

Диагностическая работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

24 сентября 2013 года

11 класс

Вариант МА10101 (Запад без логарифмов)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение диагностической работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если дан верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

Район

елённый пункт)

Школ

Клас

Фамилия

Имя

Отчество

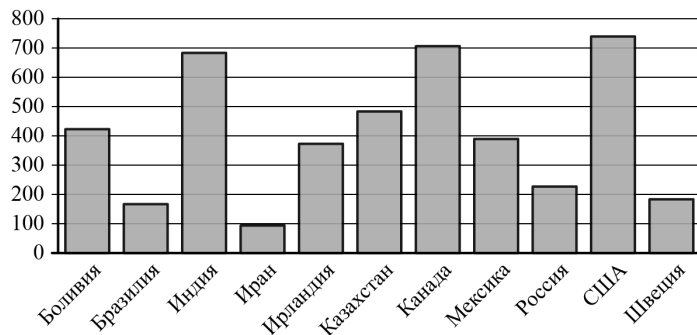
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** В квартире, где проживает Пётр, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 мая счётчик показывал расход 172 куб. м воды, а 1 июня — 177 куб. м. Какую сумму должен заплатить Пётр за холодную воду за май, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 23 руб. 10 коп.? Ответ дайте в рублях.

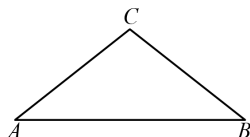
Ответ: _____.

- В2** На диаграмме показано распределение выплавки цинка в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке цинка занимали США, одиннадцатое место — Иран. Какое место занимала Боливия?



Ответ: _____.

- В3** Периметр равнобедренного треугольника равен 25. Боковая сторона равна 7. Найдите основание.



Ответ: _____.

- В4** Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01, средней цены P , показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0,01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических мясорубок. Определите наибольший рейтинг представленных в таблице моделей электрических мясорубок.

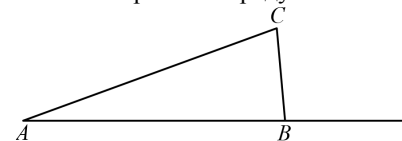
Модель мясорубки	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	5000	4	0	2
Б	3800	0	4	2
В	5800	4	0	2
Г	6000	0	0	2

Ответ: _____.

- В5** Найдите корень уравнения $\sqrt{x+27} = 7$.

Ответ: _____.

- В6** В треугольнике ABC угол A равен 14° , внешний угол при вершине B равен 91° . Найдите угол C . Ответ выразите в градусах.

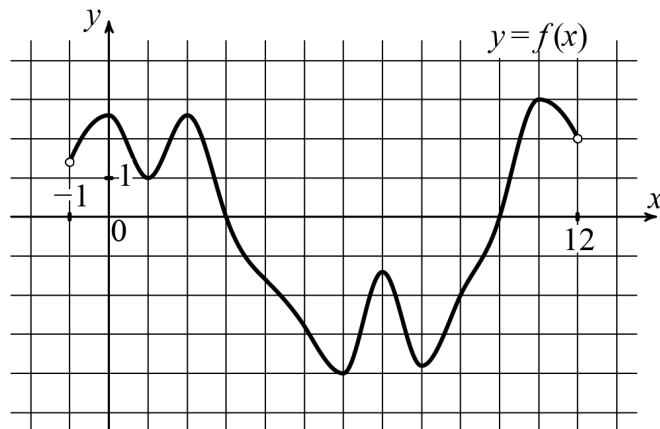


Ответ: _____.

- В7** Найдите значение выражения $46 \operatorname{tg} 7^\circ \cdot \operatorname{tg} 83^\circ$.

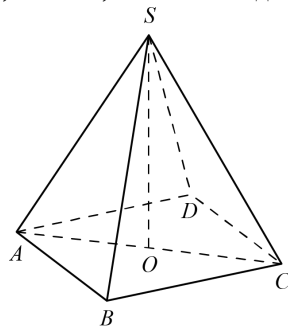
Ответ: _____.

- B8** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1; 12)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: _____.

