САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР ®

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

+ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ И НА ПОСТРОЕНИЕ

7

К заданиям учебника
Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова

ГЕОМЕТРИЯ

А. А. Белова

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ

из учебника

ПО ГЕОМЕТРИИ

авторов
Л.С. Атанасяна и др.
(*М.: Просвещение*)

+ ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

+ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

7 класс

Москва • «ВАКО» • 2012

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
Б43

Белова А.А.
Б43 Подробный разбор заданий из учебника по геометрии: 7 класс. – М.: ВАКО, 2012. – 96 с. – (Сам себе репетитор).

ISBN 978-5-408-00571-0

Издание, написанное практикующим педагогом, содержит справочный материал, алгоритмы решения типовых задач, а также подробный разбор абсолютно всех заданий из учебника по геометрии для 7–9 классов Л.С. Атанасяна и др. (М.: Просвещение), включая задачи повышенной трудности.

Поможет родителям и гувернерам школьников проверить уровень усвоения детьми учебного материала, объяснить непонятное, привить им навыки самопроверки и обучить решению задач.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

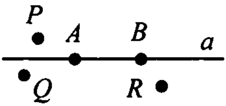
ISBN 978-5-408-00571-0

Оглавление

Глава I.
Начальные геометрические сведения

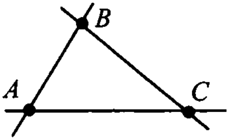
§ 1 Прямая и отрезок

1.



$A \in a, B \in a; P \notin a, Q \notin a, R \notin a.$

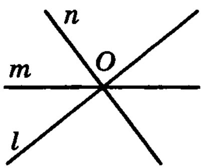
2.

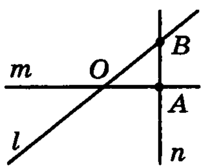


3. Проведем две прямые l и m, обозначив буквой O точку пересечения этих прямых. Третью прямую n можно провести двумя способами.

<u>1 способ</u> – третья прямая проходит через точку O. Тогда все прямые пересекаются в одной точке O.

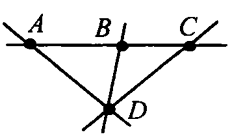
<u>2 способ</u> – третья прямая не проходит через точку O. Получаются три точки пересечения: O, A, B.





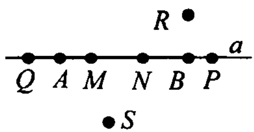
<u>**Ответ**</u>: одна или три.

4.

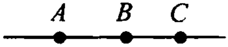


Получим четыре прямые.

5.



6.



AB, BC и AC – три отрезка.

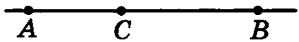
7. а) Точка C принадлежит отрезкам: AD, BD, AC, BC; **б)** $B \notin CD$.

§ 2 Луч и угол

8. а) Лучи AB и AC лежат на одной прямой, имеют общее начало,

но не являются продолжением друг друга. Это значит, что они совпадают. Аналогично BC и BA тоже совпадают.

б) Луч, являющийся продолжением луча CA, должен иметь

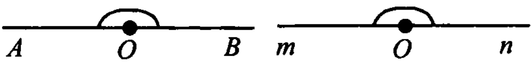


начало в точке C, лежать на одной прямой с лучом CA и не совпадать с ним. Этому условию удовлетворяет луч CB.

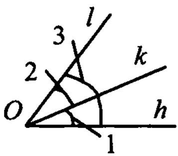
<u>**Ответ**</u>: **а)** AB и AC, **б)** CB.

9.

10.

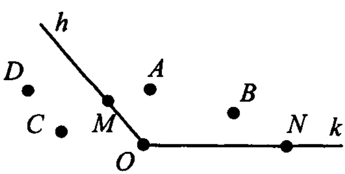


11.

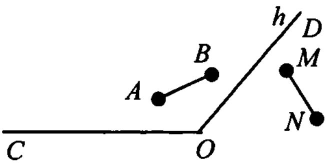


1 – $\angle hk$; 2 – $\angle kl$; 3 – $\angle hl$.

12.

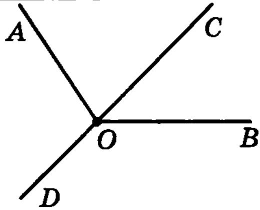


13.

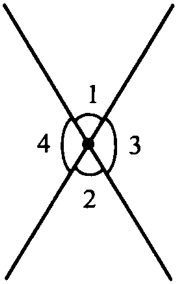


14. а) Возьмем любую точку C, принадлежащую $\angle AOB$. Луч OC делит $\angle AOB$ на два угла.

б) Берем точку D, лежащую вне $\angle AOC$. Луч OD не проходит через $\angle AOC$, а значит, не делит его на два угла.



15.



Ответ: При пересечении двух прямых образуется четыре неразвернутых угла: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

16. Внутри угла: M, A; вне угла: C, N; на сторонах угла: O, B.

17. Лучи l и h.

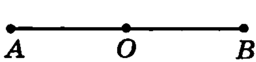
§ 3 Сравнение отрезков и углов

18. По условию задачи отрезок OB – часть отрезка OA, так как точка B лежит между точками O и A. Значит, $OB < OA$.

Аналогично, $OA < OC$ и $OB < OA < OC$, следовательно, $OB < OC$.

Ответ: $OB < OA$, $OA < OC$, $OB < OC$.

19. а) Так как O – середина AB, то $AO = OB$, а, значит, при наложении они совпадут.

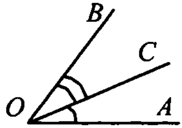


б) Отрезки OA и AB имеют общий конец A, но так как их другие концы не совпадают, эти отрезки не равны, а значит, не совмещаются при наложении.

20. а) B – середина отрезка AC; C – середина отрезка AE; D – середина отрезка CE.

б) Отрезок CE; отрезки AE и BD имеют общую середину C.

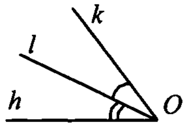
21.



Ответ: $\angle AOB > \angle AOC$.

22. а) l – биссектриса, значит, $\angle hl = \angle lk$, и углы при наложении совпадут.

б) Т.к. $\angle hl < \angle hk$, при наложении углы не совпадут.



Ответ: см. решение.

23. а) OB – биссектриса $\angle AOC$; OD – биссектриса $\angle BOF$; OC – биссектриса $\angle AOE$.

б) OC – биссектриса углов BOD и AOE.

§ 4 Измерение отрезков

24. Длина учебника – 14,5 см = 145 мм; ширина учебника – 22см = 220 мм.

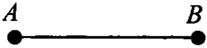
25. Толщина учебника – 1,5 см, количество листов в ней – 170.

Значит толщина одного листа $\frac{1,5}{170} = \frac{3}{340} \approx 0,009$ см.

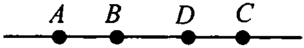
26. а) $CD = 6KL$; $EF = 5KL$; $PQ = 3KL$; $AB = 2KL$.

б) $CD = 3AB$; $EF = 2,5AB$; $PQ = 1,5AB$; $KL = 0,5AB$.

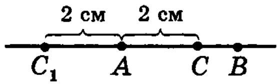
27.



28.

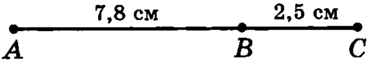


29. Отрезок AC = 2 см можно построить двумя способами. 1) точка C принадлежит лучу AB, 2) точка C не принадлежит лучу AB, но принадлежит прямой AB.



Ответ: две точки.

30. $AC = AB + BC$. Теперь подставляем данные значения AB и BC в это равенство, предварительно представив 25 мм как 2,5 см:



$AC = 7{,}8$ см $+ 2{,}5$ см $= 10{,}3$ см.

Ответ: $AC = 10{,}3$ см.

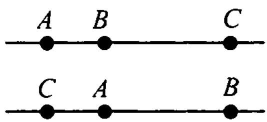
31. Из равенства $AC = AB + BC$ следует, что $BC = AC - AB$. Подставляем значения для отрезков, данные по условию:

а) $BC = 7{,}2$ см $- 3{,}7$ см $= 3{,}5$ см,

б) $AB = 0{,}4$ см, $BC = 4$ см $- 0{,}4$ см $= 3{,}6$ см.

Ответ: **а)** $BC = 3{,}5$ см, **б)** $BC = 3{,}6$ см.

32. Рассмотрим два варианта:

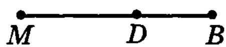


I. $AC = AB + BC = 12$ см $+$ $+ 13{,}5$ см $= 25{,}5$ см.

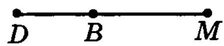
II. $AC = BC - BA = 13{,}5$ см $-$ $- 12$ см $= 1{,}5$ см.

Ответ: 25,5 см; 1,5 см.

33. Рассмотрим случай, когда лучи DB и DM являются продолжением друг друга. Тогда $BM = MD + BD = 7$ см $+ 16$ см $= 23$ см.

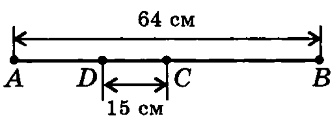


В другом случае лучи DM и DB совпадают. $BM = DM - DB =$ $= 16$ см $- 7$ см $= 9$ см.



Ответ: BM равно 23 или 9 см.

34. Если C – середина отрезка AB, то $CA = \frac{1}{2}AB = 32$ см.



Так как $CA > CD$, то D лежит между A и C и $DA = CA - CD = 32$ см $- 15$ см $= 17$ см. Тогда

$$BD = CD + CB = CD + \frac{1}{2}AB = 15 \text{ см} + \frac{1}{2}\cdot 64 \text{ см} =$$

$$= 15 \text{ см} + 32 \text{ см} = 47 \text{ см}.$$

Ответ: $BD = 47$ см, $DA = 17$ см.

35. $TC = MC - MT = 65$ км – 170 км $= 480$ км.

36. Если точки A, B, C лежат на одной прямой, то больший из отрезков AB, BC и AC равен сумме двух других. По условию больший из данных отрезков ($AC = 5$ см), а $AB + BC = 7$ см, поэтому точки A, B, C не лежат на одной прямой.

37. а) C – середина AB, значит
$AC = CB = 2 : 2 = 1$ см;
O – середина AC, значит
$AO = OC = 1 : 2 = 0{,}5$ см;
$OB = OC + CB = 0{,}5$ см $+ 1$ см $= 1{,}5$ см.

Ответ: 1 см; 1 см; 0,5 см; 1,5 см.

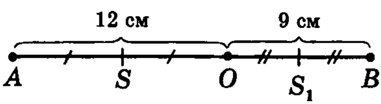
б) $AB = 2 \cdot BC = 2 \cdot 3{,}2 = 6{,}4$ м; $AC = CB = 3{,}2$ м;
$AO = OC = 3{,}2 : 2 = 1{,}6$ м.

Ответ: 1 см; 1 см; 0,5 см; 1,5 см.

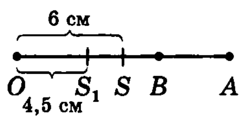
38. Обозначим середину отрезка OA точкой S, а середину OB – точкой S_1.

а) $SO = AO = 6$ см, $S_1O = OB = 4{,}5$ см. Расстояние между серединами отрезков OA и OB равно $SS_1 = SO + OS_1 = 6$ см $+$
$+ 4{,}5$ см $= 10{,}5$ см.

б) Из пункта а) следует, что $OS = 6$ см, $OS_1 = 4{,}5$ см,
$SS_1 = OS - OS_1 = 6$ см $- 4{,}5$ см $= 1{,}5$ см.



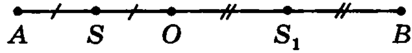
а)



б)

Ответ: **а)** 10,5 см; **б)** 1,5 см.

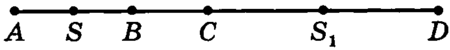
39. Пусть O – произвольная точка на отрезке AB, S – середина отрезка AO, S_1 – середина отрезка OB.



$SS_1 = SO + OS_1 = AO + OB = (AO + OB) = AB = a$.

Ответ: a.

40. Обозначения смотрите на рисунке. Получаем: $AB + BC + CD = 28$ см и



$$SB + BC + CS_1 = \frac{1}{2}AB + BC + \frac{1}{2}CD = 16 \text{ см}$$ или (умножив на два) $AB + 2BC + CD = 32$ см. Вычтем соотношения, получаем: $(AB + 2BC + CD) - (AB + BC + CD) = 32 - 28 = 4$ см или $BC = 4$ см.

Ответ: $BC = 4$ см.

§ 5 Измерение углов

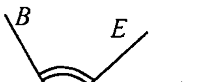
41. – 43. – Практические задания. Выполняются по описанию в учебнике.

44. Построение можно сделать, когда угол $\angle AOB$ – острый.

45. Т.к. градусные меры углов равны, то равны и сами углы.

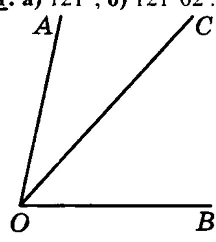
46. **а)** $\angle AOX = 40°$; $\angle BOX = 60°$; $\angle AOB = 20°$; $\angle COB = 20°$; $\angle DOX = 130°$;
б) $\angle AOB = \angle COB = 20°$;
в) $\angle XOA = \angle AOC = 40°$; $\angle COD = \angle DOP = 50°$; $\angle AOB = \angle BOC = 20°$;
г) $\angle AOX = 40°$; $\angle AOB = 20°$; $\angle AOC = 40°$; $\angle AOD = 90°$.

47. **а)** По свойству измерения углов имеем:
$\angle AOB = \angle AOE + \angle EOB$;
$\angle AOB = 44° + 77° = 121°$. Аналогично:
б) $\angle AOB = \angle AOE + \angle EOB$;
$\angle AOB = 12°37' + 108°25' = 120°62' = 121°02'$.



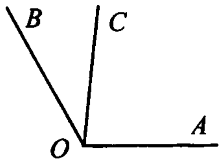
Ответ: **а)** 121°; **б)** 121°02′.

48. $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$, отсюда $\angle COB = \angle AOB - \angle AOC$. Подставим в последнее выражение значения данных углов: $\angle COB = 78° - (\angle COB - 18°) = 96° - \angle COB$ или $2\angle COB = 96°$. Тогда получаем: $\angle COB = 48°$.



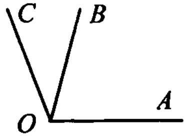
Ответ: $\angle COB = 48°$.

49. Пусть $\angle BOC = x$, тогда $\angle AOC = x + 15$.
$\angle AOB = \angle BOC + \angle AOC$; значит
$155 = x + x + 15$; $155 = 2x + 15$; $2x = 140$;
$x = 70$; $\angle AOC = 70° + 15 = 85°$.



Ответ: 85°.

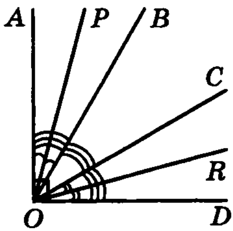
50. Пусть $\angle BOC = x$, тогда $\angle AOB = 3x$;
$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$, значит
$108 = 3x + x$;
$108 = 4x$; $x = 27$; $\angle AOB = 3 \cdot 27° = 81°$.



Ответ: 81°.

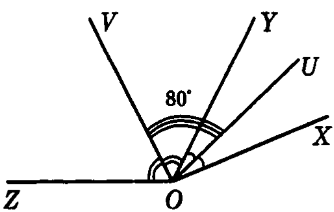
51. $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \frac{1}{3}\angle AOD = 30°$ (по условию).

Обозначим биссектрисы углов AOB и COD как OP и OR. Тогда:
$\angle POR = \angle POB + \angle BOC + \angle COR =$
$= \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle COD) + \angle BOC =$
$= \frac{1}{2}(30° + 30°) + 30° = 60°$.

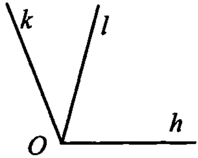


Ответ: 60°.

52. $\angle UOV = \angle VOY + \angle YOU =$
$= \frac{1}{2}(\angle ZOY + \angle YOX) =$
$= \frac{1}{2}\angle ZOX = 80°$. Тогда:
$\angle ZOX = 2\angle UOV =$
$= 2 \cdot 80° = 160°$.

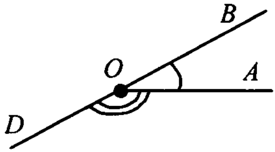


53. 1) $\angle hl$ – не прямой. Если $\angle hl = 90°$, то $\angle kh = 180°$, а это не так, потому что по условию $\angle hk < 180°$.
2) $\angle hl$ – не тупой. Если $\angle hl > 90°$, то $\angle kh > 180°$, а по условию это не так.

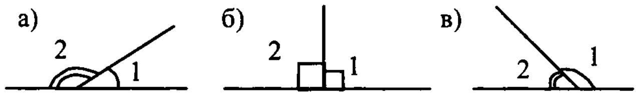


§ 6 Перпендикуляр. Прямые

54. $\angle AOB$ – острый, $\angle AOD$ – тупой.

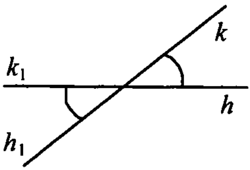


55. а) б) в)

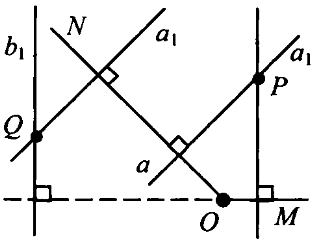


Углы *1* и *2* – смежные.

56. Углы $\angle hk$ и $\angle h_1k_1$ – вертикальные.



57. $b \perp OM$; $a \perp ON$; $b_1 \perp OM$; $a_1 \perp ON$.



58. Из свойств смежных углов $\angle CBD = \angle ABD - \angle ABC$.

а) $\angle CBD = 180° - 111° = 69°$; **б)** $\angle CBD = 180° - 90° = 90°$;

в) $\angle CBD = 180° - 15° = 165°$.

59. Прямым, так как $180° - 90° = 90°$.

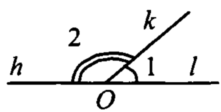
60. Верно, так как $\angle 1 + \angle 1 = 180°$; $2 \cdot \angle 1 = 180°$; $\angle 1 = 90°$.

61. Сумма смежных углов равна 180°.

а) Пусть $\angle 2 = x$, тогда $\angle 1 = x + 40$;

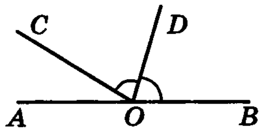
$x + x + 40 = 180$; $2x = 140$; $x = 70$.

$\angle hk = 70°$, $\angle kl = 110°$.



б) Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = x + 120$;
$x + x + 120 = 180$; $2x = 60$; $x = 30$. $\angle hk = 150°$, $\angle kl = 30°$.
в) Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = x + 47°18'$;
$x + x + 47°18' = 180$; $(180° = 179°60')$; $2x = 132°42'$; $x = 66°21'$.
$\angle hk = 150°$, $\angle kl = 30°$.
г) Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = 3x$;
$x + 3x = 180$; $4x = 180$; $x = 45$. $\angle hk = 135°$, $\angle kl = 45°$.

62. Так как углы AOC и COB смежные, то $\angle AOC = 180° - \angle COB = 32°$. Поскольку $\angle COD = \angle DOB$, $\angle COD = \frac{1}{2}\angle COB = 74°$. Тогда



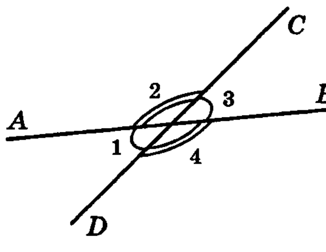
$\angle AOD = \angle AOC + \angle COD = 32° + 74° = 106°$.

<u>**Ответ**</u>: $\angle AOD = 106°$.

63. Если равны углы $\angle 1 = \angle 1$, то равны и смежные с ними углы $180° - \angle 1 = 180° - \angle 1$.

64. **а)** Т.к. $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные, то $\angle 2 = \angle 4 = 117°$;
$\angle 1 = 180° - 117° = 63°$, т.к. он смежный с $\angle 2$.
$\angle 3 = \angle 1 = 63°$, т.к. он вертикальный с $\angle 1$.
б) $\angle 1 = \angle 3 = 43°17'$ – как вертикальные;
$\angle 2 = 180° - 43°27' = 136°33'$, т.к. $\angle 2$ и $\angle 3$ – смежные;
$\angle 4 = 136°33'$, т.к. $\angle 4$ и $\angle 2$ – вертикальные.

65. **а)** Сумма двух смежных углов равна 180°, значит, данные углы не могут быть смежными, так как их сумма равна 114°. Поэтому эти углы $\angle 1$ и $\angle 3$ – вертикальные, а значит равны по $\frac{114}{2} = 57°$ каждый. Смежные с ними углы $\angle 2$ и $\angle 4$ – равны по $180° - 57° = 123°$ каждый.



б) Из трех углов $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, образованных пересечением двух прямых, два угла $\angle 1$ и $\angle 2$ смежные, поэтому третий $\angle 3$ равен $220° - 180° = 40°$. Один из двух других углов $\angle 1$ равен третьему $\angle 3$, так как он с ним вертикален. Последний $\angle 4$, а также вертикальный с ним $\angle 2$ равны по $220° - 2 \cdot 40° = 140°$.

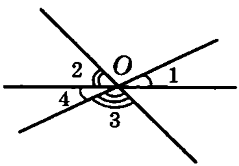
Ответ: **а)** 57°, 123°, 57°, 123°; **б)** 40°, 140°, 40°, 140°.

66. **а)** $\angle 2 + \angle 4 = 220°$; т.к. $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные, то $\angle 2 = \angle 4 = 220 : 2 = 110°$; т.к. $\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные и $\angle 3$ и $\angle 4$ – смежные, $\angle 1 = \angle 3 = 70°$.

б) $3 \cdot (\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$; пусть $\angle 1 = \angle 3 = x$, тогда $\angle 2 = \angle 4 = 180° - x$. Подставляем в первое равенство: $3 \cdot (x + x) = 180° - x + 180° - x$; $6x = 360 - 2x$; $8x = 360$; $x = 45°$; $\angle 1 = \angle 3 = 45°$; $\angle 2 = \angle 4 = 135°$.

в) $\angle 2 - \angle 1 = 30°$; пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = x + 30$; $x + x + 30 = 180$; $2x = 150$; $x = 75$; $\angle 1 = 75°$; $\angle 2 = 105°$.

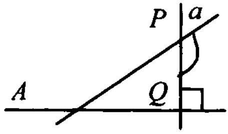
67. Назовем угол, вертикальный $\angle 1$, углом $\angle 4$: $\angle 1 = \angle 4$, а $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$. Но $\angle 2 + \angle 3 + \angle 4$ образуют развернутый угол, значит, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.



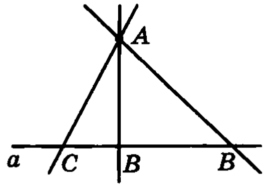
Ответ: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

68. $\angle EOD = \angle AOB = 50°$ по свойству вертикальных углов;
$\angle FOD = \angle FOE + \angle EOD = 70° + 50° = 120°$;
$\angle COD = 180° - \angle FOD = 180° - 120° = 60°$;
$\angle AOB = 50° + 70° = 120°$; $\angle COE = 60° + 50° = 110°$;
$\angle BOD = 70° + 60° = 130°$; $\angle COD = 60°$.

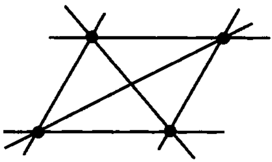
69. Одновременно прямые AP и AQ не могут быть перпендикулярными прямой a, т.к. AP и AQ пересекаются, а значит, не параллельны, что противоречит аксиоме параллельных прямых.



