90} = \frac{1}{15}$.

801. Вероятность равна $\frac{93-3-6}{93} = \frac{84}{93} = \frac{28}{31}$.

802. Всего исходов 36 и только в 2 из них сумма очков равна 3, поэтому вероятность равна $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

803. Всего исходов 36, из них в 7 случаях сумма очков кратна 5 и в 6 случаях сумма очков кратна 6, поэтому вероятность выигрыша у Андрея равна $\frac{7}{36}$, а у Олега $\frac{6}{36}$.

Ответ: у Андрея.

804. Всего таких комбинаций $3! = 6$, поэтому вероятность равна $\frac{1}{6}$.

805. Всего комбинаций $5! = 120$, поэтому вероятность равна $\frac{1}{120}$.

806. Всего таких слов $4! = 24$, поэтому вероятность равна $\frac{1}{24}$.

807. $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, $P(C) = 1$, $P(D) = 0$.

808. $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, $0 < P(C) = 1$, $P(D) = 0$.

809. Вероятность равна $\frac{C_9^2}{C_{10}^2} = \frac{\frac{9!}{2! \cdot 7!}}{\frac{10!}{2! \cdot 8!}} = \frac{9! \cdot 8!}{7! \cdot 10!} = \frac{8}{10} = 0{,}8$.

810. Вероятность равна $\frac{C_{15}^2 \cdot C_{12}^2}{C_{27}^4} = \frac{\frac{15!}{2! \cdot 13!} \cdot \frac{12!}{2! \cdot 10!}}{\frac{27!}{4! \cdot 23!}} = \frac{77}{195} \approx 0{,}39$.

811. Вероятность равна $\frac{C_8^3 \cdot C_4^2}{C_{12}^5} = \frac{\frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}}{\frac{12!}{5! \cdot 7!}} = \frac{14}{33}$.

812. Вероятность равна $\frac{C_8^3 \cdot C_4^2}{C_{12}^6} = \frac{\frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!}}{\frac{12!}{6! \cdot 6!}} = \frac{8}{33}$.

813. а) Всего существует $3! = 6$ возможностей распределить номерки и только в одной из них Аня получит свое пальто, а остальные нет, поэтому вероятность равна $\frac{1}{6}$.

б) Всего возможностей распределить номерки 6 и только в 4 из них Вера не получила своего пальто, поэтому вероятность равна $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

814. Вероятность равна $\frac{S_{CDE}}{S_{CAB}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 S_{CAB}}{S_{CAB}} = \frac{1}{9}$.

815. Вероятность равна $\frac{0,5}{2,5} = 0,2$.

816. Вероятность равна $\frac{1,2}{3} = 0,4$.

817. $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} \cdot \frac{a^3-b^3}{b^2-a^2} : \left(1 - \frac{1+b}{b}\right) = \frac{\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+ab+b^2\right)}{\left(b^2-a^2\right)\left(a^2+ab+b^2\right)} : \left(-\frac{1}{b}\right) = b$.

818. $y = 2x^2 - 6x$; $y = 10x$;

$2x^2 - 6x = 10x$; $2x^2 - 16x = 0$; $2x(x-8) = 0$

$x_1 = 0$ и $x_2 = 8 \Rightarrow y_1 = 0$ и $y_2 = 80$

Ответ: (0; 0) и (8; 80).

819. а) $\frac{x}{x-5} - \frac{4}{x+5} + \frac{76}{25-x^2} = 0$

$\frac{x(x+5) - 4(x-5) - 76}{x^2-25} = 0$; $\frac{x^2+x-56}{x^2-25} = 0$; $\frac{(x+8)(x-7)}{x^2-25} = 0$

$x = -8$ и $x = 7$

Ответ: –8 и 7.

б) $\frac{7x}{x^2-36} + \frac{3}{6-x} = \frac{7}{x+6}$

$\frac{7x-3)x+6)-7(x-6)}{x^2-36} = 0$; $\frac{-3x+24}{x^2-36} = 0$; $x = 8$

Ответ: 8.

820. а) $\frac{10}{10+7+5+8} = \frac{1}{3}$; б) $\frac{8}{10+7+5+8} = \frac{4}{15}$; в) $\frac{10+8}{10+7+5+8} = \frac{3}{5}$.

821. а) $\frac{1200}{100000} = 0,012$; б) $\frac{800}{100000} = 0,008$; в) $\frac{1200+800}{100000} = 0,02$

822. Всего таким образом получится 4! = 24 слово, из них 2 слова с нужными названиями, поэтому вероятность равна $\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$.

823. Первая вероятность равна $\frac{1}{6}$, а вторая $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, поэтому искомая вероятность равна $2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

824. Вероятность равна $0{,}03\cdot 0{,}04=0{,}0012$.

825. Вероятность равна $\frac{2}{12}\cdot\frac{3}{15}=\frac{1}{30}$.

826. а) $\left(\frac{5}{5+3}\right)^2=\frac{25}{64}$; б) $\left(\frac{3}{5+3}\right)^2=\frac{9}{64}$.

827. Вероятность равна $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$.

828. Вероятность равна $1-(1-0{,}8)(1-0{,}75)=0{,}95$.

829. Вероятность равна $1-\frac{6}{36}=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$.

830. Вероятность равна $1-\frac{C_7^3}{C_{11}^3}=1-\frac{7}{33}=\frac{26}{33}$.

831. Их столько же, сколько и трехзначных чисел, последних в точности 900.

832. (с, з, з, з), (з, с, з, з), (з, з, с. з), (з, з, з, с).

833. 11444, 14144, 14414, 14441, 41144, 41414, 41441, 44114, 44141, 44411.

834. Это числа 2135, 2153, 2315, 2351, 2513, 2531, 3125, 3152, 3215, 3251, 3512, 3521.

Ответ: 12.

835. а) 1372, 1732, 3172, 3712, 7132, 7312.

Ответ: 6.

б) 1234, 1324, 2134, 2314, 3124, 3214, 1342, 1432, 3142, 3412, 4132, 4312.

Ответ: 12.

836. а) $100=2\cdot 50 \Rightarrow$ делится;

б) $350=5\cdot 61$, $61>50$ и 61 — простое $\Rightarrow$ не делится;

в) $1550=5\cdot 10\cdot 31 \Rightarrow$ делится.

837. а) $n=5$, т.к. $5!=120$;

б) $n=10$, т.к. $10!=3628800$;

в) $n=15$.

838. а) Это те числа, которые оканчиваются на 2 и на 4.

Таких чисел $2\cdot A_4^2=2\cdot\frac{4!}{2!}=4!=24$.

б) Это те числа, сумма цифр которых кратна 3.

Таких чисел $4\cdot P_3=4!=24$.

839. а) $\frac{(n+1)!}{n!}=n+1$; б) $\frac{n!}{(n+2)!}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n^2+3n+2}$;

б) $\frac{(n+1)!(n+3)}{(n+4)!}=\frac{n+3}{(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{1}{(n+2)(n+4)}=\frac{1}{n^2+6n+8}$.

840. а) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=42$

$n(n+1)=42$

$n^2+n-42=0$

$n=-7$ и $n=6$

Ответ: 6.

б) $\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!}=\frac{5}{6}$

$1-\frac{1}{n+1}=\frac{5}{6}$

$n+1=6$

$n=5$

Ответ: 5.

841. а) $C_{24}^2=\frac{24!}{2!\cdot 22!}=\frac{23\cdot 24}{2}=276$ б) $A_{24}^2=\frac{24!}{22!}=23\cdot 24=552$

842. Общее число вариантов равно

$C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6=(1+1)^6-1=2^6-1=63$.