70. Назовем прямые AB, AC и AD. Допустим, что прямая $AB \perp a$, тогда если $AC \perp a$, то AB и AC не могут иметь общих точек, а точка A – общая для этих прямых. Аналогично для прямой AD. Значит, если хотя бы одна перпендикулярна прямой a, то две другие ей не перпендикулярны.

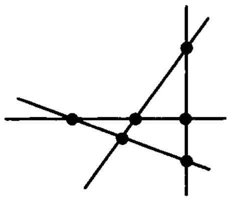


71.



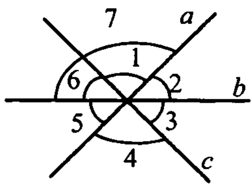
Получилось 6 прямых.

72.



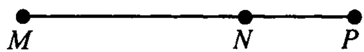
Прямые имеют 6 точек пересечения.

73. Рассмотрим все углы и выберем неразвернуные. Тогда в итоге имеем 12 углов, как это показано на рисунке.

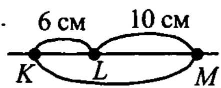


<u>**Ответ**</u>: см. решение.

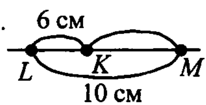
74. Пусть $NP = x$ см, тогда $MN = 2x$ см; $2x + x = 24$, значит $3x = 24$; $x = 8$, следовательно $NP = 8$ см, $MN = 16$ см.



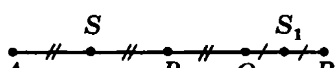
75. I случай: $KM = KL + LM = 6 + 10 = 16$ см.



II случай: $KM = LM - LK = 10 - 6 = 4$ см.



76. Пусть середина AP – точка S, а S_1 – середина QB.



$PQ = QB = AP$, $AP = PQ + QB$, значит, $AP = \dfrac{1}{2}a$,

$PQ = QB = \dfrac{1}{4}a$, $QS_1 = S_1B = \dfrac{1}{8}a$.

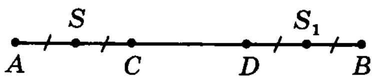
а) $AS_1 = AB - BS_1 = a - \dfrac{1}{8}a = \dfrac{7}{8}a$; **б)** $SS_1 = SP + PQ + QS_1 =$

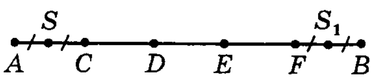
$= \dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{8}a + \dfrac{1}{8}a = \dfrac{5a}{8}$.

77. Пусть $AB = m$. **а)** Пусть также $AC = CD = DB$.

S – середина AC, S_1 – середина DB. $SS_1 = SC + CD + DS_1 = \dfrac{1}{2}AC +$

$+ CD + \dfrac{1}{2}DB = \dfrac{1}{2}(AC + DB) + CD = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m}{3} + \dfrac{m}{3}\right) + \dfrac{m}{3} = \dfrac{2}{3}m$.





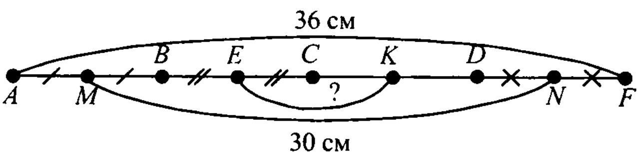
б) Возьмем точки C, D, E, F так, что $AC = CD = DE = EF =$

$= FB = \dfrac{m}{5}$. S – середина AC, S_1 – середина FB. $CS_1 = AB -$

$- AS - S_1B = AB - \dfrac{1}{2}(AF + FB) = m - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m}{5} + \dfrac{m}{5}\right) = \dfrac{4}{5}m$.

<u>**Ответ**</u>: **а)** $\dfrac{2}{3}m$, **б)** $\dfrac{4}{5}m$.

78.



$AF = MN = (AM + N)$; $36 - 30 = 6$ см $- (AM + NF)$. $AM = MB$;

$NF = ND$, значит $AM = NF = MB + DN = 6$ см.

$BD = BC + CD = 30 - 6 = 24$ см, тогда $BC = BE + EC = 2EC$,

$CD = CK + KD = 2CK$, $EK = EC + CK = \frac{1}{2}BD$.

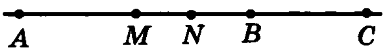
Учитывая, что $EK = \frac{1}{2}BD$, получаем $EK = 12$ см.

Ответ: 12 см.

79. а) Пусть лучи AB и AC являются продолжениями друг друга.

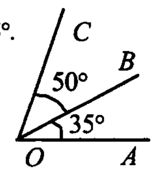
Тогда $MN = BC - \frac{1}{2}(BA + AC) = BC - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BC$.

Тогда $BC = 2MN$.

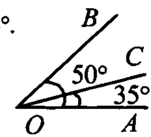


б) Предположим, что точки B и C лежат по одну сторону от точки A на данной прямой и $AB < AC$, тогда $AM < AN$. $BC =$ $= AC - AB = 2AN - 2AM = 2(AN - AM) = 2MN$.

80. I случай: $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 35° + 50° = 85°$.



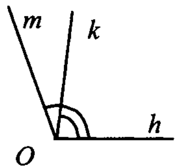
II случай: $\angle AOC = \angle BOC - \angle AOB = 50° - 35° = 15°$.



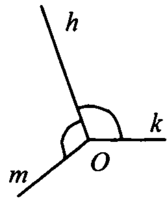
81. I случай: $\angle km = \angle hm - \angle hk = 150° - 120° = 30°$.

II случай: $\angle km = \angle kh + \angle hm = 120° + 150° = 270°$.

I



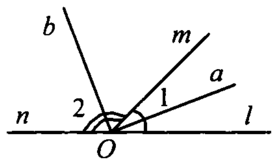
II



82. **а)** Пусть $\angle 2 = x$, тогда $\angle 1 = x + 45°$; так как $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (по свойству смежных углов), $x + x + 45 = 180°$; $2x = 135$; $x = 67°30'$; $\angle 2 = 67°30'$; $\angle 1 = 112°30'$.

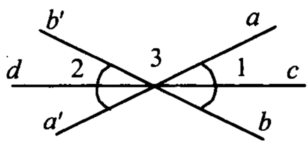
б) Пусть $\angle 2 = x$, тогда $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, значит $x + x + 35 = 180°$; $2x = 145°$; $x = 72°30'$; $\angle 2 = 72°30'$; $\angle 1 = 105°30'$.

83. Пусть a, b – биссектрисы $\angle 1$ и $\angle 2$ соответственно. Найдем $\angle ab$.
$\angle nb + \angle bm + \angle ma + \angle al = 180° =$
$= 2\angle bm + 2\angle ma = 2\angle ab$, откуда
$\angle ab = 90°$.



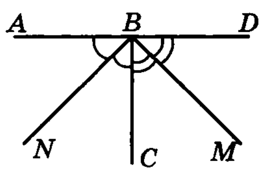
__Ответ__: 90°.

84. Пусть $\angle 1$ и $\angle 2$ – вертикальные углы, c и d – биссектрисы $\angle 1$ и $\angle 2$, соответственно.
$\angle 1$ и $\angle 3$ – смежные углы, тогда $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ (по свойству смежных углов).



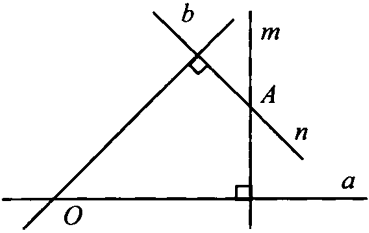
$\angle 1 = \angle 2$, значит $\angle ac = \angle bc = \angle b'd = \angle a'd$, значит $\angle ab' + \angle 3 + \angle ac = 180°$, тогда $\angle dc = 180°$ – развернутый угол и тогда согласно определению развернутого угла лучи d и c лежат на одной прямой, ч.т.д.

85. Допустим, что $\angle ABD \neq 180°$. Тогда $\angle DBM + \angle MBC + \angle CBN + \angle NBA \neq$
$\neq 180°$. Учтем: $\angle DBM = \angle MBC$, $\angle CBN = \angle NBA$. Так как BN и BM – биссектрисы, то



$2\angle NBC + 2\angle CBM \neq 180°$ или $\angle NBC + \angle CBM = \angle NBM \neq 90°$. Но по условию $\angle NBM = 90°$, значит, $\angle ABD = 180°$. Поэтому точки A, B, D лежат на одной прямой.

86. Доказательство от противного: Пусть m и n совпадают, значит лежат на одной прямой l, тогда $l \perp a$ и $l \perp b$, т.е. одна прямая перпендикулярна двум различным прямым a и b. Тогда a и

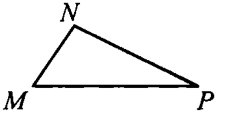


b не пересекаются согласно теореме о прямых, а это противоречит условию. Значит наше предположение не верно, а верно то, что m и n не совпадают, ч.т.д.

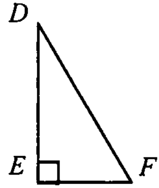
Глава II.
Треугольники

§ 1 Первый признак равенства треугольников

87. **а)** Стороны: MN, NP, MP; углы $\angle NMP$, $\angle MPN$, $\angle PNM$.
б) $MN = 17$ мм, $NP = 33$ мм, $MP = 40$ мм; $P_{\Delta MNP} = 90$ мм.

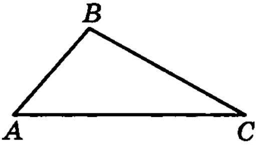


88. **а)** против углов D, E, F лежат соответственно EF, FD, DE;
б) против сторон DE, EF, FD лежат соответственно углы F, D, E;
в) $\angle D$ и $\angle E$; $\angle E$ и $\angle F$; $\angle F$ и $\angle D$ – углы, прилежащие соответственно к сторонам DE, EF, FD.



89. Задача на построение.

90. $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC =$
$= 17$ см $+ 2 \cdot 17$ см $+$
$+ (2 \cdot 17$ см $- 10$ см$) = 75$ см.

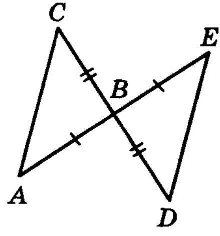


Ответ: $P_{\Delta ABC} = 75$ см.

91. $P_{ABC} = AB + BC + AC = 48$; $18 + BC + AC = 48$ см, тогда $BC + AC = 30$.
Пусть $AC = x$, тогда $BC = x + 4{,}6$ и $2x = 25{,}4$; $x = 12{,}7$, значит $AC = 12{,}7$ см, $BC = 17{,}3$ см.

92. Не, не могут. Если треугольники равные, то у них равны соответственные стороны, а значит равны их перпендикуляры, что не так по условию.

93. **а)** $\Delta ABC = \Delta EBD$ по первому признаку, так как $CB = BD$, $AB = BE$ (потому что B – середина CD и AE), а $\angle CBA$ и $\angle EBD$ – вертикальные.
б) Так как $\Delta ABC = \Delta EBD$, то $\angle A = \angle E = 42°$, $\angle C = \angle D = 47°$, потому что они лежат против равных сторон.



94. **а)** $\angle 1 = \angle 2$; $AB = AC$; AD – общая, значит $\Delta ABD = \Delta ACD$ по двум сторонам и углу между ними.

б) Так как $\Delta ABD = \Delta ACD$, то $BD = DC = 5$ см; $AB = AC = 15$ см.

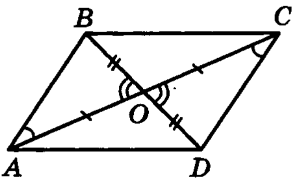
95. **а)** Рассмотрим ΔCDA и ΔABC. $BC = AD$, сторона AC – общая, $\angle 1 = \angle 2$; следовательно $\Delta CDA = \Delta ABC$ по двум сторонам и углу между ними.

б) $AB = CD = 14$ см; $BC = AD = 17$ см.

96. **а)** Рассмотрим ΔDOC и ΔAOB. $BO = OC$; $AO = OD$; $\angle 3 = \angle 4$ как вертикальные; значит $\Delta DOC = \Delta AOB$ по первому признаку.

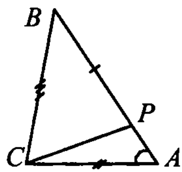
б) $\angle ACD = \angle 2 + \angle OCD = 36° + 74° = 110°$.

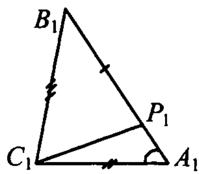
97. Пусть отрезки AC и BD пересекаются в точке O. $\Delta AOB = \Delta COD$ по первому признаку ($\angle AOB$, $\angle COD$ — вертикальные, $BO = OD$, $AO = OC$, потому что O – середина AC и BD).



$\Delta ABC = \Delta CDA$ по первому признаку (AC – общая, $\angle BAC = \angle ACD$ и $AB = CD$ из равенства треугольников ABO и CDO).

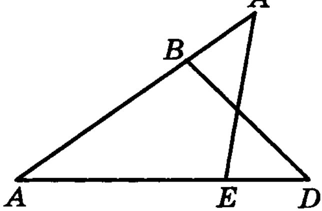
98. Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$. $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, значит $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по первому признаку. Тогда $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$.





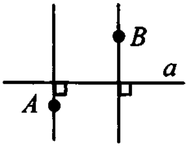
Рассмотрим ΔBPC и $\Delta B_1P_1C_1$. $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BP = B_1P_1$, значит $\Delta BPC = \Delta B_1P_1C_1$ по первому признаку, ч.т.д.

99. $\Delta ACE = \Delta ADB$ по первому признаку ($\angle A$ – общий, $AC = AD$, $AE = AB$). Отсюда $\angle ABD = \angle CED$. Но эти углы смежны углам CBD и DEC, значит, $\angle CBD = \angle DEC$.

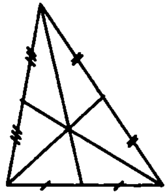


§ 2 Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

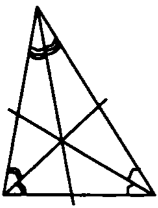
100.



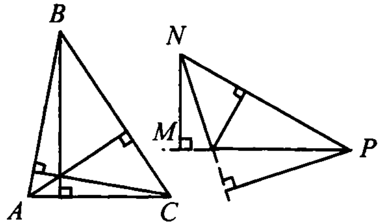
101.



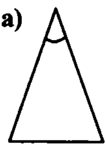
102.



103.



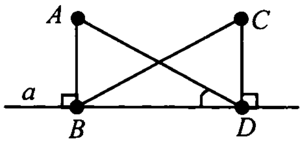
104. **а)**



б)

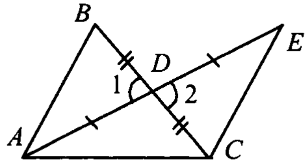
в)

105. **а)** Рассмотрим ΔCDB и ΔABD; сторона BD – общая; $AB = CD$; $\angle B = \angle D = 90°$ по условию. Значит $\Delta CDB = \Delta ABD$ по первому признаку.



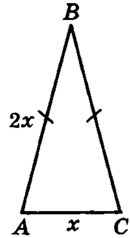
б) $\angle ADB = \angle CBD$, следовательно $\angle ABC - \angle CBD = 90° - 44° = 46°$.

106.а) Рассмотрим ΔECD и ΔABD; $BD = DC$; $AD = DE$; $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, значит $\Delta ECD = \Delta ABD$ по первому признаку.



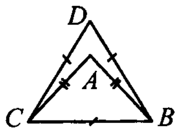
б) $\angle ABD = \angle ECD$ и $\angle ACE =$
$= \angle ACD + \angle CDE = 56° + 40° = 96°$.

107. Обозначим основание треугольника за x, тогда боковая сторона равна $2x$. Получаем $P = x + 2x + 2x = 50$ см, тогда $x = 10$ см, $2x = 20$ см.

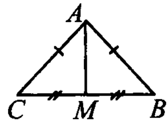


Ответ: основание – 10 см, боковая сторона – 20 см.

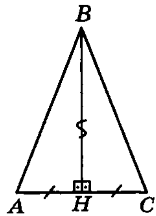
108. $P_{ABC} = AB + BC + AC = BC + 2AB$ (т.к. $AB = AC$); $40 = BC + 2AB$; $P_{ACD} = DB + BC + CD = 3BC$; т.к. $BC = DC = BD$, $45 = 3BC$; значит $BC = 15$ см и $40 = 15 + 2AB$; $2AB = 25$, т.е. $AB = 12{,}5$ см.



109. $P_{ABM} = AB + BM + AM$; $24 = AB + BM + AM$; $P_{ABC} = AB + BC + AC$; $32 = 2AB + 2BM$; $16 = AB + BM$; $24 = AB + BM + AM = 16 + AM$, тогда $AM = 8$ см.



110. Обозначения смотрите на рисунке. $\Delta ABH = \Delta CBH$ по первому признаку (BH – общая, $\angle AHB = \angle BHC$, $AH = HC$). Значит, $AB = BC$, а значит, ΔABC – равнобедренный.



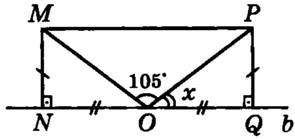
111. Рассмотрим ΔACD и ΔABD; сторона AD – общая, $BD = DC$; $\angle 1 = \angle 2$, значит $\Delta ACD = \Delta ABD$ по первому признаку; тогда $AB = AC$, ч.т.д.

112. Углы $\angle 1$ и $\angle ACB$ – смежные, т.е. $\angle 1 + \angle ACB = 180°$, значит $\angle ACB = 180° - 130° = 50°$;

ΔABC – равнобедренный, значит $\angle BAC = \angle ACB = 50°$;

$\angle 2 = \angle BAC$ (вертикальные), т.е. $\angle 2 = 50°$.

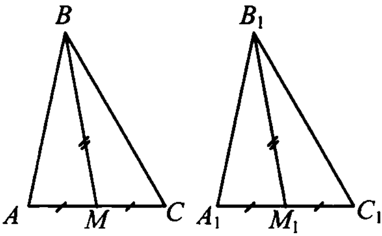
113. **а)** $\Delta MNO = \Delta PQO$ по первому признаку ($\angle MNO = \angle PQO$, так как $MN \perp b$, $PQ \perp b$, $MN = PQ$, $NO = OQ$, так как O – середина NQ). Тогда $MO = PO$ и ΔMOP – равнобедренный; $\angle OMP = \angle MPO$ (как углы при основании равнобедренного треугольника).



б) $\angle MON = \angle POQ$ ($\Delta MNO = \Delta PQO$). Тогда, обозначив угол NOM за x, получим: $x + x + 105° = 180°$, откуда $x = 37°30'$.

<u>**Ответ**</u>: $\angle NOM = 37°30'$.

114.



Рассмотрим ΔABM и $\Delta A_1B_1M_1$; $AB = A_1B_1$; $\angle A = \angle A_1$ из равенства треугольников; $AM = A_1M_1$, потому что

$$AM = \frac{1}{2}AC,\ A_1M_1 = \frac{1}{2}A_1C_1 \text{ и}$$

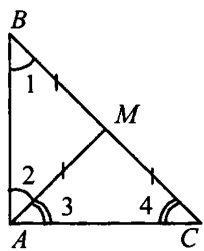
$AC = A_1C_1$. Значит ΔABM и $\Delta A_1B_1M_1$ по первому признаку. Следовательно $BM = B_1M_1$, ч.т.д.

115. ΔABM – равнобедренный, потому что $BM = MA$, тогда $\angle 1 = \angle 2$.

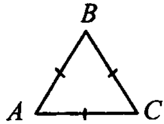
ΔAMC – равнобедренный, потому что $AM = MC$, тогда $\angle 3 = \angle 4$.

$\angle A = \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 4$, т.е.

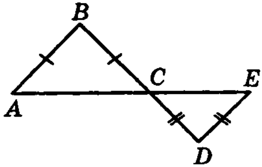
$\angle A = \angle B + \angle C$, ч.т.д.



116. ΔABC – равнобедренный, потому что $AB = BC$, тогда $\angle A = \angle C$;
ΔABC – равнобедренный, потому что $AB = AC$, тогда $\angle B = \angle C$.
Тогда $\angle A = \angle B = \angle C$, ч.т.д.

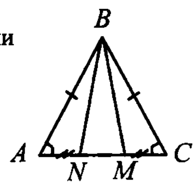


117. ΔABC и ΔEDC – равнобедренные, значит, $\angle A = \angle ACB$, $\angle E = \angle ECD$.
Но $\angle BCA$ и $\angle ECD$ – вертикальные, тогда $\angle A = \angle ACB =$
$= \angle ECD = \angle E$ и $\angle BAC = \angle CED$.



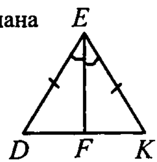
118. а) Рассмотрим ΔBAM и ΔCAN; $AB = AC$, $BM = CN$, $\angle B = \angle C$ (как углы при основании равнобедренного треугольника). Значит $\Delta BAM = \Delta CAN$ по первому признаку.

б) Следовательно $AN = AM$ и ΔAMN – равнобедренный, ч.т.д.

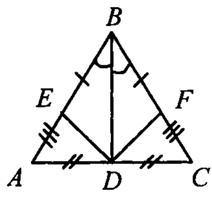


119. Так как ΔDEK – равнобедренный, то EF – медиана и высота, т.е. $DF = FK$ и $EF \perp DK$, тогда
$\angle DEK = 2 \cdot \angle DEF$; $\angle DEK = 2 \cdot 45° = 86°$;

$\angle EFK = 90°$; $KF = DF = \frac{1}{2} DK = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$ см.

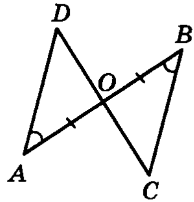


120. Рассмотрим ΔCDF и ΔADE: $AD = DC$, $AE = FC$; $\angle A = \angle C$ как углы при основании равнобедренного треугольника.
Значит $\Delta ADE = \Delta CDE$ по первому признаку.
Рассмотрим ΔBDF и ΔBDE: BD – общая, $\angle 1 = \angle 2$ (по свойству медианы в равнобедренном треугольнике);
$BE = AB - AE = AB - FC = BC - FC = BF$,
значит $\Delta BDF = \Delta BDE$ по первому признаку, ч.т.д.



§ 3 Второй и третий признаки равенства треугольников

121. **а)** $\angle DOA = \angle BOC$ (т. к. они вертикальные), $\angle DAO = \angle CBO$ и $AO = OB$ (по условию), значит, $\Delta DAO = \Delta CBO$ по второму признаку.



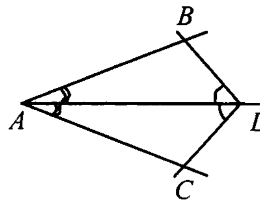
б) Из пункта а) следует, что $BC = AD = 15$ см, $CO = OD = CD = 13$ см.

122. **а)** Рассмотрим ΔABC и ΔCDA; AC – общая, $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$, значит $\Delta ABC = \Delta CDA$ по второму признаку.

б) Тогда $AB = CD = 11$ см, $BC = FD = 19$ см.

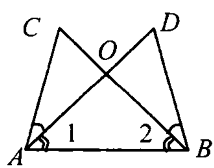
<u>Ответ</u>: 11 см; 19 см.

123. Рассмотрим ΔACD и ΔABD; $\angle BAD = \angle CAD$; $\angle BDA = \angle ADC$; AD – общая; значит $\Delta ACD = \Delta ABD$ по второму признаку. Тогда $BD = CD$, ч.т.д.



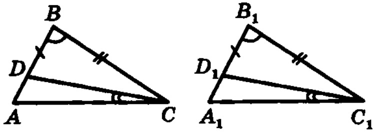
124. Рассмотрим ΔCTO и ΔBPO; $BO = OC$; $\angle B = \angle C = 90°$; $\angle POA = \angle COT$ (как вертикальные). Значит $\Delta CTO = \Delta BPO$ по второму признаку. тогда $BP = CT$, $PO = OT$, $\angle P = \angle T$, ч.т.д.

125. Из $AO = OB$ следует, что ΔAOB – равнобедренный, т.е. $\angle 1 = \angle 2$. Рассмотрим ΔBDA и ΔABC; $\angle CAB = \angle DBA$, т.к. $\angle CAB = \angle CAD + \angle 1$; $\angle DBA = \angle DBC + \angle 2$; $\angle 1 = \angle 2$, сторона AB – общая. Значит $\Delta BDA = \Delta ABC$ по стороне и прилежащим к ней углам. Т.е. $AC = DB$, $\angle C = \angle D$, ч.т.д.



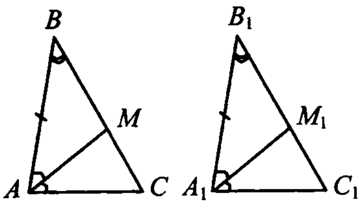
126. Рассмотрим ΔADB и ΔACB; $\angle CA = \angle ABD$; $\angle ABC = \angle DBA$; сторона AB – общая. Значит $\Delta ACB = \Delta BDA$ по второму признаку. Тогда $AC = BD = 13$ см.

127. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по первому признаку (из условия). Отсюда $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$.

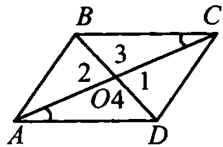


$\Delta BCD = \Delta B_1C_1D_1$ по второму признаку ($BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ по условию, $\angle BCD = \angle BCA - \angle DCA = \angle B_1C_1A_1 - \angle D_1C_1A_1 = \angle B_1C_1D_1$).

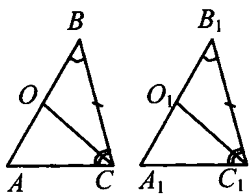
128. Рассмотрим ΔABM и $\Delta A_1B_1M_1$; $AB = A_1B_1$ из равенства $\angle B = \angle B_1$ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$; $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$ (т.к. $\angle A = \angle A_1$), значит $\Delta ABM = \Delta A_1B_1M_1$ по второму признаку. Следовательно $AM = A_1M_1$, ч.т.д.



129. Рассмотрим ΔCOB и ΔAOD; $\angle A = \angle C$; $AO = OC$; $\angle 1 = \angle 2$ (как вертикальные), значит ΔCOB и ΔAOD по второму признаку. Тогда $BO = OD$. Рассмотрим ΔCDO и ΔABO; $AO = OC$; $BO = OD$; $\angle 3 = \angle 4$ (как вертикальные); тогда $\Delta BOA = \Delta CDO$ по первому признаку, ч.т.д.



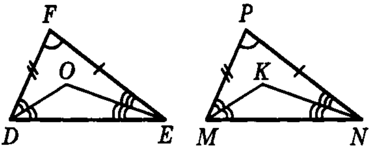
130. а) $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по второму признаку ($BC = B_1C_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$). Следовательно $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$. $AO = A_1O_1$ (т.к. $AO = \frac{1}{2}AB$, $A_1O_1 = \frac{1}{2}A_1B_1$, $AB = A_1B_1$). Значит $\Delta AOC = \Delta A_1O_1C_1$ по первому признаку, ч.т.д.



б) Рассмотрим ΔBCO и $\Delta B_1C_1O_1$; $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$,

$OB = O_1B_1$ (т.к. $OB = \frac{1}{2}AB$, $O_1B_1 = \frac{1}{2}A_1B_1$, $AB = A_1B_1$). Значит ΔBCO и $\Delta B_1C_1O_1$ по первому признаку.

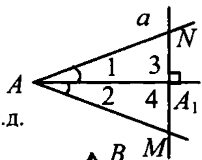
131. $\Delta DEF = \Delta MNP$ по первому признаку (по условию). $\angle D = \angle M$, $\angle E = \angle N$, $DE = MN$.



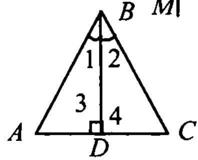
$\angle ODE = \frac{1}{2}\angle D = \frac{1}{2}\angle M = \angle KMN$. Аналогично $\angle KNM = \angle OED$.

$\Delta DEO = \Delta MNK$ по второму признаку, значит, $\angle DOE = \angle MKN$.

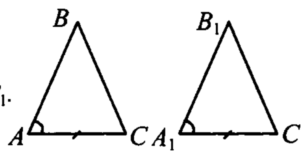
132. $\Delta AMA_1 = \Delta ANA_1$ по второму признаку (AA_1 – общая, $\angle 1 = \angle 2$ – по условию, $\angle 3 = \angle 4 = 90°$ – по условию). Значит $AN = AM$, т.е. ΔAMN – равнобедренный, ч.т.д.



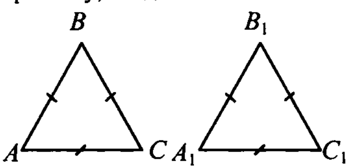
133. $\Delta CDB = \Delta ABO$ по второму признаку (BD – общая, $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4 = 90°$). Значит $AB = BC$, т.е. ΔABC – равнобедренный, ч.т.д.

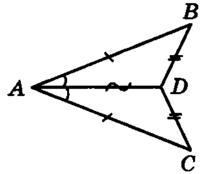


134. Т.к. ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ – равнобедренные, то $\angle A = \angle C$, $\angle A_1 = \angle C_1$. Из $\angle A = \angle A_1$ следует, что $\angle C = \angle C_1$. Итак, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, значит $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по второму признаку, ч.т.д.



135. Имеем: $AB = AC = BC$, $A_1B_1 = A_1C_1 = B_1C_1$. Т.к. $AB = A_1B_1$, то $BC = B_1C_1$ и $AC = A_1C_1$. Тогда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по третьему признаку, ч.т.д.





136. $\angle BAD = \angle DAC$, т. к. $\Delta BAD = \Delta DAC$ по третьему признаку (AD – общая, $AB = AC$, $BD = DC$ – по условию).
$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = 50°$,
$\angle CAD = 25°$.

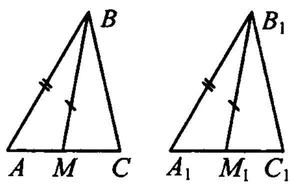
137. Рассмотрим ΔCDA и ΔABC; $AB = CD$; $BC = AD$; AD – общая. Значит $\Delta CDA = \Delta ABC$. Следовательно $\angle B = \angle D$, ч.т.д.

138. Рассмотрим ΔDCA и ΔABC. $AB = CD$; $BD = AC$; сторона AD – общая. Значит $\Delta ABD = \Delta DCA$ по третьему признаку. Тогда $\angle ADB = \angle CAD$; из равенства треугольников $\angle BAD = \angle CDA$.
$\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD$, но $\angle BAD = \angle CDA$, а $\angle CAD = \angle ADB$;
$\angle CDB = \angle CDA - \angle ADB$; $\angle BAC = \angle CDB$, ч.т.д.

139. $\Delta CDA = \Delta ABC$ по третьему признаку ($AB = CD$; $BC = AD$; AC – общая). Значит $\angle B = \angle D$. Тогда $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle ACB = \angle CAD$.

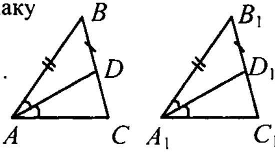
$\angle ABE = \dfrac{1}{2}\angle ABC$; $\angle ADF = \dfrac{1}{2}\angle ADC$, значит $\angle ABE = \angle ADF$,

т.к. $\angle B = \angle D$. Рассмотрим ΔCDF и ΔABE; $AB = CD$;
$\angle BAC = \angle DCA$; $\angle ABE = \angle CDF$, т.к. $\angle ABE = ADF = CDF$.
Значит $\Delta CDF = \Delta ABE$ по второму признаку.



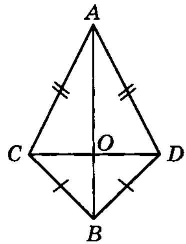
140. Из $AC = A_1C_1$, т.е. $\dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}A_1C_1$ получаем $AM = A_1M_1$. Рассмотрим ΔABM и $\Delta A_1B_1M_1$; $AB = A_1B_1$; $BM = B_1M_1$; $AM = A_1M_1$. Значит $\Delta ABM = \Delta A_1B_1M_1$ по третьему признаку. Следовательно $\angle A = \angle A_1$.
Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$. $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$.
Значит $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по первому признаку, ч.т.д.

141. $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$ по третьему признаку ($AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$, $BD = B_1D_1$). Значит $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$, $\angle B = \angle B_1$. Т.к. AD и A_1D_1 – биссектрисы, получаем $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$. $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Следовательно $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по второму признаку, ч.т.д.



142. **а)** $\Delta ABC = \Delta ABD$ по третьему признаку (AB – общая, $AC = AD$ и $BC = BD$, так как треугольники равнобедренные). Значит, $\angle ADB = \angle ACB$.

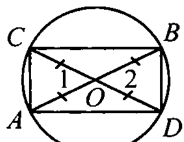
б) Так как $\angle CAB = \angle BAD$ ($\Delta ABC = \Delta ABD$), AO – биссектриса равнобедренного треугольника ACD, значит, она является также и медианой. Следовательно, $CO = OD$.



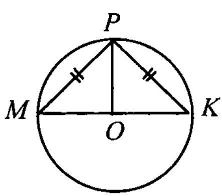
§ 4 Задачи на построение

143. **а)** Хорды: MN; CD; AB; **б)** диаметр: AB; **в)** радиусы: OP; OA; BO.

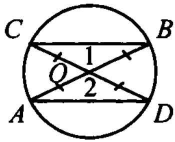
144. $\Delta AOC = \Delta BOD$ по первому признаку ($OA = OB = R$, $CO = OD = R$, $\angle 1 = \angle 2$ – вертикальные). Значит $AD = DC$. Рассмотрим ΔABC и ΔABD. DB – общая, $BC = AD$, $PC = AB$, значит $\Delta ABC = \Delta ABD$ по первому признаку. Тогда $\angle DAB = \Delta ABD$.



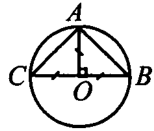
145. Из $MP = PK$ следует, что ΔMPK – равнобедренный. Т.к. $MO = OK$ – радиусы, то PO – медиана равнобедренного ΔMPK, опущенная на основание, тогда PO – биссектриса и высота (по свойству равнобедренного треугольника) и $\angle MOP = 90°$.



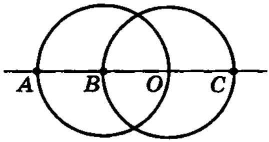
146. Рассмотрим ΔCOB и ΔAOD. $AO = OB = OC = OD$ (как радиусы), $\angle 1 = \angle 2$ (вертикальные). Значит $\Delta COB = \Delta AOD$ по второму признаку. Следовательно $AD = CB = 13$ см и $AO = OB = OC = OD = 8$ см, тогда $P_{AOD} = AO + OD + AD = 8 + 8 + 13 = 29$ см.



147. Рассмотрим ΔBOA и ΔCOA; сторона OA – общая, $CO = OB$ – радиусы, $\angle COA = \angle BOA = 90°$. Значит $\Delta COA = \Delta BOA$ по первому признаку и $AC = AB$, ч.т.д.

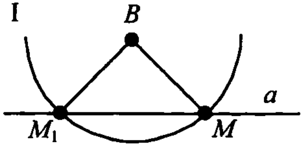


148. Окружность с центром в точке B и радиусом AB пересекает прямую AB в двух точках. Одна из них A, а вторую назовем точкой O. Теперь проведем окружность с таким же радиусом, но с центром в точке O. Точка пересечения второй окружности с прямой AB, не совпадающая с точкой B – точка C. Отрезок BC – искомый, так как $AB = BO = OC$, $AB = \frac{1}{2}BC$ и $BC = 2AB$.



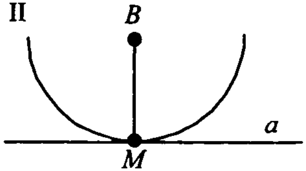
149. Возможны три случая:

I

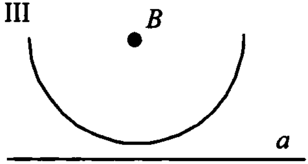


на прямой есть две точки, удаленные от B на расстояние PQ.

II

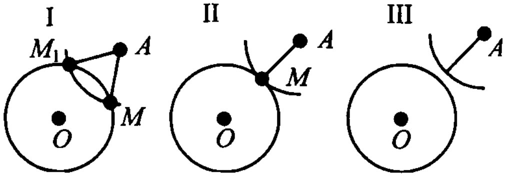


одна точка на прямой, которая удалена от B на расстояние PQ.

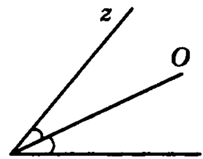


не существует такой точки на прямой a.
$PQ = BM$ – радиус окружности с центром в точке B, так мы строили точку M. В третьем случае задача не имеет решения.

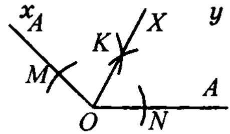
150. Построение делаем аналогично предыдущей задаче. В третьем случае задача не имеет решения.



151. Построим на луче xy данный угол BAC (п. 23 учебника). Назовем построенный угол Oxy. На луче xO еще раз построим $\angle BAC$. Полученный угол zxy – искомый, так как он равен $2\angle BAC$.

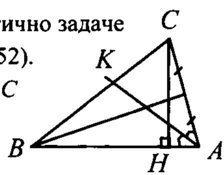


152. Построим окружность любого радиуса с центром в точке O. Окружность пересечет стороны угла в точках N и M. Построим две окружности с одинаковым радиусом, большим половины отрезка MN. Одна окружность с центром M, а другая с центром N. Эти окружности пересекутся в точке K. OK и есть искомый луч.



153. Построение приведено в учебнике.

154. **а)** Построение биссектрисы AK – аналогично задаче о построении биссектрисы угла (см. №152).
б) Строим точку M – середину отрезка AC (аналогично задаче о построении середины отрезка, см. учебник).

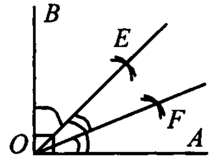


в) Построим прямую a так, чтобы

$C \in a$ и $a \perp AB$ (задача 153). Пересечение AB и a – точка H.

CH – искомая высота.

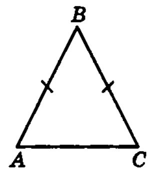
155. а) С помощью треугольника построим $\angle AOB$ – прямой (либо аналогично задаче о построении перпендикулярных прямых, см. учебник).
Построим биссектрису OE, имеем:
$\angle AOE = \angle BOE = 45°$.



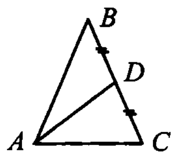
б) Построим OF – биссектрису $\angle AOE$. Имеем: $\angle AOF = \angle EOF = 22°30'$.

156. Пусть $AB = x$, тогда $BC = x + 2$, $AC = x + 1$. $P_{ABC} = AB + BC + AC$.
$15 = x + x + 2 + x + 1$; $3x = 12$; $x = 4$. $AB = 4$ см;
тогда $BC = 4 + 2 = 6$ см; $AC = 4 + 1 = 5$ см.

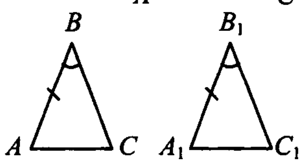
157. Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AB = BC$). $AC = AB + 2$ см $= AB + BC - 3$ см, откуда $BC = 5$ см $= AB$, $AC = AB + 2$ см $= 7$ см.



158. $P_{ABD} = AB + BD + AD$, значит $P_{ABD} - P_{ADC} =$
$= 2$ см. $P_{ADC} = AC + CD + AD$, значит
$AB + BD + AD - AC - CD - AD = 2$;
$AB - AC = 2$; из $AC = 8$ следует, что
$AB - 8 = 2$, т.е. $AB = 10$ см.



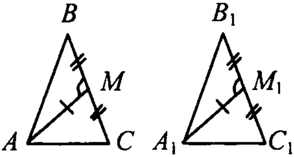
159. Имеем $AB = BC = A_1B_1 = B_1C_1$ – из условия.
Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$.
$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B =$
$= \angle B_1$, значит $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по первому признаку, ч.т.д.



160. Пусть a пересекает AB в точке O.

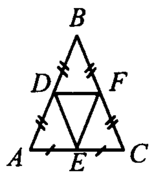
а) Выберем любую точку C на прямой a. ΔABC – равнобедренный, так как CO – медиана и высота, значит, $AB = BC$.

б) Пусть $AC = CB$, где C – любая точка плоскости, удовлетворяющая равенству. Тогда ΔABC – равнобедренный и CO – медиана и высота. Значит, CO лежит на прямой a, т. е. $C \in a$.



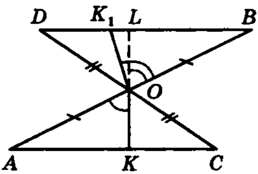
161. Рассмотрим ΔABM и $\Delta A_1B_1M_1$.
$AM = A_1M_1$, $BM = B_1M_1$ (т.к. $BM = \frac{1}{2}BC$; $B_1M_1 = \frac{1}{2}B_1C_1$ и $BC = B_1C_1$); $\angle M = \angle M_1$, значит $\Delta ABM = \Delta A_1B_1M_1$ по первому признаку, следовательно $\angle B = \angle B_1$, $AB = A_1B_1$.
Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$. $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BC = B_1C_1$, тогда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по первому признаку, ч.т.д.

162. а) Рассмотрим ΔAEC и ΔADB; $AD = AE$; $DB = CE$, $\angle D = \angle E$ (углы при основании равнобедренного треугольника). Значит $\Delta AEC = \Delta ADB$ по первому признаку и $AC = AB$.
Рассмотрим ΔEBA и ΔDAC; $AD = AE$, $AC = AB$, $DC = BE$ (т.к. $BD = CE$ и BC – общая). Тогда $\Delta EBA = \Delta DAC$ по третьему признаку, значит $\angle CAD = \angle BAE$.
б) $\Delta DAC = \Delta EAB$ по второму признаку ($AD = AE$, $\angle D = \angle E$ – углы при основании равнобедренного треугольника, $\angle CAD = \angle BAE$). Следовательно $DC = BE$, $AC = AB$.



163. Рассмотрим ΔCEF и ΔADE. $AD = FC$, $AE = EC$, $\angle A = \angle C$ (углы при основании равнобедренного треугольника). Значит ΔCEF и ΔADE по первому признаку. Тогда $DE = EF$, т.е. ΔDFE – равнобедренный, ч.т.д.

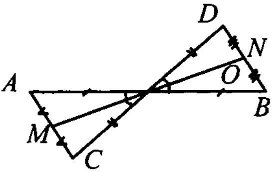
164. Из $AB = BC = AC$, $EB = FC = AD$ следует, что $AE = BF = CD$.
Далее, $AD = EB = FC$, $AE = BF = DC$, $\angle A = \angle B = \angle C$ (как углы равностороннего треугольника). Значит $\Delta AED = \Delta EBF = \angle DFC$ по первому признаку. Тогда $DE = EF = DC$ и значит ΔDEF – равносторонний.



165. а) $\angle A = \angle B$, так как $\Delta AOC = \Delta BOD$ по первому признаку.
$\Delta AOK = \Delta BOK_1$ по первому признаку, поэтому $K_1O = OK$.
б) Допустим, что точка O не лежит

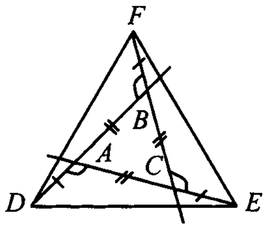
на прямой KK_1. Тогда существует такая точка L, что OL – продолжение луча OK. Но из пункта а) $\angle AOK = \angle K_1OB$. Также $\angle AOK = \angle BOL$, как вертикальные. Значит, $\angle K_1OB = \angle BOL$. Тогда точки K, O, K_1 лежат на одной прямой.

166. Рассмотрим ΔBOD и ΔAOC. $AO = OB$, $CO = OD$, $\angle AOC = \angle BOD$ как вертикальные; значит $\Delta BOD = \Delta AOC$ по первому признаку. Следовательно $AC = BD$, $\angle C = \angle D$, $\angle A = \angle B$.

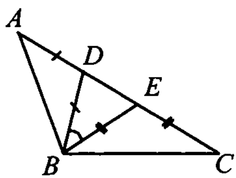


Рассмотрим ΔDON и ΔMOC. $OC = OD$, $\angle C = \angle D$, $MC = DN$ (т.к. $MC = \frac{1}{2}AC$, $DN = \frac{1}{2}BD$ и $AC = BD$); значит $\Delta DON = \Delta MOC$ по первому признаку. Следовательно $OM = ON$, ч.т.д.

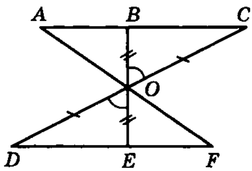
167. ΔABC – равносторонний, значит $\angle A = \angle B = \angle C$. $\angle 1 = \angle A$, $\angle 2$ и $\angle B$, $\angle 3$ и $\angle C$ – смежные, значит $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. Рассмотрим ΔFEC, ΔDEA и ΔDBF. $BF = CE = AD$; $DB = FC = AE$ ($AB = BC = FC$ и $DA = BF = CE$), $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, значит $\Delta DBF = \Delta FEC = \Delta DEA$ по первому признаку, следовательно $FD = FE = DE$ и ΔDFE – равносторонний, ч.т.д.



168. Т.к. ΔADB – равнобедренный, то $\angle A = \angle DAB = \angle ABO = 38°$.
Т.к. ΔBEC – равнобедренный, то $\angle C = \angle BCE = \angle CBE = 32°$.
$\angle B = \angle ABD + \angle DBE + \angle CBE$ или $110° = 38° + \angle DBE + 32°$, т.е. $\angle DBE = 40°$.

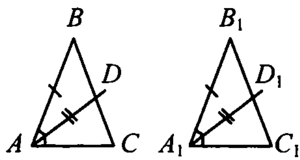


169. $\Delta BOC = \Delta DOE$ по первому признаку: $OC = OD$, $OB = OE$, $\angle BOC = \angle EOF$ (вертикальные). Отсюда следует, что $\angle C = \angle D$, $BC = ED$. $AC = DF$, так как $\Delta AOC = \Delta FOD$ по второму признаку ($OC = OD$, $\angle C = \angle D$, $\angle AOC = \angle DOF$). Тогда



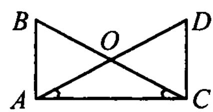
$AB = AC - BC = DF - DE = EF$. Таким образом, $AB = EF$.

170. Из $\angle A = \angle A_1$ следует $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$, т.к. AD и A_1D_1 – биссектрисы. $\Delta BAD = \Delta B_1A_1D_1$ по первому признаку ($AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$, $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$), значит $\angle B = \angle B_1$.



Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$. $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, следовательно $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по второму признаку, ч.т.д.

171. $\Delta ACB = \Delta ACD$ по первому признаку (AC – общая, $BC = AD$, $\angle C = \angle A$); значит $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, $AB = CD$.



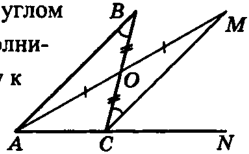
Рассмотрим ΔDOC и ΔAOB. $AB = CD$, $\angle B = \angle D$, $\angle BAO = \angle DCO$ (т.к. $\angle BAO = \angle A - \angle DAC$, $\angle DCO = \angle C - \angle ACB$ и $\angle A = \angle C$, $\angle DAC = \angle ACB$); значит $\Delta DOC = \Delta AOB$ по второму признаку, ч.т.д.