843. $A_n^2=30$;

$\frac{n!}{(n-2)!}=30$; $n(n-1)=30$; $n=6$

844. а) $A_9^4=\frac{9!}{5!}=3024$ б) $A_9^3=\frac{9!}{6!}=504$

845. $C_n^2=28$; $\frac{n!}{2!(n-2)!}=28$; $n(n-1)=56$; $n=8$.

846. $C_{25}^3\cdot C_{20}^2\cdot C_{18}^1=\frac{25!}{3!\cdot 22!}\cdot\frac{20!}{2!\cdot 18!}\cdot\frac{18!}{1!\cdot 17!}=7866000$.

847. $A_{n+1}^2=1,25\cdot A_n^2$

$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=1,25\cdot\frac{n!}{(n-2)!}$;

$n(n+1)=1,25\cdot n(n-1)4\ 0,25n=2,25$; $n=9$

848. а) $C_{12}^4=\frac{12!}{4!\cdot 8!}=495$; б) $C_{12}^5=\frac{12!}{5!\cdot 7!}=792$.

849. $C_5^2\cdot C_8^3=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{8!}{3!\cdot 5!}=560$.

850. а) 1 число: 111;

б) 3 числа: 112, 121, 211;

в) 10 чисел: 114, 141, 411, 123, 132, 213, 231, 312, 321, 222.

851. а) 14 чисел: 105, 150, 501, 510, 123, 132, 213, 231, 312, 321, 204, 240, 402, 420.

б) 16 чисел: 135, 153, 315, 351, 513, 531, 234, 243, 324, 342, 423, 432, 405, 450, 504, 540.

852. а) $\dfrac{P_6 - P_4}{P_5} = \dfrac{6! - 4!}{5!} = 6 - \dfrac{1}{5} = 5\dfrac{4}{5}$;

б) $\dfrac{A_8^4 - A_8^3}{A_7^3 - A_7^2} = \dfrac{\dfrac{8!}{4!} - \dfrac{8!}{5!}}{\dfrac{7!}{4!} - \dfrac{7!}{5!}} = \dfrac{\dfrac{4 \cdot 8!}{5!}}{\dfrac{4 \cdot 7!}{5!}} = \dfrac{8!}{7!} = 8$;

в) $\dfrac{C_6^3 - C_6^2}{A_6^2} = \dfrac{\dfrac{6!}{3! \cdot 3!} - \dfrac{6!}{2! \cdot 4!}}{\dfrac{6!}{4!}} = \dfrac{\dfrac{6!}{3! \cdot 4!}}{\dfrac{6!}{4!}} = \dfrac{1}{3!} = \dfrac{1}{6}$.

853. $A_n^4 = 12A_n^2$

$\dfrac{n!}{(n-4)!} = 12\dfrac{n!}{(n-2)!}$; $(n-2)(n-3) = 12$; $n = 6$

854. $A_n^4 = 14 \cdot A_{n-2}^3$;

$\dfrac{n!}{(n-4)!} = 14\dfrac{(n-2)!}{(n-5)!}$; $n(n-1) = 14(n-4)$;

$n^2 - 15n + 56 = 0$; $n = 7$ и $n = 8$.

855. а) $14C_n^{n-2} = 15A_{n-3}^2$

$14 \cdot \dfrac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 15 \cdot \dfrac{(n-3)!}{(n-5)!}$

$7(n-2)(n-1) \cdot n = 15(n-4)(n-3)(n-2)$

$8n^2 - 98n + 180 = 0$;

$4n^2 - 49n + 90 = 0$

$D = 49^2 - 4 \cdot 4 \cdot 90 = 961 = 31^2$

$n = \dfrac{49 \pm 31}{8} \Rightarrow n = 10$

Ответ: 10.

б) $6C_n^{n-3} = 11A_{n-1}^2$

$6 \cdot \dfrac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = 11\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}$; $n = 11$. Ответ: 11.