172. ΔDAC – равнобедренный, потому что $AD = AC$, AO – высота, проведенная к основанию, значит AO – биссектриса и медиана ΔDAC, значит $\angle AOC = \angle AOD$, $CO = OD$.

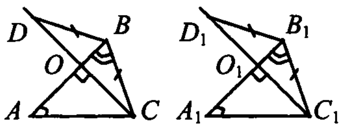
$\Delta ADB = \Delta ACB$ по первому признаку (AB – общая, $AC = AD$, $\angle AOC = \angle AOD$).

Значит $BC = BD$, $\angle ACB = \angle ADB$, ч.т.д.

173. Введем обозначения: $\angle NCB$ смежен с углом BCA треугольника ABC. Сделаем дополнительное построение: продлим медиану к стороне BC за сторону BC на длину самой медианы (обозначим ее AO, а точку за стороной BC буквой M). $\Delta ABO = \Delta MCO$ по первому признаку. Тогда $\angle B = \angle BCM$, но $\angle OCM < \angle BCN$, тогда $\angle B < \angle BCN$. Утверждение доказано.



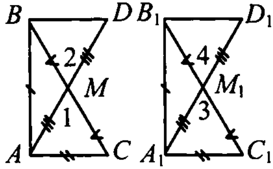
174. Выполним дополнительное построение:
$\angle ABD = \angle ABC$ и $BD = BC$;
$\angle A_1B_1D_1 = \angle A_1B_1C_1$ и $B_1D_1 = B_1C_1$. $\Delta DBC = \Delta D_1B_1C_1$ – равнобедренные; BO и B_1O_1 – биссектрисы, тогда они – медианы и высоты, а значит $DO = OC = D_1O_1 = O_1C_1$, $BO \perp DC$, $B_1O_1 \perp D_1C_1$.



$\Delta AOC = \Delta A_1O_1C_1$ по катету и острому углу ($OC = O_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$); значит $AO = A_1O_1$. Следовательно $AB = AO + OB = A_1O_1 + O_1B_1 = A_1B_1$; отсюда $AB = A_1B_1$.
Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$. $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, значит $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по первому признаку, ч.т.д.

175. $\Delta OAD = \Delta OBC$ по первому признаку ($OD = OC$, $OB = OA$, $\angle O$ – общий). Значит, $\angle ODA = \angle OCB$. $\angle BDE = \angle ACE$, $\angle BED = \angle AEC$, значит, $\angle EBD = 180° - \angle E - \angle D = 180° - \angle E - \angle C = \angle EAC$. $\Delta BED = \Delta AEC$ по второму признаку. Отсюда $BE = AE$. Рассмотрим треугольники AOE и BOE. Они равны по трем сторонам. Значит, $\angle BOE = \angle EOA$, т. е. OE – биссектриса $\angle YOX$.
Биссектрису угла можно построить, отложив на его сторонах две пары равных отрезков и соединив концы этих отрезков, как показано на рисунке. Луч, проходящий через вершину угла и точку пересечения полученных отрезков, является биссектрисой угла.

176. 1) Дополнительное построение: проведем AM и A_1M_1 за точки M и M_1 и отметим на продолжениях точки D и D_1, чтобы $AM = AD$, $A_1M_1 = M_1D_1$.



2) $\Delta BMD = \Delta AMC$ ($AM = MD$, $BM = MC$, $\angle 1 = \angle 2$, т.к. они вертикальные, значит $\Delta AMC = \Delta BMD$ по первому признаку, следовательно $AC = BD$ следует из $AC = A_1C_1$, $BD = B_1D_1$.

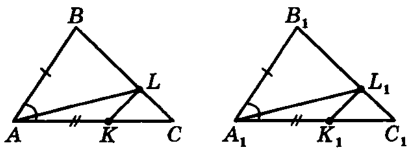
Рассмотрим $\Delta B_1M_1D_1$ и $\Delta A_1M_1C_1$: $A_1M_1 = M_1D_1$, значит $B_1M_1 = M_1C_1$, $\angle 3 = \angle 4$, т.к. они вертикальные, значит $\Delta A_1M_1C_1 = \Delta B_1M_1D_1$ по первому признаку, следовательно $A_1C_1 = B_1D_1$.

3) Рассмотрим ΔABD и $\Delta A_1B_1D_1$. $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$ следует из $AM = A_1M_1$, $BD = B_1D_1$, значит $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$, т.е. медианы BM и B_1M_1 треугольников опущены на соответственно равные стороны AD и A_1D_1.

Из $BM = B_1M_1$ следует, что $BC = B_1C_1$ (т.к. $BC = 2BM$; $B_1C_1 = 2B_1M_1$).

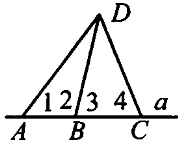
4) Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. Значит $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по третьему признаку, ч.т.д.

177. Из условия: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по первому признаку.

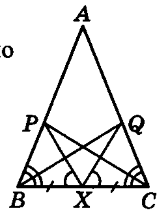


а) $\Delta LKC = \Delta L_1K_1C_1$ по первому признаку ($LC = L_1C_1$ по условию, $\angle C = \angle C_1$ из равенства ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, $KC = AC - AK = A_1C_1 - A_1K_1 = K_1C_1$). Поэтому $KL = K_1L_1$.

б) $\Delta LCA = \Delta L_1C_1A_1$ по первому признаку (из условия), значит, $AL = A_1L_1$.

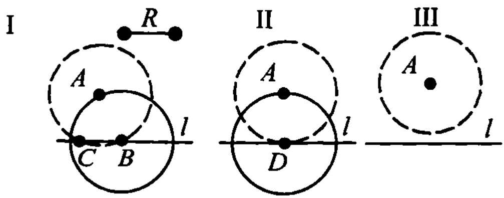


178. Допустим, что $AD = BD = CD$, ΔABD, ΔDBC и ΔADC – равнобедренные, и тогда $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 1 = \angle 4$, откуда $\angle 2 = \angle 3$. Но $\angle 2$ и $\angle 3$ – смежные, значит $\angle 2 = \angle 3 = 90°$, а это противоречит теореме о том, что через точку, не лежащую на прямой можно провести единственный перпендикуляр к данной прямой. Значит наше предположение не верно, а верно то, что требовалось доказать.



179. $\Delta BPX = \Delta CQX$ по второму признаку ($BX = XC$ по условию, $\angle B = \angle C$, так как ΔABC – равнобедренный, $\angle PXB = \angle QXC$ по условию). Отсюда $BP = CQ$ и $\Delta BPC = \Delta CQB$ по первому признаку. Значит, $BQ = CP$.

180. Построим окружность с центром в точке A и радиусом R. Эта окружность пересечет прямую l в двух точках, в одной точке, либо не пересечет. Соответственно задача будет иметь два решения, одно решение либо ни одного решения.



<u>I случай.</u>

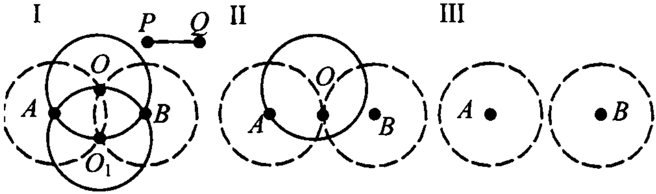
Центр искомой окружности может быть или B или C, т.е. задача имеет два решения.

<u>II случай.</u>

Центр искомой окружности D, т.е. задача имеет одно решение.

<u>III случай.</u> Задача не имеет решения, т.к. на прямой l нет точки, удаленной от A на расстояния R.

181. Построим окружность с центром в A и радиусом PQ и окружность с центром в B и тем же радиусом. Эти окружности пересекутся в точках O и O_1, в точке O или не пересекутся.



<u>I случай.</u>

Если $AB < 2PQ$, то центр искомой окружности может быть или O, или O_1. Два решения.

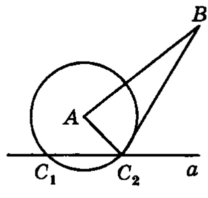
<u>II случай.</u>

Если $AB = 2PQ$, то центр искомой окружности O. Одно решение.

<u>III случай.</u>

Если $AB > 2PQ$, то задача не имеет решения.

182. Построим окружность радиусом PQ и с центром в точке A. Окружность может иметь или две, или одну, либо не иметь общих точек с прямой a.



1) <u>Две точки пересечения</u>: обозначим их C_1 и C_2. ΔABC_1 и ΔABC_2 – искомые.

2) <u>Одна точка</u>: обозначим ее буквой C. ΔABC – искомый.

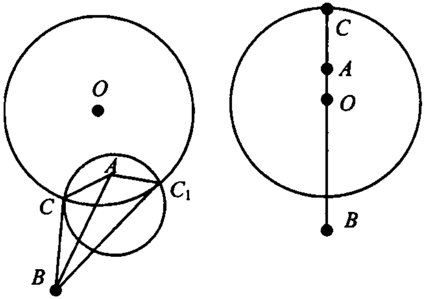
3) <u>Общих точек нет</u>: решений нет.

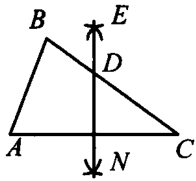
Первые два случая существуют, если точки A, B и C не лежат на прямой a.

183. 1) Построим окружность с центом в точке A и радиусом PQ.

2) Данная и построенная окружности пересеклись в точке C.

3) Соединим точки A, B, C и получим ΔABC. Задача может иметь два или ни одного решения.





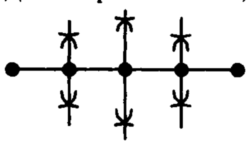
184. Построим две окружности с центрами в точках A и C; радиусы – равные, но больше половины AC.

Окружности пересекутся в точках E и N. EN и BC пересекутся в точке D, которая и есть искомая точка.

Доказательство: в ΔADC, DO – серединный перпендикуляр, т.е. ΔADC – равнобедренный, значит $AD = AC$.

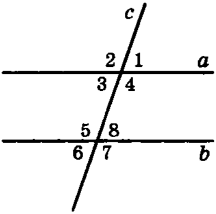
Задача может и не иметь решения, если $\angle C$ прямой или тупой, т.к. в таком случае EN и BC не пересекаются, т.е. нет такой точки $D \in BC$, что $AD = DC$.

185. Делим отрезок пополам, затем его каждую половину – пополам.



Глава III.
Параллельные прямые

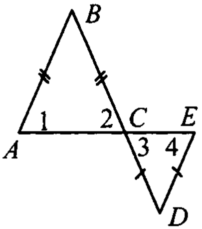
§ 1 Признаки параллельности двух прямых



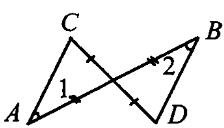
186. а) $\angle 7 = \angle 5$ (так как они вертикальные), $\angle 5 + \angle 3 = 180°$. Эти углы односторонние при пересечении прямых a и b секущей c, значит, $a \parallel b$.

б) $\angle 1 = \angle 3$, а углы 3 и 6 – соответственные при прямых a и b и секущей c. Поэтому $a \parallel b$.

в) $\angle 1 = \angle 3 = 45°$, $\angle 7 = 3 \cdot 45° = 135°$, $\angle 8 = 180° - \angle 7 = 45° = \angle 3$. Углы 8 и 3 – накрест лежащие при пересечении прямых a и b секущей c, следовательно, $a \parallel b$.

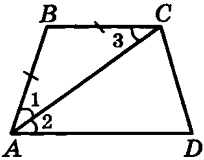


187. ΔABC – равнобедренный, потому что $AB = BC$. $\angle 1 = \angle 2$ (углы при основании равнобедренного треугольника). ΔCDE – равнобедренный, потому что $CD = DE$. Значит $\angle 3 = \angle 4$. $\angle 2 = \angle 3$ (вертикальные); $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, отсюда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$, т.е. $\angle 1$ и $\angle 2$ – накрест лежащие при прямых AB. DE и секущей AE. Значит $AB \parallel DE$ по признаку параллельности, ч.т.д.



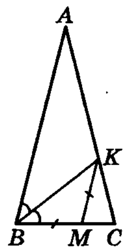
188. Рассмотрим ΔBDO и ΔACO. $AO = OB$, $CO = OD$, $\angle COA = \angle DOB$ (вертикальные). Значит $\Delta AOC = \Delta BOD$ по первому признаку. Следовательно $\angle 1 = \angle 2$, а так как $\angle A$ и $\angle B$ – накрест лежащие при прямых AC, BD и секущей AB, то $AC \parallel BD$.

189. Так как ΔABC – равнобедренный, то $\angle 1 = \angle 3$. Тогда $\angle 3 = \angle 2$, а это накрест лежащие углы при пересечении прямых BC и AD секущей AC, т. е. $BC \parallel AD$.



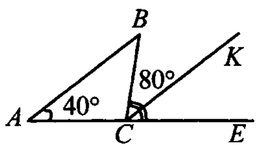
190. $AB = BC$, значит $\angle A = \angle C = 70°$ (углы при основании равнобедренного треугольника).
$\angle EAC = 35°$; т.к. $\angle A = 70°$, $\angle DAE = 35°$.
$\angle ADE$ – равнобедренный, значит $\angle DEA = \angle EAC = 35°$,
$\angle DEA$ и $\angle EAC$ – накрест лежащие при прямых DE, AC и секущей AE, следовательно $DE \parallel AE$, ч.т.д.

191. По условию ΔMBK – равнобедренный, т. е. $\angle MBK = \angle MKB$. Но $\angle ABK = \angle KBM$ (потому что BK – биссектриса), а $\angle ABK$ и $\angle BKM$ – накрест лежащие при прямых AB и KM и секущей BK. Отсюда $AB \parallel KM$.

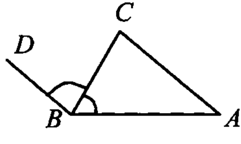


192. $\angle BCK = \angle KCE = \dfrac{1}{2}\angle DCE = 40°$.

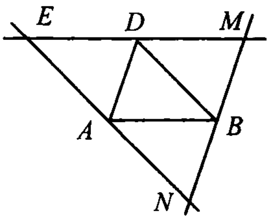
$\angle BAC$ и $\angle KCE$ – соответственные при прямых AB, CK и секущей AC;
$\angle BAC = \angle KCE = 40°$, значит
$AB \parallel CK$, ч.т.д.



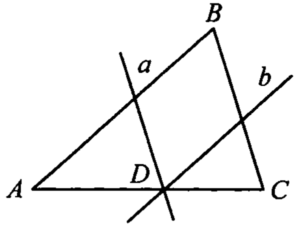
193. $\angle ABC = 70°$, то $\angle DBA = 140°$ (т.к. BC – биссектриса).
$\angle DBA$ и $\angle A$ – односторонние при прямых AC, BD и секущей AB,
$\angle DBA + \angle A = 140° + 40° = 180°$, значит $DB \parallel AC$ по признаку параллельности прямых, ч.т.д.



194.

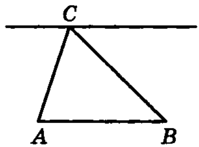


195.

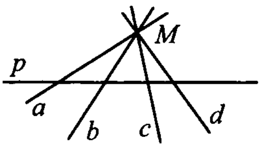


§ 2 Аксиома параллельных прямых

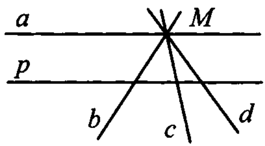
196. По аксиоме параллельных прямых через точку C можно провести только одну прямую, параллельную стороне AB.



197. Возможны два случая:

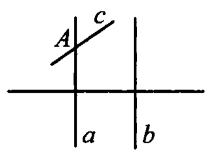


<u>I случай:</u> 4 прямые

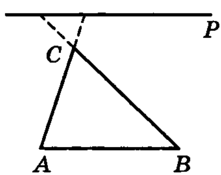


<u>II случай:</u> 3 прямые ($a \parallel p$)

198. Т.к. $a \perp p$ и $b \perp p$, то $a \parallel b$ (по признаку параллельности двух прямых).
Пусть A – точка пересечения a и c. Так как через точку можно провести только одну прямую, параллельную данной, то c пересекает и b.

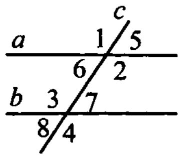


199. Прямые BC и AC имеют общие точки с прямой AB. По следствию из аксиомы параллельных они имеют общие точки и с параллельной прямой P, т. е. пересекают прямую P.



200. Прямая AP пересекает AB, AE, AC, BC и PQ. Значит по следствию прямая P пересекает AB, AE, AC, BC и PQ, ч.т.д.

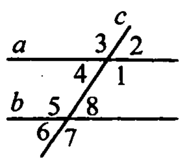
201. Пусть $\angle 2$ и $\angle 3$ – накрест лежащие при параллельных прямых a и b, и $\angle 2 + \angle 3 =$ $= 210°$ (см. рисунок). $\angle 2 = \angle 3 = 210° : 2 =$ $= 105°$; $\angle 1 = \angle 2 = 105°$ (т.к. эти углы вертикальные); аналогично $\angle 3 = \angle 4 = 105°$;



$\angle 2$ и $\angle 6$ – смежные, значит $\angle 2 + \angle 6 = 180°$,
т.е. $\angle 6 = 180° - 105° = 75°$;
$\angle 5 = \angle 6 = 75°$ (вертикальные);
$\angle 7 = \angle 6 = 75°$ (накрест лежащие) и $\angle 8 = \angle 7 = 75°$ (вертикальные).

202. $\angle 1$ и $\angle 2$ – односторонние при прямых a и b и секущей d;
$\angle 1 + \angle 2 = 42° + 140° = 182° \neq 180°$, значит a и b не параллельны.
$\angle 1$ и $\angle 3$ – односторонние при прямых a и c и секущей d;
$\angle 1 + \angle 3 = 42° + 138° = 180°$, значит a и c параллельны.
$\angle 2$ и $\angle 3$ – односторонние при прямых b и c и секущей d;
$\angle 2 \neq \angle 3$, значит b и c не параллельны.

203. а) $\angle 1 = 150°$, значит $\angle 3 = \angle 1 = 150°$ (вертикальные), $\angle 5 = \angle 1 = 150°$ (накрест лежащие при параллельных прямых).



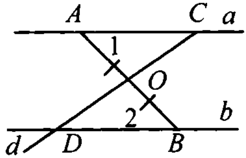
$\angle 7 = \angle 5 = 150°$ (вертикальные); $\angle 1$ и $\angle 4$ – смежные, значит $\angle 1 + \angle 4 = 180°$; $\angle 4 = 180° -$ $- 150° = 30°$; $\angle 2 + \angle 4 = 30°$ (вертикальные).

$\angle 8 = \angle 4 = 30°$ (накрест лежащие); $\angle 6 + \angle 8 = 30°$ (вертикальные).

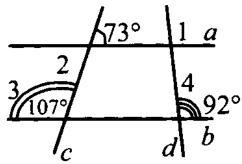
б) Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 4 = x - 70$. $\angle 1$ и $\angle 4$ – смежные, значит $x + x - 70 = 180$; $2x = 250$; $x = 125$; $\angle 1 = 125°$, $\angle 4 = \angle 1 - 70° = 55°$.

Аналогично п. а): $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 125°$, $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 55°$.

204. Рассмотрим ΔBOD и ΔAOC. $AO = BO$. $\angle AOC = \angle BOD$ (вертикальные); $\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие при параллельных прямых). Значит $\Delta BOD = \Delta AOC$ по второму признаку. Следовательно $CO = OD$, ч.т.д.

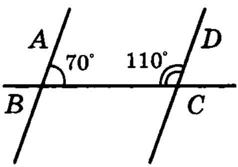


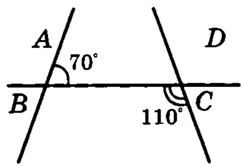
205. $\angle 2$ и угол 73° – вертикальные, значит $\angle 2 = 73°$; $\angle 2$ и $\angle 3$ – односторонние при прямых a, b и секущей c; $\angle 2 + \angle 3 = 73° + 107° = 180°$, значит $a \parallel b$ по признаку параллельности прямых.



$\angle 1$ и $\angle 4$ – соответственные углы при параллельных a и b, значит $\angle 1 = \angle 4 = 92°$.

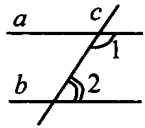
206. Пусть точки A и D лежат по одну сторону от прямой BC. Тогда $\angle ABC$ и $\angle BCD$ – односторонние при прямых AB и CD и секущей BC и $\angle ABC + \angle BCD = 180°$, т. е. $AB \parallel CD$.



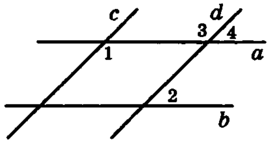


Однако, если точки A и D лежат по разные стороны от прямой, то данные углы накрест лежащие, а тогда прямые AB и CD не параллельны (т. е. пересекаются).

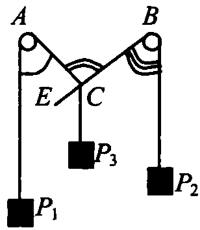
207. $\angle B$ и $\angle C$ – односторонние при прямых AB и CD и секущей BC и $\angle B + \angle C = 65° + 105° = 170° \neq 180°$, следовательно AB и CD не могут быть параллельны. Значит они пересекаются.



208. Т.к. $a \parallel b$, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.
Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = x - 50$ и
$x + x - x - 50 = 180$; $2x = 230$, $x = 115$,
т.е. $\angle 1 = 115°$, $\angle 2 = 55°$.



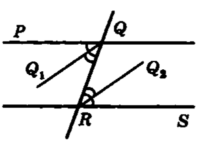
209. $\angle 2 = \angle 4 = 45°$, так как они соответственные при $a \parallel b$ и секущей d. $\angle 3 = \angle 1 = 180° - \angle 4 = 135°$ (так как $\angle 3$ и $\angle 4$ – смежные).



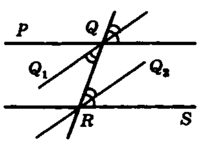
210. $AP_1 \parallel CP_3$, значит $\angle P_1AC + \angle ACP_3 =$
$= 180°$;
$CP_3 \parallel BP_2$, значит $\angle P_2BC = \angle P_3CE$ и
$\angle P_1AC + + \angle P_3CE + \angle ACE = 180°$;
$(\angle P_1AC + \angle P_2BC) + \angle ACE = 180°$ (1)
$\angle ACE$ и $\angle ACB$ – смежные, значит
$\angle ACE + \angle ACB = 180°$ (2).
Сравнивая (1) и (2), получим
$(P_1AC + \angle P_2BC) + \angle ACE = 180°$,
$\angle ACE + \angle ACB = 180°$, $\angle ACB = \angle P_1AC + \angle P_2BC$, ч.т.д.

211. **а)** Пусть $\angle PQR = \angle QRS$ как накрест лежащие при $PQ \parallel RC$ и секущей QR. Так как $\angle PQR = \angle QRS$, то $\frac{1}{2}\angle PQR = \frac{1}{2}\angle QRS$.

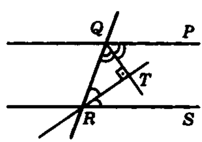
Пусть QQ_1 и RQ_2 – биссектрисы углов PQR и QRS. Тогда накрест лежащие углы Q_1QR и QRQ_2 равны и $QQ_1 \parallel RQ_2$.



а)



б)



в)

б) Аналогично с пунктом а).

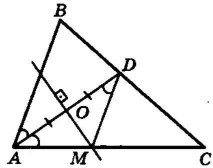
в) Если $\angle QRS + \angle RQP = 180°$, то $(\angle QRS + \angle RQP) = 90°$, т. е. $\angle QRT + \angle RQT = 90°$. Тогда $\angle RTQ = 90°$, т. е. $RT \perp QT$.

212. Решение приведено в учебнике.