в) $13C_{2n}^{n+1} = 7C_{2n+1}^{n-1}$

$13 \cdot \dfrac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = 7 \cdot \dfrac{(2n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}$

$13(n+2) = 7(2n+1)$; $n = 19$.. Ответ: 19.

г) $21C_{2n}^{n+1} = 11C_{2n+1}^{n-1}$

$21 \cdot \dfrac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = 11 \cdot \dfrac{(2n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}$

$21(n+2) = 11(2n+1)$; $n = 31$. Ответ: 31.

856. В первом: 4; во втором: 4; в третьем: 2; в четвертом: 2; в пятом: 3; в шестом: 2; в седьмом: 2; в восьмом: 3; в девятом: 2; в десятом: 1.

а) $0,4 > 0,2$;

б) $0,4 > 0,1$

857. а) Всего 4 кости, в которых сумма очков равна 6, поэтому вероятность равна $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$.

б) Костей, у которых сумма очков равна 5, три, а костей, у которых сумма очков равна 4, три, поэтому вероятности равны $\frac{3}{28}$.

858. Всего таким образом получится $A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 24$ числа, поэтому вероятность равна:

а) $\frac{1}{24}$; б) $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$; в) $\frac{A_3^2}{A_4^3} = \frac{3! \cdot 1!}{1! \cdot 4!} = \frac{1}{4}$.

859. а) $\frac{9}{25}$; б) $\frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$.

860. Всего 19 чисел от 1 до 100, в которых есть цифра 6, поэтому вероятность равна $\frac{100-19}{100} = 0,81$.

861. Это номера: 1, 5, 7, 11, 13, поэтому вероятность равна $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

862. Вероятность равна: $\frac{C_6^2 \cdot C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{\frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{1! \cdot 3!}}{\frac{10!}{3! \cdot 7!}} = \frac{1}{2}$.

863. Вероятность равна: $\frac{C_7^2}{C_{28}^2} = \frac{\frac{7!}{2! \cdot 5!}}{\frac{28!}{2! \cdot 26!}} = \frac{1}{18}$.

864. Вероятность равна: $\frac{C_{37}^1}{C_{40}^1} = \frac{\frac{37!}{1! \cdot 36!}}{\frac{40!}{1! \cdot 39!}} = \frac{37}{40}$.

865. а) $\frac{1}{A_5^3} = \frac{2!}{5!} = \frac{1}{60}$; б) $\frac{1}{A_5^4} = \frac{1!}{5!} = \frac{1}{120}$; в) $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$.

866. а) $\frac{1}{C_5^2} = \frac{2! \cdot 3!}{5!} = \frac{1}{10}$; б) $\frac{2}{C_5^2} = \frac{1}{5}$.

867. $\frac{n}{12} = \frac{1}{6}$; $n = 2$.

868. Пусть количество белых шаров равно n, тогда красных шаров $2n$ и синих $24-3n$. По условию $\frac{n}{24}=\frac{1}{8}$, поэтому $n=3$. Искомая вероятность равна $\frac{24-3n}{24}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$.

869. Таких номеров от 1 до 50 — 13, поэтому вероятность равна $\frac{13}{50}=0,26$.

870. Вероятность равна: $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$.

871. Вероятность равна: $\frac{1}{10^5}=0,00001$.

872. а) $\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$;

б) $3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{72}$;

в) $3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{36}$;

г) $3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3=15\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{5}{72}$.

873. У Миши вероятность выигрыша равна $3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{36}$, а у Кости вероятность выигрыша равна $3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{36}$.

Ответ: шансы одинаковы.

874. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$.

Справочное издание

Бачурин Владимир Евгеньевич

Домашняя работа по алгебре за 9 класс

Издательство «*ЭКЗАМЕН*»

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. AE51. Н 15295 от 13.04.2011 г.

Выпускающий редактор *Л.Д. Лаппо*
Дизайн обложки *А.Ю. Горелик*
Компьютерная верстка *И.Ю. Иванова*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7
Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).