213. $\Delta FDE = \Delta BCE$ по первому признаку ($BE = EF$, $EC = ED$, $\angle CFB = \angle DEF$ – вертикальные). Тогда $\angle CBE = \angle DFE$; $\angle CBE$ и $\angle DFE$ – накрест лежащие при прямых BC и AD и секущей BF и $\angle CBE = \angle DFE$, значит $BC \parallel AD$ по признаку параллельности прямых.

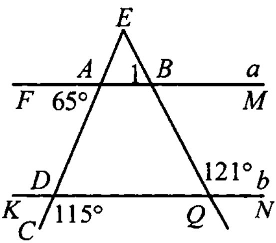
$KE \parallel AD$, $BC \parallel AD$, значит $KE \parallel BC$ по свойству параллельных прямых, ч.т.д.

214. ΔAMD – равнобедренный, так как его высота MO также и медиана. Следовательно, $\angle DAM = \angle ADM$, как углы при основании равнобедренного треугольника. Так как AD – биссектриса, то



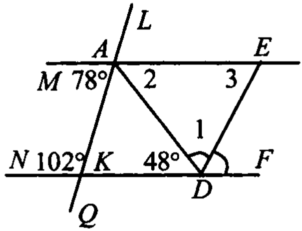
$\angle BAD = \angle DAM = \angle ADM$. Углы BAD и ADM – накрест лежащие при пересечении прямых AB и MD секущей AD, т. е. $AB \parallel MD$.

215. $\angle KDA = \angle CDQ = 115°$, т.к. они вертикальные. $\angle FAD$ и $\angle KDA$ – односторонние при прямых a и b и секущей c; $\angle FAD + \angle KDA = 65° + 115° = 180°$, значит $a \parallel b$;



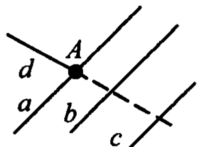
$\angle DAB$ и $\angle BQN$ – смежные, тогда $\angle DQB = 180° - 121° = 59°$. Т.к. $a \parallel b$, $\angle 1 = \angle DQB = 59°$ (как соответственные при параллельных прямых).

216. $\angle MAK$ и $\angle NKA$ – односторонние при прямых ME и NF и секущей AK и $\angle MAK + \angle NKA =$ $= 78° + 102° = 180°$, следовательно $ME \parallel NF$ (по признаку параллельности прямых).

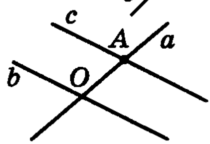


$\angle KDA$ и $\angle ADF$ – смежные, тогда $\angle KDA + \angle ADF = 180°$;
$48° + \angle ADF = 180°$, т.е $\angle ADF = 132°$.
Т.к. DE – биссектриса $\cdot ADF$, $\angle 1 = \angle EDF = 132° : 2 = 66°$; т.к. $ME \parallel NF$, $\angle 3 = \angle EDF = 66°$ (накрест лежащие).
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ (сумма углов треугольника) или
$66° + \angle 2 + 66° = 180°$, значит $\angle 2 = 48°$.

217. $a \parallel c$, $b \parallel$ с, значит $a \parallel c$ (по свойству параллельных прямых).
Так как $a \parallel b$ и $a \cap d = A$, то $d \cap b$ (свойство параллельных прямых).

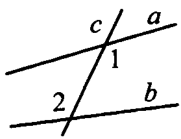


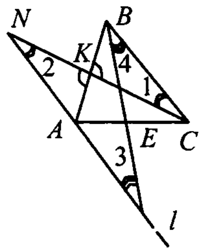
218. Проведем через любую точку A прямой a, кроме точки пересечения O прямых a и b, прямую C, параллельную прямой b. Полученная прямая C не совпадает с прямой a (так как a пересекает b) и удовлетворяет условию.



219. Если прямые a и b не параллельны, то согласно задаче 218 можно провести прямую, параллельную или a или b. Но по условию этого сделать нельзя. Значит, $a \parallel b$.

220. Если $\angle 1$ и $\angle 2$ – накрест лежащие углы при прямых a и b и секущей c и $\angle 1 \neq \angle 2$, то a и b не параллельны. Но если прямые на плоскости не параллельны, значит они пересекаются.





221. $\Delta BCK = \Delta ANK$ по первому признаку ($AK = KN$, $NK = CK$, $\angle AKN = \angle CKB$ – вертикальные). Значит $\angle 1 = \angle 2$.

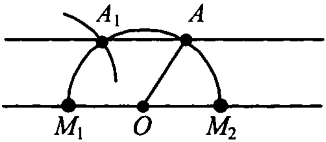
$\Delta BEC = \Delta MEA$ по первому признаку ($AE = EC$, $BE = EM$, $\angle BEC = \angle MEA$ – вертикальные). Значит $\angle 3 = \angle 4$.

$\angle 1$ и $\angle 2$ – накрест лежащие углы при прямых AN и BC и секущей NC. Следовательно $AN \parallel BC$ (1).

$\angle 3$ и $\angle 4$ – накрест лежащие углы при прямых AM и BC и секущей BM. Следовательно $AM \parallel BC$ (2).

Сравнивая (1) и (2), получим $AM \parallel BC$ и $AN \parallel BC$, значит $AM \parallel AN$. Но прямые AM и AN проходят через одну точку A и параллельны одной и той же прямой BC, то, по аксиоме параллельных прямых, можно утверждать, что AM и AN совпадают, т.е. $A, N, M \in l$, ч.т.д.

222.



1. Построим окружность с центром в $O \in a$ и радиусом OA. Окружность пересечет прямую a в точках M_1 и M_2.
2. Построим окружность с центром в точке M_1 и радиусом OA. Она пересечет первую окружность в точке A_1.
3. Проведем через точки A и A_1 прямую. $AA_1 \parallel a$.

Глава IV.
Соотношения между сторонами и углами треугольника

§ 1 Сумма углов треугольника

223. По теореме о сумме углов в треугольнике:
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.
а) $\angle C = 180° - 65° - 57° = 58°$;
б) $\angle C = 180° - 24° - 130° = 26°$;
в) $\angle C = 180° - \alpha - 2\alpha = 180° - 3\alpha$;
г) $\angle C = 180° - 60° - \alpha - 60° + \alpha = 60°$.

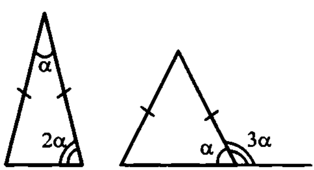
Ответ: а) 58°, б) 26°, в) $180° - 3\alpha$, г) 60°.

224. Пусть одно часть $x°$, тогда $\angle A = 2x°$, $\angle B = 3x°$, $\angle C = 4x°$.
По теореме о сумме углов треугольника $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, поэтому $2x + 3x + 4x = 180$, $9x = 180$, $x = 20$.
Итак, одна часть – 20°, значит $\angle A = 2 \cdot 20° = 40°$;
$\angle B = 3 \cdot 20° = 60°$; $\angle C = 4 \cdot 20° = 80°$.

225. $AB = BC = AC$, значит по свойству углов при основании равнобедренного треугольника $\angle A = \angle B = \angle C$. Но по теореме о сумме углов треугольника $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Значит $3 \cdot \angle A = 180°$ или $\angle A = 60°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 60°$.

226. Пусть $AB = BC$; докажем, что $\angle A$ и $\angle C$ – острые.
Допустим, что $\angle A$ и $\angle C$ – не острые, т.е. $\angle A = \angle C = 90°$ или $\angle A = \angle C > 90°$. Значит $\angle A + \angle B + \angle C > 180°$, а это противоречит теореме о сумме углов треугольника, следовательно наше предположение неверно. Тогда $\angle A = \angle C < 90°$, ч.т.д.

227. а) Пусть угол при вершине равен α, тогда углы при основании равны по 2α. По теореме о сумме углов в треугольнике $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$ или $5\alpha = 180°$ и $\alpha = 36°$, $2\alpha = 72°$.



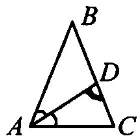
б) Пусть угол при основании данного треугольника равен α, тогда смежный внешний угол равен 3α. Тогда $3\alpha + \alpha = 180°$ и $\alpha = 45°$. Угол при вершине равен: $180° - 45° - 45° = 90°$.

228. а) Возможны два случая. I – данный угол – один из углов при основании, тогда $\angle 1 = \angle 2 = 40°$ и $\angle 3 = 180° - 40° - 40° = 100°$.
II – данный угол – противолежащий основанию; тогда $\angle 1 = 40°$ и $\angle 2 = \angle 3 = (180° - 40°) : 2 = 70°$.

б) Если $\angle 1$ – угол при основании и $\angle 1 = \angle 2 = 60°$, $\angle 3 = 180° - 60° - 60° = 60°$, т.е. треугольник равносторонний, и если $\angle 1$ – угол, противолежащий основанию, остальные углы также равны $60°$.

в) Так как углы при основании равнобедренного треугольника не могут быть не острыми, то возможен только один случай: $\angle 1 = 100°$ – угол, противолежащий основанию.
Тогда $\angle 2 = \angle 3 = (180° - 100°) : 2 = 40°$.

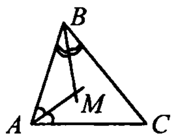
229. Т.к. ΔABC – равнобедренный, $\angle A = \angle C = 50°$.



$\angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle A = 25°$.

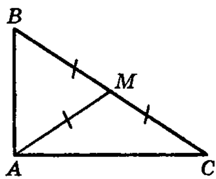
$\angle DAC + \angle ADC + \angle C = 180°$ (сумма углов треугольника), значит $25° + \angle ADC + 50° = 180°$ или $\angle ADC = 180° - 75°$, т.е. $\angle ADC = 105°$.

230. $\angle BAM + \angle MBA + \angle AMB = 180°$ (сумма углов треугольника). $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B +$
$+ \angle AMB = 180°$ (т.к. AM и BM – биссектрисы).

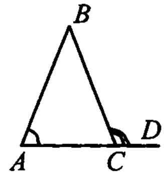


Значит $\frac{1}{2} \cdot 58° + \frac{1}{2} \cdot 96° + \angle AMB = 180°$,
$\angle AMB = 180° - (29° + 48°)$, $\angle AMB = 103°$.

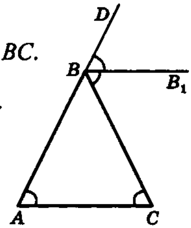
231. ΔBAM, ΔCAM – равнобедренные, тогда



$\angle B = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle C = \frac{1}{2}\angle A$,
$\angle B + \angle C = \angle A$. Получаем:
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, откуда
$\angle A = 180° - \angle B + \angle B - \angle A$ и $\angle A = 90°$.



232. Пусть дано, что $\angle BCD = 2\angle A$.
Докажем, что ΔABC – равнобедренный.
Пусть $\angle A = x$, значит $\angle BCD = 2x$. Из свойств внешнего угла имеем: $\angle BCD = \angle A + \angle B$, т.е. $2x = x + \angle B$. Т.е. $\angle B = x$, т.е. $\angle A = \angle B$, значит $AC = BC$, следовательно ΔABC – равнобедренный и обратное утверждение верно.

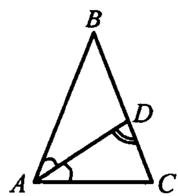


233. BB_1 – биссектриса внешнего угла DBC при вершине B равнобедренного треугольника ABC.

$\angle DBC = 2\angle BCA$. $\angle B_1BC = \frac{1}{2}\angle DBC = \angle BCA$.

$\angle B_1BC$ и $\angle BCA$ – накрест лежащие при пересечении прямых BD и AC секущей BC.
Значит, $BD \parallel AC$.

234. Рассмотрим два случая:
I. Дано: $AB = BC$, $\angle BCD = 115°$. $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – ?
$\angle C$, $\angle BCD$ – смежные, следовательно, $\angle C = 180° - 115° = 65°$, $\angle A = \angle C = 65°$ (как углы при основании равнобедренного треугольника). По теореме о сумме углов треугольника $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$, значит $\angle B = 180° - 130° = 50°$.
II. Дано: $AB = BC$, $\angle CBD = 115°$, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – ?
$\angle B$, $\angle CBD$ – смежные, тогда $\angle B = 180° - 115° = 65°$.
Т.к. $\angle A = \angle C$ (как углы при основании равнобедренного треугольника), $\angle A = \angle C = (180° - 65°) \cdot 2 = 57{,}5°$.



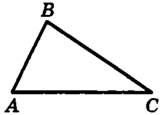
235. Пусть $\angle A = x°$, тогда $\angle C = 2x°$.
$\angle ADC = 180° - 110° = 70°$, т.к. $\angle AOB$ и $\angle AOC$ – смежные. $\angle A + \angle D + \angle C = 180°$ (сумма углов треугольника), значит $x + 70 +$

$+ 2x = 180°$, $3x = 110°$. $x = 35\frac{2}{3} = 36°40'$,

значит $\angle DAC = 36°40'$;
$\angle C = 2 \cdot 36°40' = 72°80' = 73°20'$ (т.к. $1° = 60'$).
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ (сумма углов треугольника), т.е. $73°20' + \angle B + 73°20' = 180°$ или
$\angle B = 180° - 146°40' = 179°60' - 146°40' = 33°20'$.

§ 2 Соотношения между сторонами и углами треугольника

236. Чтобы $\angle A$ был наибольшим, сторона BC должна быть самой большой стороной.



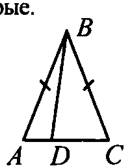
а) Сторона BC не самая большая, т. е. $\angle A$ не наибольший, а значит, и не тупой.

б) Сторона BC наибольшая, $\angle A$ может быть тупым.

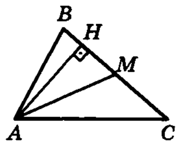
237. **а)** $\angle A > \angle B > \angle C$, тогда $BC > AC > BA$;

б) $\angle A = \angle B = \angle C$, тогда $BC > AC = BA$.

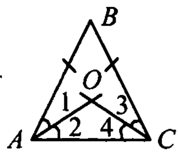
238. Т.к. ΔABC – равнобедренный, значит $\angle A = \angle C$ – острые.
$\angle ADB$ и $\angle CDB$ – смежные и один из них тупой, другой острый или оба по 90°.
Если $\angle ADB$ – тупой, то он наибольший в ΔADB, тогда $AB > BD$, если $\angle CDB$ – тупой в ΔCDB, то $BC > BD$ и $AB = BC > BD$, ч.т.д.



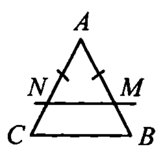
239. В треугольнике ABC: AH – высота, AM – медиана. Если ΔABC равнобедренный ($AB = AC$), то $AH = AM$. Если $AB \neq AC$, то из прямоугольного треугольника AHM (где AM – гипотенуза, а AH – катет) $AM > AH$. Таким образом, $AM \geq AH$.



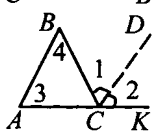
240. ΔABC – равнобедренный, значит $\angle A = \angle C$;
AO, CO – биссектрисы равных углов, значит $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$. Т.к. $\angle 2 = \angle 4$, то ΔAOC – равнобедренный, ч.т.д.



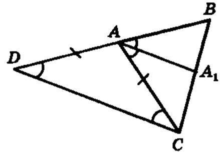
241. $NM \parallel BC$, значит $\angle C = \angle N$ как соответственные углы при параллельных прямых.
Т.к. ΔABC – равнобедренный, то $\angle B = \angle C$.
Значит $\angle N = \angle C = \angle B = \angle M$.
Следовательно ΔAMN – равнобедренный.



242. $CD \parallel AB$, значит $\angle 2 = \angle 3$ (соответственные при параллельных), $\angle 1 = \angle 4$ (накрест лежащие при параллельных).
$\angle 2 = \angle 3$, $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 1 = \angle 2$, тогда $\angle 3 = \angle 4$, значит ΔABC – равнобедренный по признаку, ч.т.д.

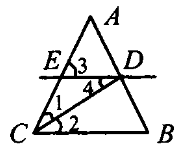


243. $\angle ACD = \angle CAA_1$, так как они накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AA_1 и DC секущей AC.

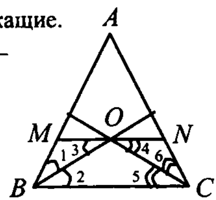


$\angle BAC$ – внешний угол ΔADC и он равен двум углам C. Значит, DC – основание равнобедренного ΔADC, отсюда $AD = AC$.

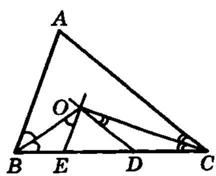
244. $AC \parallel ED$, значит $\angle 1 = \angle 3$ (как соответственные углы). $\angle 2 = \angle 4$ (накрест лежащие углы). $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$, тогда $\angle 1 = \angle 4$, т.е. ΔADE – равнобедренный по признаку и $AE = ED$.



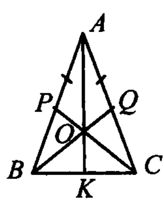
245. $MN \parallel BC$, значит $\angle 1 = \angle 3$ как накрест лежащие. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 2$, т.е. $\angle 2 = \angle 3$, тогда ΔCNO – равнобедренный и $CN = NO$.
$MN \parallel BC$, значит $\angle 4 = \angle 5$ как накрест лежащие; $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$, т.е. $\angle 4 = \angle 6$, тогда $OM = MB$. Следовательно $MN = NO + OM = CN + BM$, ч.т.д.



246. $\angle ABO = \angle BOE$, $\angle ACO = \angle DOC$, как накрест лежащие при пересечении прямых AB и EO секущей BO, и при пересечении прямых AC и OD секущей OC соответственно. Так как BO и CO – биссектрисы, то $\angle OBE = \angle BOE$, $\angle DOC = \angle OCD$. Следовательно, треугольники BOE и COD – равнобедренные. $BE = EO$, $OD = DC$ и $P_{\Delta EOD} = EO + OD + DE = BE + ED + DC = BC$.



247. Рассмотрим ΔCQB и ΔBPC; $BP = AB - PA = AC - AQ = CQ$; $\angle B = \angle C$ (углы при основании равнобедренного треугольника); BC – общая, значит $\Delta CQB = \Delta BPC$ по первому признаку.



Следовательно $\angle PCB = \angle QBC$. Значит ΔBOC – равнобедренный по признаку.

$\Delta AOB = \Delta AOC$ по третьему признаку (сторона AO – общая, $BO = OC$, $AB = AC$). Следовательно $\angle BAO = \angle CAO$. Значит AO – биссектриса равнобедренного ΔABC и по свойству биссектрисы, опущенной на основание, AK – медиана и высота, ч.т.д.

248. **а)** Не существует, т.к. $1 + 2 = 3$ – противоречие с неравенством треугольника.

б) Треугольник не существует, т.к. $1{,}2 + 1 < 2{,}4$.

249. В треугольнике каждая сторона должна быть больше суммы двух других. Тогда, если основание равно 10 см, то каждая сторона удовлетворяет такому условию. Но если основание равно 25 см, то 25 см $<$ 10 см + 10 см – это не верно. Значит, есть только одно правильное решение.

Ответ: основание равно 10 см.

250. **а)** $a = 5$ см; $b = 3$ см; $c = ?$

ΔABC – равнобедренный, значит $c = 5$ см или $c = 3$ см.

$\left[\begin{array}{l} 5+5>3 \\ 3+3>5 \end{array}\right.$ – верно.

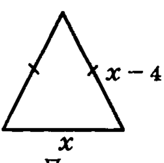
б) $a = 8$ см; $b = 2$ см; $c = ?$

ΔABC – равнобедренный, значит $c = 8$ см. $8 + 8 > 2$ – верно.

в) $a = 10$ см; $b = 5$ см; $c = ?$

ΔABC – равнобедренный, значит $c = 10$ см. $10 + 10 > 5$ – верно.

251. Решение приведено в учебнике.



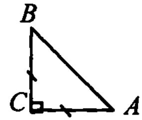
253. Угол треугольника, смежным с которым является острый угол, тупой. Тупым углом в равнобедренном треугольнике может быть лишь угол против основания. Значит, основание – самая большая сторона треугольника. Приняв за x основание данного треугольника, имеем: $(x - 4) + (x - 4) + x = 25$ см и $x = 11$ см, $(x - 4) = 7$ см.

Ответ: 11 см, 7 см, 7 см.

§ 3 Прямоугольные треугольники

254. $\angle A + \angle B = 90°$ (по свойству прямоугольного треугольника).

$\angle A = \angle B$, значит $\angle A = \angle B = 90° : 2 = 45°$.

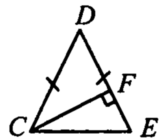


255. $\angle C = \angle E = (180° - 54°) : 2 = 126° : 2 = 63°$.

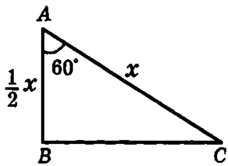
$\angle FCD = 90° - \angle D$ (по свойству прямоугольного треугольника).

$\angle FCD = 90° - 54° = 26°$,

$\angle ECF = \angle C - \angle FCD = 63° - 26° = 37°$.

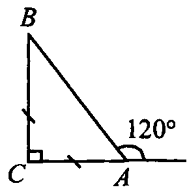


256. Один из углов $\angle ACB$ данного треугольника равен $90° - 60° = 30°$. Меньший катет AB лежит против угла в $30°$ $(30° < 60°)$ и равен половине гипотенузы. Длина гипотенузы – x, тогда: $x + \frac{1}{2}x = 26{,}4$ см и $x = 17{,}6$ см.



257. $\angle BAC = 180° - 120° = 60°$ – по свойству смежных углов; $\angle B = 90° - \angle A$ (по свойству угла прямоугольного треугольника), значит $\angle B = 90° - \angle 60° = 30°$, тогда по свойству прямоугольного треугольника

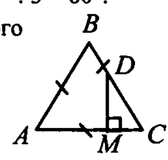
$AC = \frac{1}{2}AB$, $AB = 2AC$. $AC + AB = 18$, значит $AC + 2AC = 18$, т.е. $AC = 6$ см.



258. ΔABC – равносторонний; $\angle A = \angle B = \angle C = 180° : 3 = 60°$.

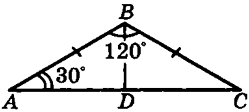
$\angle MDC = 90° - \angle C$ (по свойству прямоугольного треугольника); $\angle MDC = 90° - 60° = 30°$, и по свойству прямоугольного треугольника

$MC = \frac{1}{2}DC$; $BD = DC$, значит $DC = \frac{1}{2}BC$,

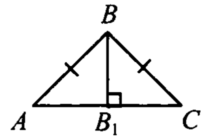


т.е. $MC = \frac{1}{4} BC = 3$ см. $AM = AC - MC = 12 - 3 = 9$ см.

259. Углы при основании $\angle A$ и $\angle C$ равны по 30°. В прямоугольном треугольнике ABD, образованном высотой BD, боковой стороной AB и основанием AD, высота – катет, лежащий против угла в 30°, боковая сторона – гипотенуза. Гипотенуза равна: $2 \cdot 9$ см $= 18$ см.

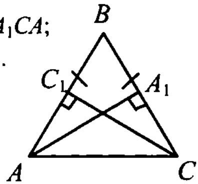


260. Из условия видно, что $BB_1 = \frac{1}{2} BC$, тогда по свойству прямоугольного треугольника $\angle BCB_1 = 30°$, значит $\angle BAC = \angle BCA = 30°$. ΔABC – равнобедренный; $\angle ABC = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 30° - 30° = 120°$ (сумма углов треугольника).

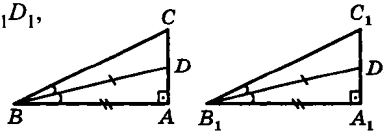


Ответ: 30°, 30°, 120°.

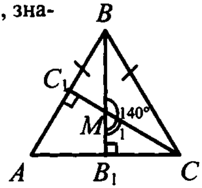
261. ΔABC – равнобедренный, значит $\angle C_1AC = \angle A_1CA$; $\angle A_1AC = 90° - \angle A_1CA = 90° - \angle C_1AC = \angle ACA_1$. Рассмотрим ΔA_1AC и ΔC_1CA: сторона AC – общая, $\angle A_1AC = \angle C_1CA$, $\angle C_1AC = \angle A_1CA$. Значит $\Delta A_1AC = \Delta C_1CA$ по второму признаку. Следовательно $AA_1 = CC_1$, ч.т.д.



262. $\Delta BDA = \Delta B_1D_1A_1$ ($BD = B_1D_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle DBA = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}\angle B_1 = \angle D_1B_1A_1$), тогда $AB = A_1B_1$, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по катету и острому углу.



263. $180° - 140° = \angle 1$ (смежные углы); $\angle 1 = 40°$, значит $\angle B_1CC_1 = 90° - 40° = 50°$ (по свойству углов прямоугольного треугольника).

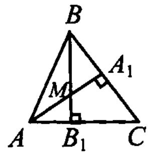


$\angle A = 90° - \angle B_1CC_1 = 90° - 50° = 40°$,

$\angle B + \angle C = 180° - \angle A$ (сумма углов треугольника).

Тогда $\angle B + \angle C = 180° - 40° = 140°$; т.к. $AB = AC$, то $\angle B = \angle C = 70°$.

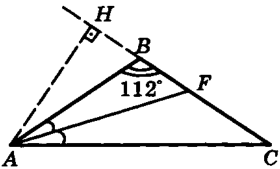
264. $\angle ABB_1 = 90° - \angle BAB_1 = 90° - 55° = 35°$ (свойство углов прямоугольного треугольника).



Тогда $\angle AMB = 180° - \angle BAM - \angle ABM =$

$= 180° - 23° - 35° = 122°$.

265. $\angle A = \angle C = \dfrac{180° - 112°}{2} = 34°$,



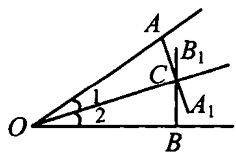
$\angle BAF = \dfrac{1}{2}\angle A = 17°$. Из ΔABF:

$\angle F = 180° - 112° - 17° = 51°$,

$\angle A = 90° - 51° = 39°$.

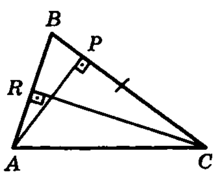
<u>**Ответ**</u>: $\angle A = 39°$, $\angle F = 51°$, $\angle H = 90°$.

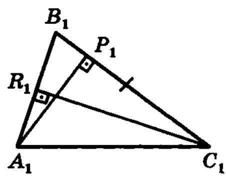
266. Рассмотрим ΔOBC и ΔOAC.



Сторона OC – общая, $OA = OB$. Значит $\Delta OBC = \Delta OAC$ (по катету и гипотенузе), следовательно $\angle 1 = \angle 2$ и OC – биссектриса, ч.т.д.

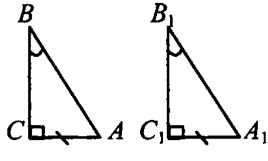
267. Возьмем два остроугольных треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. Пусть AP, CR, C_1R_1, A_1P_1 – вы-



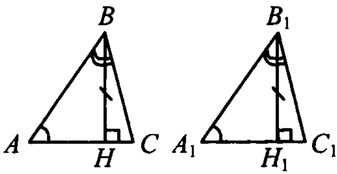


соты, причем $AP = A_1P_1$, $CR = C_1R_1$. $\Delta APC = \Delta A_1P_1C_1$ по гипотенузе и катету, $\angle C = \angle C_1$. $\Delta ARC = \Delta A_1R_1C_1$ по гипотенузе и катету, отсюда $\angle A = \angle A_1$. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по второму признаку.

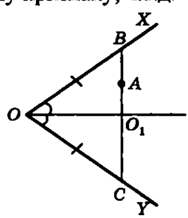
268. $\angle A = 90° - \angle B = 90° - \angle B_1 = \angle A_1$. Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$. $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (по второму признаку). Значит $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, ч.т.д.



269. $\Delta ABH = \Delta A_1B_1H_1$ по катету и острому углу ($BH = B_1H_1$, $\angle A = \angle A_1$). Следовательно $AB = A_1B_1$. Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$. $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Значит $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по второму признаку, ч.т.д.



270. Построим биссектрису данного угла, затем построим перпендикуляр к биссектрисе так, чтобы он проходил через точку A. Построение выполнено. Доказательство: OO_1 (см. рис.) – биссектриса и высота, значит, ΔBOC – равнобедренный, тогда $BO = OC$.

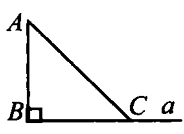


§ 4 Построение треугольника по трем элементам

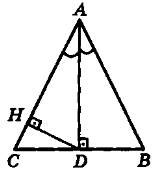
271. $\angle ABC = 90°$, $AB + AC = 17$ см, $AC - AB = 1$ см, $AB = ?$

Пусть $AB = x$, $AC = y$, тогда

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ y - x \end{cases} \begin{cases} 2y = 18 \\ 2x = 16 \end{cases} \begin{cases} y = 9 \\ x = 8 \end{cases}.$$ Значит $AB = 8$ см.

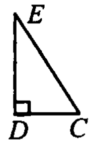


272. В равностороннем ΔABC все углы по 60°. Тогда $\angle DAH = 30°$ ($H \in AC$, $DH \perp AC$). По условию $DH = 6$ см. В прямоугольном ΔADH HD – катет, лежащий против угла в 30°. Тогда гипотенуза $AD = 2HD = 12$ см.

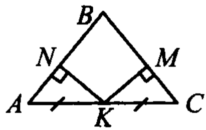


273. $\angle D = 90°$, $CE + CD = 31$ см, $CE - CD = 31$ см, $CB = ?$
Пусть $CE = x$ см, $CD = y$ см, тогда

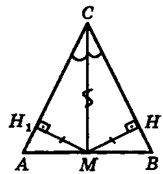
$$\begin{cases} x + y = 31 \\ x - y = 3 \end{cases} \begin{cases} 2x = 34 \\ 2y = 28 \end{cases} \begin{cases} x = 17 \\ y = 14 \end{cases}$$ Значит $CD = 14$ см.



274. Рассмотрим ΔCKM и ΔAKN. $AK = KC$, $\angle A = \angle C$ (т.к. ΔABC – равнобедренный). Значит $\Delta AKN = \Delta CKM$ по гипотенузе и острому углу. Следовательно $KN = KM$, ч.т.д.



275. Пусть H лежит на CB, H_1 – на AC. MH, MH_1 перпендикулярны CB и AC соответственно. По условию $MH_1 = MH$, $\Delta MH_1C = \Delta MHC$ (CM – общая, $MH_1 = MH$), тогда CM – биссектриса. Но так как ΔABC – равнобедренный, то CM – высота.

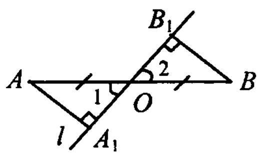


276. $AO = OB$, $AA_1 \perp BB_1 \perp l$. Докажем, что $AA_1 = BB_1$.

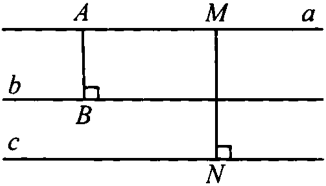
Рассмотрим ΔAA_1O и ΔBB_1O.

$AO = BO$, $\angle 1 = \angle 2$ (вертикальные).

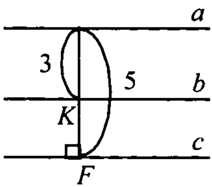
Значит $\Delta AA_1O = \Delta BB_1O$ по гипотенузе и острому углу. Следовательно $AA_1 = BB_1$, ч.т.д.



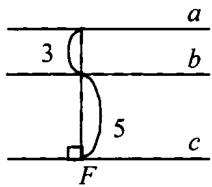
277. $a \parallel b$, $a \parallel c$, значит по свойству параллельных прямых $b \parallel c$.



Возможны два случая:



$KF = 5 - 3 = 2$ см.

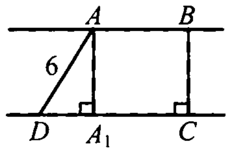


$KF = 3 + 5 = 8$ см.

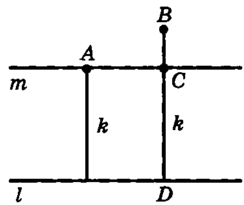
278. $\angle A_1 = 90°$, $\angle D = 30°$, AA_1 лежит против угла 30°, значит $AA_1 = \frac{1}{2}AD$,

$AA_1 = \frac{1}{2}AD$, $AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$см.

$AA_1 = BC$, $BC = 3$ см.

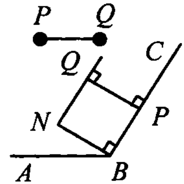


279. Разъясним условие. Нам дана прямая l, некоторое расстояние k. Если взять точку A так, чтобы расстояние между взятой точкой a прямой l было равно k, то прямая, проходящая через точку A и параллельная прямой l является геометрическим местом всех точек, удовлетворяющих условию. (Обозначим эту прямую буквой m).

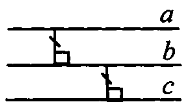


Возьмем точку B, не лежащую на прямой m. Пусть перпендикуляр к прямой l пересекает прямую m в точке C, а прямую l в точке D. $CD = k$, т. е. чтобы точка B удовлетворяла условию, она должна лежать на прямой m.

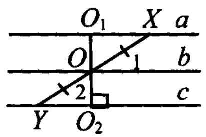
280. Найти множество всех точек, внутри $\angle ABC$, удаленных от BC на расстояние PQ. $NQ \parallel BC$, $BN \perp BC$. Значит луч NQ и есть искомое множество точек.



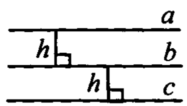
281. <u>**Ответ:**</u> прямая c, параллельная данным и находящаяся на равных расстояниях от них.



282. Рассмотрим ΔOO_1Y и ΔOO_2Y. $OX = OY$, $\angle 1 = \angle 2$ (вертикальные). Значит ΔOO_1Y и ΔOO_2Y по гипотенузе и острому углу. Следовательно $OO_1 = OO_2$, O – равноудалена от a и b, значит она лежит на прямой $c \parallel a \parallel b$ (см. предыдущую задачу).



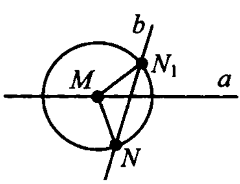
283. <u>**Ответ:**</u> две прямые, параллельные данной и расположенные на одном расстоянии h по разные стороны от c.



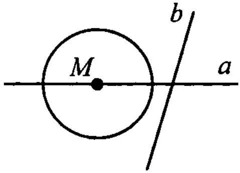
284. Решение приведено в учебнике.

285. Построить $M \in a$, $MN = PQ$ и $N \in b$. Задача может и не иметь решения (см. II случай).

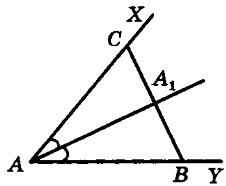
I случай. На прямой b существуют две точки N и N_1 такие, что $MN = MN_1 = PQ$.



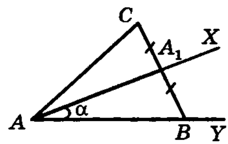
II случай. Нет решения, когда на прямой b нет точек, удаленных от M на PQ.



286. Возьмем произвольную точку A, отложим от нее угол XAY, равный данному. Отложим на стороне XA отрезок AC, равный данной стороне треугольника. Построим биссектрису $\angle XAY$ и, отложив на ней отрезок AA_1, равный данной биссектрисе треугольника, соединим C и A_1. Продлим CA_1 до пересечения с YA. Обозначим точку пересечения буквой B. ΔABC – искомый.



287. Возьмем произвольную точку A и отложим от нее угол XAY, равный данному. На AX отложим отрезок AA_1, равный медиане, на луче AY – отрезок AB, равный данной стороне. Продлим BA_1 за AX на длину BA_1. Обозначим другой конец полученного отрезка буквой C. ΔABC – искомый.



288. а) 1) $AB = PQ$; 2) $\angle B = \angle hk$;

3) $\angle A = \dfrac{1}{2}\angle hk$ – строим биссектрису;

4) стороны углов A и B пересекаются в точке C.

б) 1) $AB = PQ$; 2) $\angle B = \angle hk$; 3) $\angle A = \dfrac{1}{4}\angle hk$;

4) стороны углов A и B пересекаются в точке C.

Для построения $\frac{1}{4}\angle hk$ надо построить биссектрису угла, а затем – биссектрису его половины.

289. 1) $AB = PQ$; 2) $\angle B = \angle hk$; 3) $\angle A = \frac{1}{2}\angle h_1k_1$;

4) стороны углов A и B пересекаются в точке C. ΔABC – искомый.

290. а) 1) Построить $\angle C$ – прямой;

2) на одной стороне отложить $AC = a$, на другой $BC = b$;

3) соединить A и B; 4) ΔABC – искомый.

б) 1) Построить $\angle C$ – прямой;

2) отложить на стороне $AC = a$; 3) простроить $\angle A = \alpha$;

4) стороны углов A и C пересекаются в точке B;

5) ΔABC – искомый.

291. а) 1) Построим $\angle B = \alpha$;

2) на стороне угла отложим отрезки $BC = b = AB$;

3) соединим точки A и C; 4) ΔABC – построен.

б) 1) Построим $AC = b$; 2) построим $\angle A = \angle C = \alpha$;

3) стороны пересекаются в B; 4) ΔABC построен.

в) 1) Построим $AB = c$; 2) построим $\angle A = \beta$;

3) $\angle B = 180° - 2\beta$; 4) на стороне угла B отложим $BC = c$;

5) соединим A и C; 6) ΔABC построен.

г) 1) Построим $AC = a$;

2) построим две окружности с центрами в A и C радиусом b;

3) окружности пересекутся в B; 4) соединим A и B, B и C;

5) ΔABC построен.

д) 1) Построим $AC = a$; 2) отметим D – середину AC;

3) так как медиана равнобедренного треугольника является высотой, построим $\angle D = 90°$;

4) на стороне угла D отложим $DB = m$;

5) соединим A и B, B и C; 6) ΔABC построен.

292. а) 1) Построить $AB = P_1Q_1$;

2) построим окружность с центром в точке A и радиусом P_2Q_2;

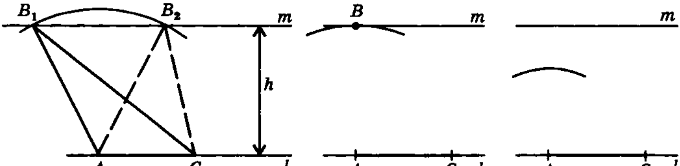
3) построим окружность с центром в точке B и радиусом $2P_3Q_3$;

4) окружности пересекутся в точке C; 5) ΔABC построен.

б) Построение аналогично п. а). Задача имеет решение, когда выполняется неравенство треугольника.

293. Решение приведено в учебнике.

294. На произвольной прямой l выберем две точки A и C так, чтобы отрезок AC был равен одной из данных сторон треугольника. Проведем прямую m ($m \parallel l$), на расстоянии высоты h от прямой l. Далее проведем окружность с центром в точке A и радиусом AB равным второй стороне. В зависимости от длины высоты и второй стороны окружность может иметь два, одно или ни одного пересечения с прямой m. Поэтому возможны или два решения (случай *а*, две точки пересечения B_1 и B_2, ΔAB_1C и ΔAB_2C – искомые), или одно решение (случай *б*, одна точка пересечения, ΔABC – искомый), или ни одного решения (случай *в*, нет точек пересечения).



а) *б)* *в)*

295. 1) Построить $AB = a$;

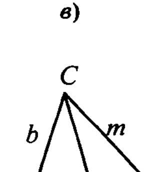
2) отметить точку D – середину AB;

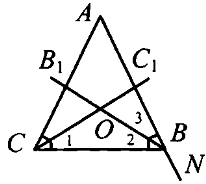
3) построить окружность с центром в D и радиусом m;

4) построить окружность с центром в A и радиусом b;

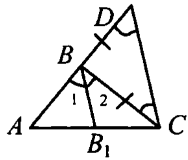
5) окружности пересекаются в точке C;

6) соединить точки B и C; 7) ΔABC построен.

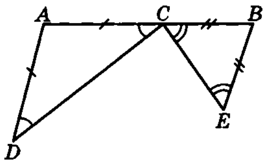




296. $\angle BOC = 180° - \angle 1 - \angle 2$ (сумма углов треугольника);
$\angle NBC = 180° - \angle 3 - \angle 2$ (как смежные);
$\angle B = \angle C$; CC_1 и BB_1 – биссектрисы, значит $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle BOC = \angle NBC$, ч.т.д.



297. $\angle D + \angle C = 180° - \angle DBC = \angle 1 + \angle 2$, т.е. $\angle D + \angle C = \angle 1 + \angle 2$, но $\angle D = \angle C$, значит $\angle D = \angle C = \angle 1 = \angle 2$; $\angle C$ и $\angle 2$ – накрест лежащие при BB_1 и DC и секущей BC, значит $BB_1 \parallel DC$ (по признаку параллельности), ч.т.д.



298. $\angle D = \angle ACD$, $\angle BCE = \angle E$, так как ΔADC и ΔCBE – равнобедренные. $\angle A + \angle B = 180°$, так как $\angle A$ и $\angle B$ – односторонние при пересечении параллельных прямых AD и BE секущей AB. Тогда: $\angle DCE = 180° - \frac{1}{2}(180° -$

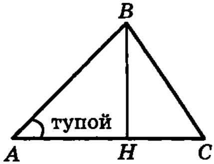
$-\angle A) - \frac{1}{2}(180° - \angle B) = (\angle A + \angle B) = \frac{180°}{2} = 90°$.

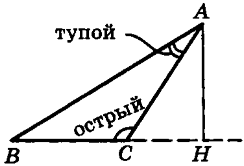
299. Пусть $\angle C = \angle B = x$, $\angle CBR = y$. Из ΔRQB: $\angle R + \angle Q + \angle B = 180°$, значит $180° - \frac{3}{2}x + x - y + x - y = 180°$; $\frac{1}{2}x = 2y$; $x = 4y$.

Из $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ (сумма углов треугольника).
Значит $4y + 4y + y = 180°$; $9y = 180°$; $y = 20°$.

<u>Ответ</u>: 20°.

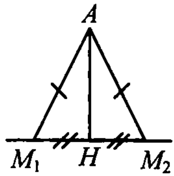
300. Используем доказательство от противного. Предположим, что в треугольнике ABC ($\angle A$ – тупой) основание высоты BH лежит на стороне AC. Тогда в прямоугольном ΔAHB есть тупой угол (а это невозможно). Значит, основание высоты BH лежит на продолжении стороны AC.





Теперь допустим, что в том же треугольнике основание высоты AH лежит на продолжении стороны BC, к примеру, за точкой C. $\angle C$ – острый, угол смежный с ним – тупой. Тогда в прямоугольном треугольнике CHA есть тупой угол. Это невозможно, поэтому точка H лежит на стороне BC.

301. **а)** Рассмотрим ΔAHM_2 и ΔAHM_1. Сторона AH – общая, $HM_1 = HM_2$.

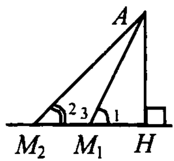


Значит $\Delta AHM_1 = \Delta AHM_2$ (по двум катетам).

Следовательно $AM_1 = AM_2$, ч.т.д.

б) $\angle H = 90°$, значит $\angle 1$ – острый (из ΔAHM_1);

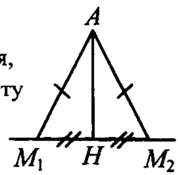
$\angle H = 90°$, значит $\angle 2$ – острый (из ΔAHM_2);



В ΔAM_1M_2 $\angle 2$ – острый, $\angle 3$ – тупой, т.к. он смежный с острым.

Следовательно $AM_2 > AM_1$, ч.т.д.

302. **а)** Рассмотрим ΔAHM_1 и ΔAHM_2. AH – общая, $AM_1 = AM_2$. Значит $\Delta AHM_1 = \Delta AHM_2$ по катету и гипотенузе. Значит $HM_1 = HM_2$.

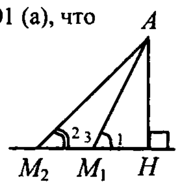


б) Пусть $HM_1 > HM_2$ или $HM_1 = HM_2$.

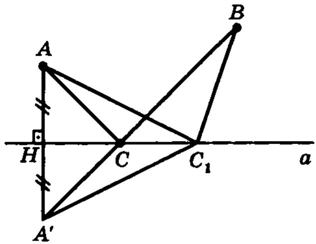
Если $HM_1 = HM_2$, то получим результат из 301 (а), что противоречит $AM_1 < AM_2$.

Значит $HM_1 = HM_2$ – неверно.

Если $HM_1 > HM_2$, то (по 301 (б)) получим $AM_1 > AM_2$. Следовательно $HM_1 > HM_2$ – неверно. Значит $HM_1 < HM_2$, ч.т.д.

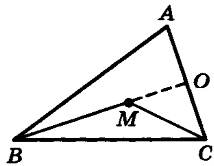


303. Построим перпендикуляр AH к прямой a (дороге). Продлим его за прямую a на длину AH. Назовем получившийся отрезок AA'. Соединим точки A' и B. $A'B$ пересекает прямую a в точке C. Точка C – искомая.

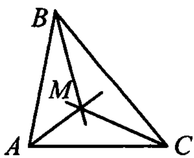


<u>**Доказательство**</u>:
Возьмем любую точку C_1, принадлежащую прямой a, но не совпадающую с точкой C.
$\Delta AHC_1 = \Delta A'HC_1$ (по двум катетам). Значит, $AC_1 = A'C_1$, но
$A'B < B_1C + A'C_1$ (первенство треугольника). Тогда
$A'B = A'C + CB < BC_1 + A'C_1$, $AC + BC < BC_1 + AC_1$.

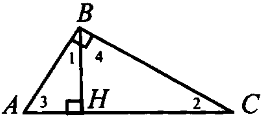
304. Продлим BM до пересечения с AC в точке O. Из ΔABO: $BO < AB + AO$. Учтем, что $BO = BM + MO$, тогда
$BM < AB + AO - MO$.
Аналогично из ΔMCO: $MC < MO + OC$.
Сложим оба эти неравенства:
$BM + MC < AB + AO - MO + MO + OC$, т. е.
$BM + MC < AB + AC$ (учтено, что $AO + OC = AC$).



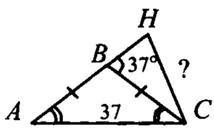
305. Докажем, что $AM + BM + CM < P_{ABC}$.
Точка M лежит внутри ΔABC, значит, учитывая №301, имеем
$MB + MC < AB + AC < MA + MC < AB + BC$,
тогда $MB + MB + MA + MA + MC + MC <$
$< AB + AB + BC + BC + AC + AC$, или
$MB + MA + MC < AB + BC + AC = P_{ABC}$, т.е. $P_{ABC} > MB + MA + MC$, ч.т.д.



306. Если A, B, C не лежат на одной прямой, то они являются вершинами ΔABC. Значит $AB < AC + CB$, что противоречит условию. Следовательно, точки A, B, C лежат на одной прямой, ч.т.д.

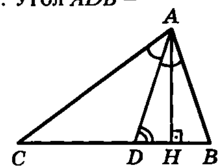


307. ΔABH – прямоугольный, значит
$\angle 1 + \angle 3 = 90°$ (1).
ΔCBH – прямоугольный, значит
$\angle 2 + \angle 4 = 90°$.
$\angle B = 90°$, следовательно $\angle 1 + \angle 4 = 90°$ (3).
Вычтем из равенства (3) равенство (2):
$\angle 1 - \angle 2 = 0$, т.е. $\angle 1 = \angle 2$.
Вычтем из равенства (3) из равенство (1):
$\angle 4 - \angle 2 = 0$, значит $\angle 3 = \angle 4$.
$\angle 1$ (в ΔABH) = $\angle 2$ (в ΔCHB) = $\angle 2$ (в ΔABC).
$\angle 3$ (в ΔABH) = $\angle 4$ (в ΔCHB) = $\angle 3$ (в ΔABC).
$\angle BHA$ (в ΔABH) = $\angle CHB$ (в ΔCHB) = $\angle ABC$ (в ΔABC).



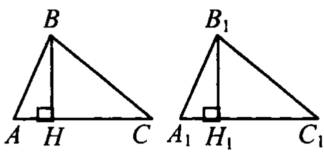
308. $\angle A + \angle C = 60°$ (свойство внешнего угла);
$\angle A = \angle C$ (ΔABC – равнобедренный);
тогда $2\angle A = 60°$, $\angle A = 30°$.
ΔCHA – прямоугольный и $\angle A = 30°$,
значит $CH = \dfrac{1}{2}AC$ (по свойству), $CH = 37 : 2 = 18{,}5$ см.

309. Предположим, что $AC > AB$, т. е. $\angle B > \angle C$. Угол ADB – внешний для треугольника ADC. Тогда



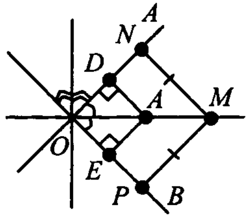
$$\angle ADB = \angle C + \frac{\angle A}{2} = \angle C +$$
$$+ \frac{180° - \angle B - \angle C}{2} = 90° + \frac{\angle C - \angle B}{2}.$$

Найдем $\angle HAD = 90° - \angle ADB = 90° - 90° + \dfrac{\angle C - \angle B}{2} = \dfrac{\angle C - \angle B}{2}$.



310. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C$, значит
$AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$. Значит
$\Delta BHA = \Delta B_1H_1A_1$ по
гипотенузе и острому углу.
Тогда $BH = B_1H_1$.

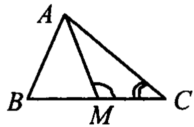
311. Построим биссектрисы углов, образованных при пересечении OA и OB. Возьмем любую точку C на биссектрисе. Тогда $\Delta ODC = \Delta OEC$ (OC – общая гипотенуза и $\angle 1 = \angle 2$). Значит $CD = CE$. Построим перпендикуляры MN и MP к OA и OB.



Тогда $\Delta ONM = \Delta OPM$, т.к. OM – общая гипотенуза, $MN = MP$ (по условию M равноудалена от OA и OB).

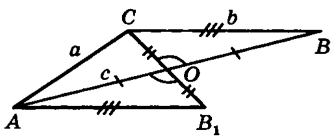
Значит $\angle NOM = \angle POM$, т.е. OM – биссектриса $\angle AOB$. Значит искомое множество – это две прямые, являющиеся биссектрисами углов, образованных при пересечении данных прямых.

312. $AC > AB$, значит по теореме о соотношении между сторонами и углами треугольника $\angle B > \angle C$.



$\angle AMC = \angle B + \angle BAM$ (т.к. $\angle AMC$ – внешний угол $\angle BAM$), $\angle B > \angle C$, значит $\angle AMC > \angle C$; в ΔACM $\angle C < \angle M$, значит по теореме $AM < AC$, ч.т.д.

313. __Анализ__. Нам даны: две стороны (длины a и b), медиана (длиной c).



__Построение__. Возьмем произвольную точку A и отложим от нее отрезок AB, равный $2c$ и поделим его пополам точкой O. Строим ΔABC по трем сторонам ($AB = 2c$, $AC = a$, $BC = b$). Продляем CO за сторону AB на длину CO, получаем отрезок CB_1. ΔB_1CA – искомый.

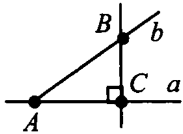
__Доказательство__. $\Delta COB = \Delta AOB_1$ по первому признаку, т. е.

$$CB = AB_1 = b.\ AC = a,\ AO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot 2c = c,\ AO \text{ – медиана}$$

по построению.

__Исследование__. Построение возможно, если можно построить ΔABC, т. е. должно выполняться неравенство треугольника со сторонами a, b и $2c$. В противном случае решений нет.

314. а) 1) Возьмем любую прямую a и произвольную точку A на прямой a;



2) строим $\angle ab = \angle hk$ (задача о построении угла, равного данному);

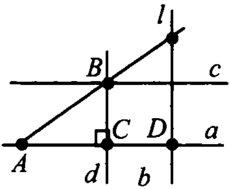
3) строим точку B так, что $B \in b$ и $AB = PQ$ (задача об откладывании отрезка, равного данному);

4) строим прямую с так, что $B \in c$ и $c \perp a$;

5) прямая c пересекает прямую a в точке C;

6) ΔABC построен.

б) 1) Строим любую прямую a и произвольную точку A на прямой a;



2) строим $\angle ab = \angle hk$;

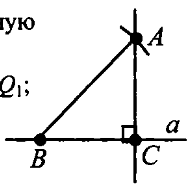
3) строим прямую c так, что $c \parallel a$ и расстояние между a и c равно PQ;

4) прямая с пересекает прямую l в точке B;

5) строим прямую d так, что $B \in d$ и $d \perp c$;

6) d пересекает прямую a в точке C; 7) ΔABC построен.

в) 1) Строим любую прямую a и произвольную точку B на прямой a;



2) находим точку C так, что $C \in a$ и $BC = P_1Q_1$;

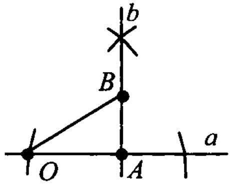
3) строим прямую b так, что $C \in b$ и $a \perp b$;

4) строим окружность с центром в точке B и радиусом PQ;

5) окружность пересекает прямую b в точке A;

6) получаем ΔABC.

315. а) План построения:



1) строим произвольную прямую a и произвольную точку A на прямой a;

2) строим прямую b, что $A \in b$ и $a \perp b$;

3) строим точку B, что $B \in b$;

4) строим окружность с центром в B и радиусом $2AB$;

5) окружность пересекает прямую a в точке O;

ΔABC – прямоугольный (по построению) и $AB = \frac{1}{2}OB$ (по построению), значит $\angle AOB = 30°$ (т.к. катет противолежащий этому углу равен половине гипотенузы).

б) получаем $\angle AOB = 30°$.

$\angle OBA = 60°$ (т.к. ΔAOB – прямоугольный и $\angle AOB = 30°$).

в) $\angle AOB$ делим пополам, получаем 15°.

г) т.к. 120° = 180° – 60°, то этот угол построен в п. а) – это угол, смежный $\angle ABO$;

д) т.к. 150° = 180° – 30°, то этот угол построен в п. а) – это угол смежный $\angle AOB$;

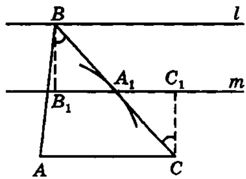
е) т.к. 135° = 90° + 45°, то строим две перпендикулярные прямые и один из полученных прямых углов делим пополам;

ж) т.к. 165° = 180° – 15°, то это угол, смежный построенному в п. в), т.е. углу в 15°.

з) т.к. 75° = 90° – 15°, то строим угол в 15°, потом строим перпендикуляр к одной из сторон построенного угла, проходящий через его вершину. Один из полученных углов будет 75°.

и) т.к. 105° = 90° + 15°, то это другой из углов, полученных в пункте.

316. **Анализ.** Нам даны: сторона длиной a, высота b, медиана c.



Построение. Возьмем произвольную точку A. Отложим от нее отрезок $AC = a$. Далее проведем две прямые l и m, причем расстояние между AC и m равно расстоянию между l и m и равно $\frac{1}{2}b$.

Построим окружность радиусом c с центром в точке A. Обозначим точку пересечения окружности с прямой m буквой A_1. Пусть прямая CA_1 пересекает прямую l в точке B. ΔABC – искомый.

Доказательство. Проведем к прямой m перпендикуляры CC_1, BB_1. $CC_1 = BB_1$ из построения, $\angle B_1BA_1 = \angle C_1CA_1$, т. е.

$\Delta CA_1C_1 = \Delta A_1B_1B$. Значит, $CA_1 = A_1B$, отсюда A_1 – середина CB, а AA_1 – медиана. Имеем: $AA_1 = c$, $CC_1 + B_1B = b$ (высота), $AC = a$ – по построению.

Исследование. В зависимости от количества точек пересечения окружности с прямой b задача может иметь от двух до ни одного решения. Другими словами, при $c > \frac{1}{2}b$ решений два, при $c = \frac{1}{2}b$ – одно решение, при $c < \frac{1}{2}b$ решений нет.

317. 1) строим биссектрису $\angle A$ – прямую a;

2) строим биссектрису $\angle C$ – прямую c;

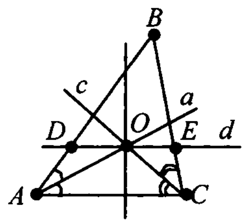
3) прямая a пересекается c прямой с в O;

4) строим прямую b, что $O \in b$ и $b \perp AC$;

5) строим прямую d, что $d \perp b$ и $O \in d$;

6) a пересекается с AB в D, a пересекается с CB в E;

7) получаем отрезок DE.



Доказательство:

a – биссектриса $\angle A$; c – биссектриса $\angle C$; $d \perp b$, $b \perp AC$, значит $d \parallel AC$;

$d \cap AB$ в D, $d \cap BC$ в E, следовательно, по задаче 245 имеем: $DE = AD + CE$.

318. План построения:

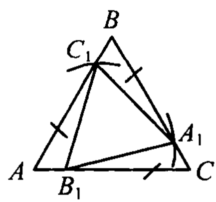
1) строим окружность w_1 с центром в B радиусом B_1C;

б) w_1 пересекает BC в A_1;

в) строим окружность w_2 с центром в A радиусом B_1C;

г) w_2 пересекает AB в C_1;

д) получаем $\Delta A_1B_1C_1$.



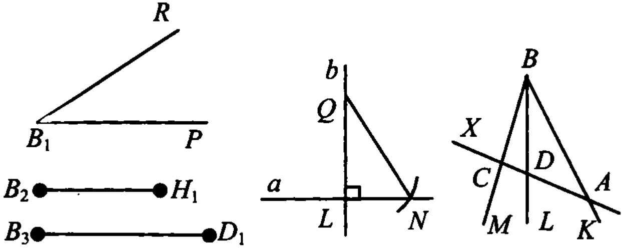
Доказательство:

$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$ (т.к. ΔABC – равносторонний) и $AB = BC = AC$, $AB_1 = AC - B_1C$, $B_1C = AB - AC_1$, $CA_1 = BC - BA_1$, $B_1C = AC_1 = BA_1$ (по построению), значит $AB_1 = BC_1 =$

$= CA_1$ значит $\Delta AC_1B = \Delta BA_1C = \Delta CB_1A_1$ (по 2-му признаку равенства треугольников).

Тогда $B_1C_1 = A_1C_1 = A_1B_1$, и значит $\Delta A_1B_1C_1$ – равносторонний, ч.т.д.

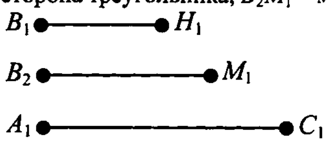
319.



а) *б)* *в)*

Пусть надо построить ΔABC, и даны углы RB_1P и отрезки: B_2H_1, равный высоте треугольника, B_3D_1, равный медиане треугольника (см. рис. *а*). Построим произвольную прямую *а*, отметим на ней точку L и через точку L проведем прямую в перпендикулярную прямой *а* (см. пункт 23 учебника). На прямой *в* от точки L отложим отрезок LQ, равный данному отрезку B_2H. Построим окружность с центром в точке Q и радиусом B_3D_1, она пересечет прямую *а* в точке N (см. рис. *б*). Построим произвольный луч BM, отложим от него угол MBK, равный данному углу RB_1P (см. пункт 23 учебника). Построим биссектрису BL угла MBK, отложим отрезок BD, равный данному отрезку B_3D_1 (см. рис. *в*). От луча DB отложим угол BDX, равный углу QNL, луч DX пересечет луч BM в точке *с*. Проведем прямую CD, она пересечет луч BK в точке A. Треугольник ABC есть искомый.

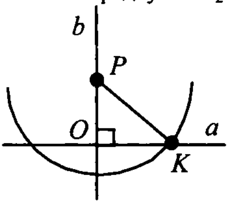
320. Пусть даны три отрезка B_1H_1 – высота треугольника, A_1C_1 – сторона треугольника, B_2M_1 – медиана треугольника.



а)

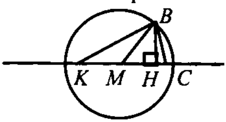
Построим треугольник ABC по стороне, высоте и медиане, проведенным к этой стороне.

Проведем прямую *a* и построим прямую *b*, перпендикулярную прямой a. Пусть O – точка пересечения прямых a и b. На прямой b отложим отрезок $OP = B_2H_1$. Построим окружность с центром в точке P и радиусом B_2M_1, она пересечет прямую a в точке K.



б)

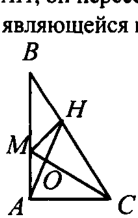
Теперь проведем прямую c на ней отметим отрезок $AC = A_1C_1$, построим к нему серединный перпендикуляр, который пересекает отрезок AC в точке M и $AM = MC$. Построим окружность с центром в точке M и радиусом B_2M_1.



в)

На прямой c от точки M отложим отрезок $MH = OK$. Через точку H проведем прямую перпендикулярную прямой c. Точка B пересечения этой прямой с окружностью является третьей вершиной искомого треугольника ABC. Однако при построении могут получиться четыре различных, но равных треугольника.

321. На стороне BC от точки C отложим отрезок $CH = AC$. Проведем отрезок AH. Построим серединный перпендикуляр к отрезку AH, он пересечет отрезок AH в точке O, а отрезок AB в точке M, являющейся искомой точкой, т.к. $AM = MH$ и $MH \perp BC$.



Докажем это: $AC = CH$ по построению, CM – общая, значит, $\Delta MAC = \Delta MHC$ (по гипотенузе и катету), следовательно, $AM = MH$.

Задачи повышенной трудности

Задачи к главе I

322. Если исходная единица измерения CD, то $CD = 1$, $AB = a$; при единице измерения AB: $AB = 1$, $CD = b$.
Существует такое число k, при котором $1 \cdot k = b$, а $k = 1$, тогда $a \cdot b = 1$.

Ответ: $a \cdot b = 1$.

323. Аналогично решению предыдущей задачи: $E_1F_1 = 1 \cdot k$,

$$AB = n = km, k = \frac{n}{m}, E_1F_1 = \frac{n}{m}.$$

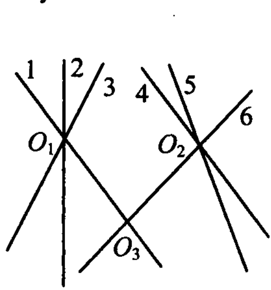
Ответ: $E_1F_1 = \dfrac{n}{m}$.

324. $\angle hk + \angle hl = 180°$ (так как они смежные). Прибавим к каждой части $\angle hk$, перенеся $\angle hl$ в правую часть: $2\angle hk = 180° -$ $- \angle hl + \angle hk$, тогда $\angle hk = 90° - \dfrac{1}{2}(\angle hl - \angle hk)$. Точно так же прибавим к каждой части $\angle hl$ (первое выражение) и проведем соответствующие преобразования, получаем:

$$\angle hl = 90° + \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk).$$

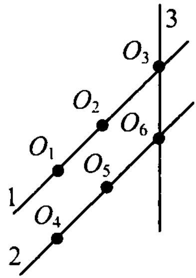
325. Пусть $\angle 6$ является вертикальным для $\angle 3$, а $\angle 7$ является вертикальным для $\angle 4$, тогда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180°$, а из того, что вертикальные углы равны, получим $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 +$ $+ \angle 4 + \angle 5 = 180°$.

326. Из условия следует, что можно разбить наши шесть прямых на две тройки; пусть прямые 1, 2 пересекаются в точке O_1, прямые 4, 5 и 6 в точке O_2, а прямые 6 и 1 пересекаются в точке O_3. По условию через точку O_3 должна



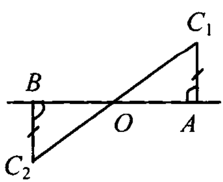
проходить еще хотя бы одна прямая, кроме прямых 6 и 1, это возможно только если все три точки O_1, O_2 и O_3 совпадают. Предположим противное, тогда через точку O_3 проходит хотя бы одна из прямых 2, 3, 4 или 5, что невозможно, поскольку через две точки O_1 и O_2 или O_2 и O_3 на плоскости можно провести только одну прямую, или какие-то прямые совпадают, что противоречит условию, значит, наше предположение неверно, и все шесть прямых проходят через одну точку.

327. Из условия задачи следует, что наши шесть точек можно разбить на две тройки: пусть прямая 1 проходит через точки O_1, O_2 и O_3, а прямая 2 проходит через точки O_4, O_5 и O_6. Докажем, что прямые 1 и 2 совпадают: предположим противное. Тогда через точки O_3 и O_6 проходит прямая 3, и, поскольку две несовпадающие прямые могут пересекаться на плоскости только в одной точке, то точки O_1, O_2, O_4 и O_5 не принадлежат прямой 3, что противоречит условию, следовательно прямые 1 и 2 совпадают, и все шесть точек лежат на одной прямой.



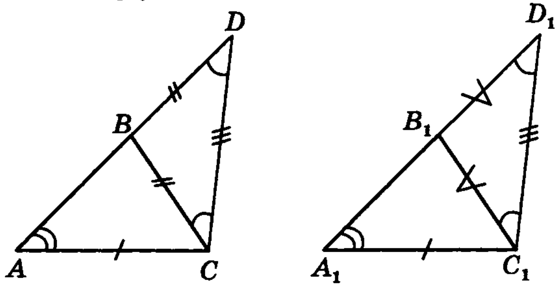
Задачи к главе II

328. Рассмотрим прямые AC_1 и BC_2, и секущую на прямую AB. Т.к. накрест лежащие углы $\angle BAC_1 = \angle ABC_2$ (по условию), получим, что $AC_1 \parallel BC_2$. $\angle AC_1C_2 = \angle BC_2C_1$ как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AC_1 и BC_2 секущей C_1C_2.



Пусть точка O – точка пересечения прямых AB и C_1C_2. $\Delta AC_1O = \angle BC_2O$ по стороне и двум углам ($\angle OAC_1 = \angle OBC_2$, $\angle AC_1O = \angle BC_2O$, $AC_1 = BC_2$), в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, т.е. $AO = OB$, ч.т.д.

329. Возьмем треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $AC = A_1C_1$, $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Нам надо доказать равенство этих треугольников.

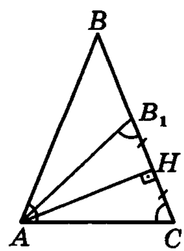


Построим два равнобедренных треугольника: BCD и $B_1C_1D_1$ так, что $BD = BC$, $B_1D_1 = B_1C_1$.

$AD = AB + BD = AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1 = A_1D_1$. Значит, $\Delta ACD = \Delta A_1C_1D_1$, отсюда $\angle D = \angle D_1$, $DC = D_1C_1$. Тогда $\Delta BDC = \Delta B_1D_1C_1$ (по второму признаку), т. е. $BD = B_1D_1$. Поэтому получаем: $AB = AD - BD = A_1D_1 - B_1D_1 = A_1B_1$.

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по первому признаку.

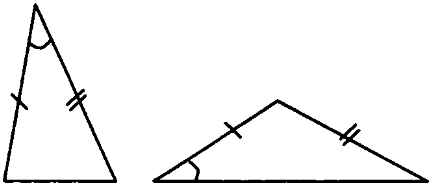
330. Возьмем равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). Проведем высоту AH. Пусть точка B_1 лежит на BC и $CH = AB_1$.



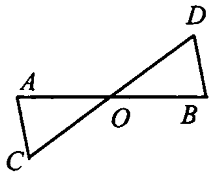
Тогда AH – медиана и высота ΔAB_1C. Следовательно, ΔAB_1C – равнобедренный. В треугольниках ABC и AB_1C общая сторона AC, $\angle C$ – общий, $\angle A = \angle C$ (ΔABC – равнобедренный), $\angle C = \angle B_1$ (ΔAB_1C – равнобедренный). Но если ΔABC не равносторонний ($AB \neq AC$), то $\Delta ABC \neq \Delta AB_1C$. Так как $AB_1 = AC \neq AB$, то треугольники ABC и AB_1C удовлетворяют условию задачи.

Задачи к главам III и IV

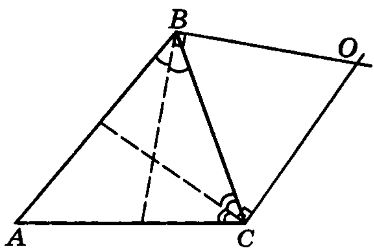
331. Могут.



332. В треугольниках AOC и BOD $\angle AOC =$ $= \angle BOD$ как вертикальные. В ΔAOC $\angle AOC = \angle AOC$ (по свойству равнобедренного треугольника), а в ΔBOD $\angle BDO = \angle BOD$, следовательно, $\angle ACO =$ $= \angle BDO$. Из того, что сумма углов любого треугольника равна 180° следует, что $\angle DBO = \angle CAO$. Следовательно, $\Delta AOC = \Delta BOD$ по углу и прилежащим к нему сторонам, а в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны значит $OC = OD$.



333. Согласно задаче 83,



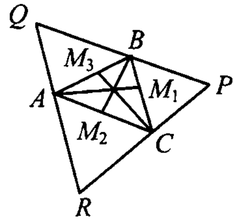
$$\angle OCB = 90° - \frac{\angle C}{2},$$

$$\angle OBC = 90° - \frac{\angle B}{2}.$$

$$\angle BOC = 180° -$$
$$- \angle OCB - \angle OBC =$$
$$= \frac{\angle B + \angle C}{2} = \frac{180° - \angle A}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

<u>Ответ</u>: $\angle BOC = 90° - \frac{\ }{2}$.

334. Пусть дан ΔABC, а прямые, перпендикулярные к биссектрисам треугольника пересекаются в точках P, Q и R. AM_1, BM_2 и CM_3 – биссектрисы ΔABC. $\angle M_1AR = \angle M_1AQ = 90°$ по построению. $\angle M_1AC = \angle M_1AB = $



$= \frac{1}{2}\angle BAC$, т.к. M_1A – биссектриса,

следовательно, $\angle CAR = \angle BAQ = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$. Аналогично,

$\angle BCP = \angle ACR = 90° - \frac{1}{2} BCA$ и $\angle QBA = \angle PBC =$

$= 90° - \frac{1}{2}\angle ABC$.

Из ΔBPC: $\angle BPC = 180° - \angle PBC - \angle BCP = 180° - 90° +$

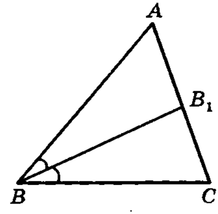
$+ \frac{1}{2} ABC - 90° + \frac{1}{2}\angle BCA = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCA) =$

$= \frac{1}{2}(180° - \angle BAC) = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$, аналогично,

$\angle CRA = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle AQB = 90° - \frac{1}{2}\angle BCA$. Ч.т.д.

335. **а)** остроугольный; **б)** остроугольный.

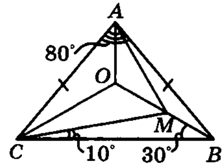
336. Пусть BB_1 – медиана треугольника ABC. Допустим, что $BB_1 < \frac{1}{2} AC$, тогда, согласно теореме о соотношениях между сторонами и углами треугольника, получаем: $\angle ABB_1 > \angle A$, $\angle CBB_1 > \angle C$. Имеем:



$\angle B = \angle ABB_1 + \angle CBB_1 > \angle A + \angle C = 180° - \angle B$,

откуда $\angle B > 90°$. Аналогично для $BB_1 \geq \frac{1}{2}AC$.

337. $\angle B = \angle C = \dfrac{180° - 80°}{2} = 50°$. AO – биссектриса угла A, где точка O – точка пересечения BM и AO. Имеем: $\Delta AOC = \Delta AOB$ по первому признаку,



отсюда $\angle ACO = \angle ABO = \angle ABC - \angle MBC = 20°$. Тогда

$\angle AOB = \angle AOC = 180° - \angle ABO - \frac{1}{2}\angle A = 120°$.

Поэтому $\angle MOC = 360° - \angle AOC - \angle AOB = 120°$,

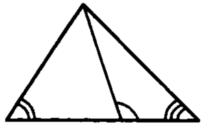
$\angle OCM = \angle ACB - \angle OCA - \angle MCB = 20°$.

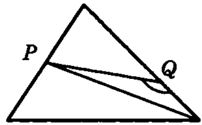
Имеем: $\Delta ACO = \Delta MCO$ ($\angle MOC = \angle AOC$, $\angle OCM = \angle OCA$, OC – общая), отсюда $AC = MC$ и ΔAMC – равнобедренный. Получаем: $\angle ACM = \angle C - \angle MCB = 40°$, $\angle AMC = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$.

<u>**Ответ**</u>: $\angle AMC = 70°$.

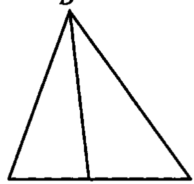
338. **а)** Для начала рассмотрим случай, если одна из точек совпадает с вершиной треугольника (рис. *а*).

Возьмем ΔABC ($AB > BC$) и точку Q, лежащую на AC. $\angle BQA$ – внешний для треугольника CBQ, следовательно, он больше $\angle C$, а $\angle C$ больше $\angle A$, значит в ΔBQA сторона $BA > BQ$.



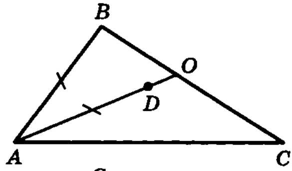


б) В случае, когда обе точки не совпадают с вершинами (рис. *б*). Пусть $\angle BQP < 90°$, тогда $\angle PQC > 90°$. Из пункта *а*) мы знаем, что PC не больше любой стороны треугольника. Но в треугольнике PQC PC лежит против тупого угла, а значит, больше PQ, т. е. PQ не больше наибольшей стороны треугольника.

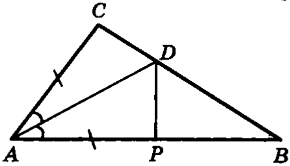


339. Из того, что угол, смежный с углом треугольника, больше каждого из двух других углов треугольника (задача № 173), следует, что $\angle BB_1C > \angle B_1BA$, так как $\angle BB_1C$ смежный с $\angle AB_1B$ треугольника ABB_1. $\angle ABB_1 = \angle CBB_1$, так как BB_1 – биссектриса угла ABC. По доказанному $\angle BB_1C > \angle B_1BA$, следовательно, $\angle BB_1C > \angle CBB_1$. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, рассмотрим ΔB_1BC. По доказанному $\angle BB_1C > \angle CBB_1$, следовательно, $BC > B_1C$. Из того, что $\angle AB_1B$ смежный с $\angle CB_1B$ треугольника CB_1B, следует, что $\angle AB_1B >$ $> \angle CBB_1$. Но $\angle CBB_1 = \angle ABB_1$, следовательно, $\angle AB_1B >$ $> \angle ABB_1$. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, рассмотрим ΔAB_1B, по доказанному $\angle AB_1B >$ $\angle ABB_1$, следовательно, $BA > B_1A$. Что и требовалось доказать.

340. Продлим AD до пересечения с BC в точке O. Тогда $AO > AD$ и $AC > AO$ (задача 338, пункт a). Значит, $AC > AO > AD = AB$.

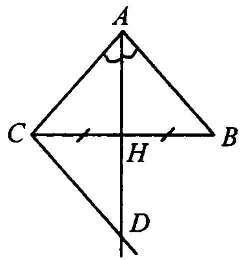


341. Пусть точка P лежит на AB, $AC = AP$. Тогда $\Delta ACD = \Delta APD$ (по первому признаку) и $\angle ADB > \angle ADP = \angle ADC$.



Имеем: $\angle C = \angle APD$ ($\Delta ACD = \Delta APD$), $\angle APD = 180° -$ $- \angle C = \angle A + \angle B > \angle B$. Тогда из ΔBDP : $BD > PD = CD$.

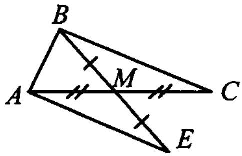
342. Рассмотрим ΔABC, AH – биссектриса и медиана, проведенная из вершимы A. Проведем прямую $CO \parallel AB$, точка D – точка пересечения CO с прямой AH. $\Delta AHB = \Delta DHC$ (по стороне и прилежащим к ней углам: $CH = HB$, т.к. AH – медиана; $\angle AHB = \angle DHC$ как вертикальные;



$\angle PDC = \angle HAB$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых CD и AB секущей AD, следовательно, $\angle HCD = \angle HBA$). Получаем, что $\angle HDC = \angle HAB = \angle HAC$ (AH – биссектриса $\angle CAB$) и $AB = CD$. ΔADC – равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника ($\angle CAD =$

$= \angle CDA$), следовательно, $AC = CD = AB$, значит, ΔABC – равнобедренный. Что и требовалось доказать.

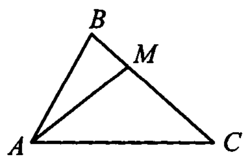
343. Пусть ABC – данный треугольник, $AB > BC$, BM – медиана.



Отметим точку E, такую, что M является серединой отрезка BE.

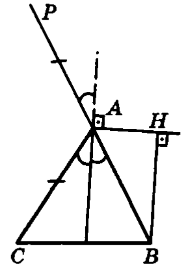
$\Delta AME = \Delta CMB$ (по двум сторонам и углу между ними: $BM = ME$ по построению, $AM = MC$, так как BM – медиана. $\angle AME = \angle CMB$ – как вертикальные). В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, а против равных сторон лежат равные углы, следовательно, $AE = BC$. $\angle AEM = \angle CBM$. Из того, что $AB > BC$ и $AE = BC$ следует, $AB > AE$. Рассмотрим ΔABE: в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, следовательно, $\angle AEB > \angle ABE$, но $\angle AEB = \angle CBM$, значит, $\angle CBM > \angle ABM$, что и требовалось доказать.

344. Если $\angle AMB$ не равен $\angle AMC$, то из того, что угол, смежный с углом треугольника, больше каждого из двух других углов треугольника (задача № 173), следует, что



$\angle AMB > \angle MCA$ и $\angle AMB > \angle MAC$, значит, у треугольников AMB и AMC не равны углы, следовательно, эти треугольники не равны. Если $\angle AMB = \angle AMC$, допустим, что $\Delta AMB = \Delta AMC$, но в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, значит, $AB = AC$, что противоречит условию, следовательно, наше предположение было неверно и ΔAMB не равен ΔAMC. Ч.т.д.

345. Продлим BA за точку A так, чтобы $PA = AC$ (P – точка на продленном отрезке).

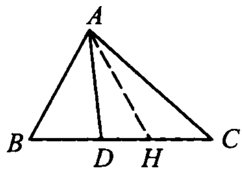


$\Delta AHC = \Delta AHP$ (AH – общая, $PA = CA$, $\angle PAH = 90° + \dfrac{\angle A}{2} = \angle CAH$). Отсюда $CH = PH$.

Из треугольника PHB: $BP < BH + PH$. Далее прибавим к обеим частям BC и заменим PH на CH, BP на $BA + AP = BA + AC$. Тогда получаем:

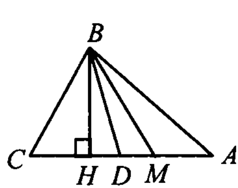
$BH + CH + BC > BA + AC + BC$, т. е. $P_{\Delta BHC} > P_{\Delta ABC}$

346. Из доказанного в задаче № 341 следует, что $\angle ADC > \angle ADB$, но $\angle ADC + \angle ADB = 180°$, следовательно, $\angle ADC > 90°$.



Предположим, что точка H принадлежит лучу DC, тогда $\angle AHD = 90°$, так как AH – высота ΔABC. Рассмотрим ΔDAH. Сумма углов треугольника равна $180°$, но в ΔDAH имеем: $\angle ADH + \angle AHD > 180°$, получаем противоречие, следовательно, точка H лежит на луче DB. Ч.т.д.

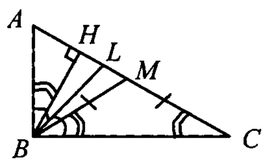
347. Рассмотрим треугольник ABC, у которого $AB \neq BC$, $BC \neq AC$, $AB \neq AC$, пусть BH – высота ΔABC, BD – биссектриса ΔABC, BM – медиана ΔABC.



Не ограничивая общности, будем считать, что $BC < AB$, тогда, по доказанному в задаче № 346, получим, что точка H принадлежит лучу DC.

По доказанному в задаче № 341, получим, что $AD > DC$, но $AD + DC = AC$, следовательно, $AD > \frac{1}{2} \cdot AC$. BM – медиана, следовательно, $CM = AM = \frac{1}{2} \cdot AC$. Получаем, что $AD > AM$, т.е. точка M принадлежит отрезку AD, следовательно, точка M принадлежит отрезку AD, следовательно, точка M принадлежит лучу DA, а точка D лежит между точками H и M, ч.т.д.

348. $\angle ABL = \angle LDC = \dfrac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.



Пусть $\angle ACB = \alpha$, тогда

$\angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB =$

$= 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$. $\angle ABH =$

$= 180^\circ - \angle BAH - \angle AHB = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 90^\circ = \alpha$.

Треугольник прямоугольный, $BM = MC$, значит ΔBMC – равнобедренный; $\angle MBC = \angle MCB = \alpha$; $\angle BMC = 180^\circ - 2\alpha$ (из треугольника BMC). $\angle AMB = 180^\circ - \angle BMC = 2\alpha$.

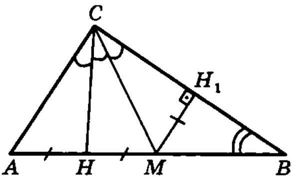
ΔABL: $\Delta ALB - 180^\circ - 45^\circ - (90^\circ - \alpha) = 45^\circ + \alpha$;

$\angle BLC$ (смежный с $\angle ALB$) $= 180^\circ - 45^\circ - \alpha = 135^\circ - \alpha$.

ΔLBM: $\angle LBM - 180^\circ - 2\alpha - (135^\circ - \alpha) = 45^\circ - \alpha$.

ΔHBL: $\angle HBL = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ - \alpha = 45^\circ - \alpha$; $\angle LBM = \angle HBL$, ч.т.д.

349. Возьмем ΔABC, в котором CM – медиана, CH – высота, $\angle ACM = \angle HCM = \angle MCB$, $AM = \frac{1}{2}AB$. Тогда

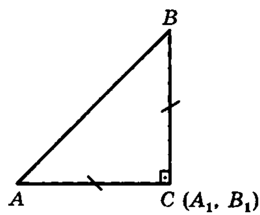


$\Delta ACH = \Delta CHM$ по второму признаку. $HM = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{4}AB$.

Пусть MH_1 перпендикулярно BC, $\Delta HCM = \Delta H_1CM$ по второму признаку, т. е. $H_1M = MH = \frac{AB}{4}$. $\angle H_1BM = 30°$, так как в прямоугольном треугольнике MH_1B: $MH_1 = \frac{1}{2}MB$,

$\angle HCB = 90° - \angle B = 60°$ и $\angle ACB = \frac{3}{2}\angle HCB = 90°$.

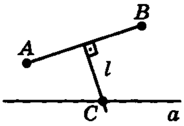
350. Условие $AA_1 \geq BC$ и то, что $AC \geq AA_1$ (AC – гипотенуза, AA_1 – катет прямоугольного ΔAA_1C), дает нам первое неравенство: $AC \geq AA_1 \geq BC$. Так же для BB_1: $BC \geq BB_1 \geq AC$. Оба неравенства выполняются при $BC = BB_1 = AA_1 = AC$, т. е. точки A_1, B_1 и C совпадают, т. е. ΔABC – равнобедренный и прямоугольный.



Задачи на построение

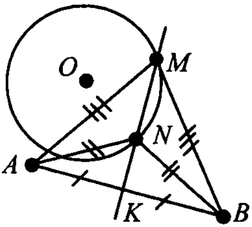
351. Решение приведено в учебнике.

352. Проведем срединный перпендикуляр l к отрезку AB. Точка C пересечения прямых l и a – искомая.



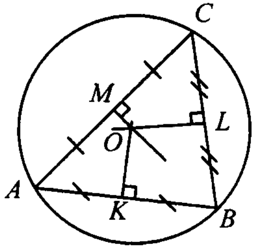
__Исследование.__ Если прямая AB перпендикулярна прямой a, то прямая l параллельна прямой a, т. е. решений нет. Если прямая a совпадает с прямой l, то решений бесконечно много. В остальных случаях существует только одно решение.

353. Соединяем точки A и B. Находим K – середину AB. Через K проводим перпендикуляр к AB. Его точки пересечения с окружностью – искомые точки.



В случае, когда перпендикуляр касается окрестности – одно решение, когда не пересекается – нет решений.

354.



Соединяем точки A, B и C. Находим середины отрезков AB,

BC и AC, соответственно K, L и M. Проводим перпендикуляры (серединные перпендикуляры ΔABC). Находим точку O – их точку пересечения. Проводим окружность радиуса $AO = BO = CO$ с центром в т. O. Вокруг треугольника всегда можно описать окружность, поэтому задача не имеет решения, лишь когда лежат на одной прямой.

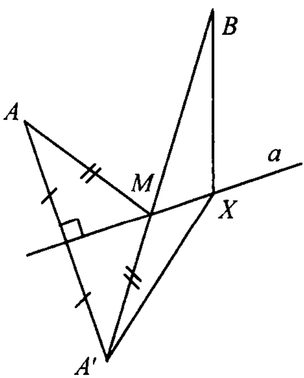
355. Из точки A опускаем перпендикуляр на a. Пусть K – точка пересечения. С другой стороны прямой откладываем точку A' с условием

$AK = A'A$. Соединяем точки A' и B.

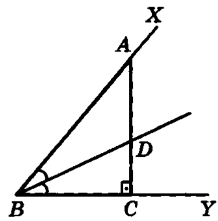
Пусть M – пересечение $A'B$ и пр. a. M – искомая точка, поскольку выполняется неравенство треугольника:

$AM + MB = A'M + MB$

(т.к. $\Delta AA'M$ – равнобедренный) $= A'B < AX + XB$.



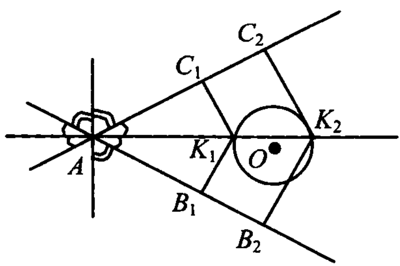
356. Построим $\angle XBY = \angle B$ и биссектрису этого угла. Отложим на биссектрисе отрезок BD и проведем через точку D прямую перпендикулярную лучу OY. Обозначим точку пересечения этой прямой с лучом OX буквой A, с лучом OY – буквой C. Треугольник ABC – искомый.



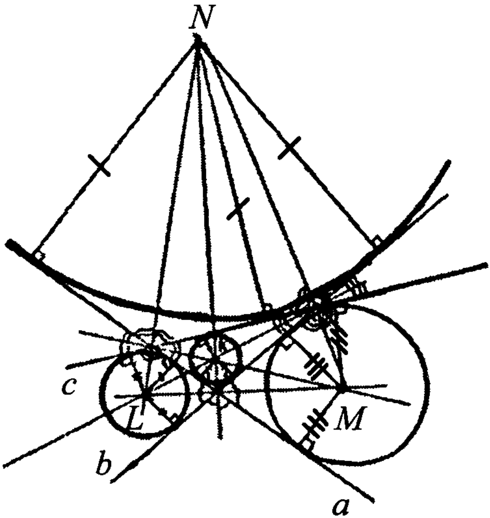
Доказательство. ΔABC – прямоугольный ($\angle C = 90°$ по построению), $\angle CBA = \angle B$ (по условию), биссектриса равна BD.

Исследование. Задача всегда имеет решение.

357. Делим углы пересекаемых прямых. Проводим биссектрисы. Точки пересечения биссектрисы с окружностью – искомые. Например $\Delta AC_1K_1 = \Delta AB_1K_1$ (прямоугольные треугольники с равным острым углом и общей гипотенузой), значит $C_1K_1 = B_1K_1$. Задача может иметь 1, 2, 3, 4 решения или не иметь решения вообще, в зависимости от расположения окружности по отношению к биссектрисе углов.

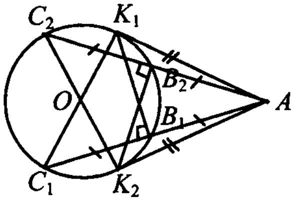


358. Как и в предыдущей задаче проводим биссектрису углов между пересекаемыми прямыми, а также биссектрисой смежных углов. Получается 4 решения.

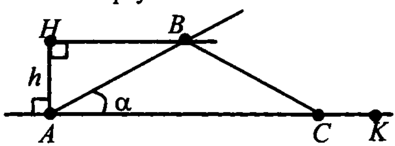


359. Пусть R – радиус окружности. Проводим окружность радиусом $2R$ с центром в т. A и ищем пересечение ее с исходной окружностью – точки K_1, K_2. Через точки K_1, K_2 проводим диаметры, находим точки C_1, C_2. Соединяем A с C_1 и C_2, находим т. B_1 и B_2. В частности, $\angle C_1B_1K_1 = 90°$ (по свойству диаметра), т.е. K_1B_1 – высота ΔAC_1K_1. Но ΔAC_1K_1 – равнобедренный, т.к. $AK_1 = C_1K_1 = 2R_1$, то K_1B_1 – медиана. Значит $AB_1 = B_1C_1$.

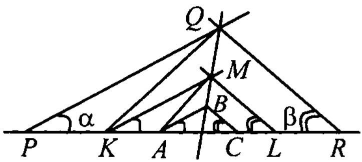
Если расстояние от т. A до окружности равно $2R$, то решение одно (надо лишь провести прямую OA), если > $2R$ – то решений нет.



360. Проводим прямую. Отмечаем точку A – одну из вершин нашего треугольника на прямой, отмечаем отрезок, равный периметру треугольника – находим т. K, откладываем заданный угол с вершиной в т. A. Из т. A проводим перпендикуляр к первой проведенной прямой. Откладываем на нем отрезок, равный высоте – находим т. H. От нее откладываем перпендикуляр к последней прямой, находим его пересечение с другой стороной угла. Нашли точку B. От точки K откладываем отрезок, равный AB; находим точку C. Соединяем B и C. ABC – искомый треугольник.



361. Проводим прямую. Откладываем на ней отрезок KL, равный периметру треугольника. Строив известные углы с вершинами в точках K и L, находим пересечение их сторон – точку M. От точки K откладываем на исходную прямую отрезок, равный KM, находим т. P. Аналогично находим т .R. Через т. P проводи прямую, параллельную KM, через т. Q – параллельную LM. Их пересечение – т. Q. Проводим прямую QM, а также соединяем Q и K. Через точку М проводим прямую, параллельную KQ, находим т. A, через нее проводим прямую, параллельную KM до пересечения с QM, находим т. В. Через нее проводим прямую, параллельную LM, получаем т. C. Из подобия треугольников ABC, KLM и PQR получаем, что $AB = AK$, $BC = CL$, т.е. $AB + BC + AC = KL$, т.е. ΔABC – искомый.



362. Пусть надо построить ΔABC, и даны $\angle PQR$ и отрезки B_1C_1, равный стороне треугольника, и MN, равный сумме двух других сторон треугольника (см. рис. *а*). Проведем произвольную прямую *а*, отметим на ней точку B и точку X (см. рис. *б*). От луча BX построим угол XBL, равный углу PQR (см. пункт 23 учебника). От точки В отложим отрезок BC, равный данному отрезку BA. Построим биссектрису BK угла LBC (см. пункт 23 учебника). Построим окружность с радиусом, равным MN и центром в точке C, она пересечет луч BK в точке O. Отложим от луча BK $\angle KBF$, равный $\angle BKC$. Луч BF пересечет CO в точке A. Треугольник ABC есть искомый, докажем это.

$\angle KAB = \angle ABC + \angle ACB$ (как внешний). ΔKAB равнобедренный (т.к, $\angle BKA = \angle KBA$ по построению).

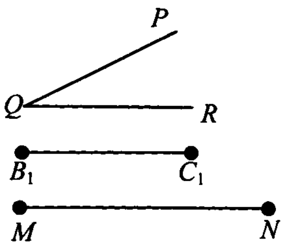
Значит $\angle KBA = \dfrac{180^\circ - \angle KAB}{2} = \dfrac{180^\circ - \angle ABC - \angle ACB}{2}$.

$$\angle KBC = \angle KBA + \angle ABC = \frac{180^\circ - \angle ABC - \angle ACB}{2} + \angle ABC =$$

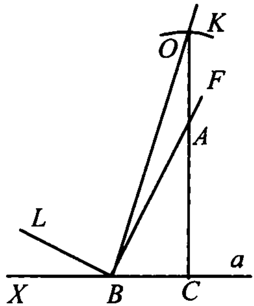
$$= \frac{180^\circ + \angle ABC - \angle ACB}{2}.$$

$\angle LBC = 2\angle KBC = 180\cdot + \angle ABC - \angle ACB$ (так как BK – биссек-

триса угла LBC). $\angle PQR = \angle XBL = 180° - \angle LBC =$
$= 180° - 180° - \angle ABC + \angle ACB = \angle ACB - \angle ABC.$
$AB = AK$, так как ΔKBA равнобедренный, значит, $MN = KA +$
$+ AC = AB + AC$, следовательно наши построения верны.



а



б

САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР®

Учебно-методическое пособие

Белова Анна Александровна

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ ИЗ УЧЕБНИКА ПО ГЕОМЕТРИИ

авторов Л.С. Атанасяна и др. (*М.: Просвещение*)

7 класс

Дизайн обложки *Екатерины Бедриной*

По вопросам приобретения книг издательства «ВАКО»
обращаться в ООО «Образовательный проект»
по телефонам: 8 (495) 778-58-27, 746-15-04. Сайт: www.obrazpro.ru
Приглашаем к сотрудничеству авторов.
Телефон: 8 (495) 507-33-42. Сайт: www.vaco.ru

Налоговая льгота -
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»

Подписано к печати 05.07.2011.
Формат 70×100/32. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 3. Тираж 5000 экз. Заказ № 2133

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»
142300, г. Чехов Московской области
Сайт: www.chpk.ru, e-mail: marketing@chpk.ru
Факсы: 8 (49672) 6-25-36; 8 (499) 270-73-59
Отдел продаж услуг: 8 (499) 270-73-59 (многоканальный)