- B9** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 12$, $SB = 15$. Найдите длину отрезка AC .

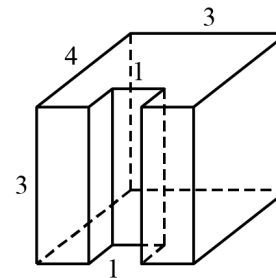


Ответ: _____.

- B10** Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 участников из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Ответ: _____.

- B11** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

- B12** В некоторой сплошной среде источник и приёмник звукового сигнала движутся прямолинейно навстречу друг другу. Частота звука, регистрируемая приёмником, не совпадает с частотой звука, испускаемого источником. Связь между частотами выражается формулой

$$f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v},$$

где c — скорость звука в данной среде (м/с), $f_0 = 160$ Гц — частота испускаемого звука, f — частота звука, регистрируемая приёмником, а $u = 8$ м/с и $v = 16$ м/с — скорости приёмника и источника звука соответственно. При какой скорости звука в среде частота, регистрируемая приёмником, будет равна 170 Гц? Ответ выразите в метрах в секунду.

Ответ: _____.

- B13** Иван и Алексей договорились встретиться в Н-ске. Они едут к Н-ску разными дорогами. Иван звонит Алексею и узнаёт, что тот находится в 168 км от Н-ска и едет с постоянной скоростью 72 км/ч. Иван в момент звонка находится в 165 км от Н-ска и ещё должен по дороге сделать 30-минутную остановку. С какой скоростью должен ехать Иван, чтобы прибыть в Н-ск одновременно с Алексеем?

Ответ: _____.

- B14** Найдите наибольшее значение функции $y = 9x - 8\sin x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

а) Решите уравнение $12^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3} \cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

C2

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру $B_1 C_1$ и делит его в отношении 8:3, считая от вершины B_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B , D и K .

C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3|x+1| + \frac{1}{2}|x-2| - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2. \end{cases}$$

C4

В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x - a + 6| = |x + a - 6| - (a - 6)^2$$

имеет единственный корень.

C6

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 6, 9, 12, 15.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Диагностическая работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

24 сентября 2013 года

11 класс

Вариант МА10102 (Запад без логарифмов)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение диагностической работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если дан верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

Район	
Город (населённый пункт)	
Школа	
Класс	
Фамилия	
Имя	
Отчество	

**Таблица тригонометрических функций для углов
от 1 до 89 градусов**

x	sinx	cosx	tgx	x	sinx	cosx	tgx	x	sinx	cosx	tgx	x	sinx	cosx	tgx
1	0,017	1,000	0,017	24	0,407	0,914	0,445	47	0,731	0,682	1,072	70	0,940	0,342	2,747
2	0,035	0,999	0,035	25	0,423	0,906	0,466	48	0,743	0,669	1,111	71	0,946	0,326	2,904
3	0,052	0,999	0,052	26	0,438	0,899	0,488	49	0,755	0,656	1,150	72	0,951	0,309	3,078
4	0,070	0,998	0,070	27	0,454	0,891	0,510	50	0,766	0,643	1,192	73	0,956	0,292	3,271
5	0,087	0,996	0,087	28	0,469	0,883	0,532	51	0,777	0,629	1,235	74	0,961	0,276	3,487
6	0,105	0,995	0,105	29	0,485	0,875	0,554	52	0,788	0,616	1,280	75	0,966	0,259	3,732
7	0,122	0,993	0,123	30	0,500	0,866	0,577	53	0,799	0,602	1,327	76	0,970	0,242	4,011
8	0,139	0,990	0,141	31	0,515	0,857	0,601	54	0,809	0,588	1,376	77	0,974	0,225	4,331
9	0,156	0,988	0,158	32	0,530	0,848	0,625	55	0,819	0,574	1,428	78	0,978	0,208	4,705
10	0,174	0,985	0,176	33	0,545	0,839	0,649	56	0,829	0,559	1,483	79	0,982	0,191	5,145
11	0,191	0,982	0,194	34	0,559	0,829	0,675	57	0,839	0,545	1,540	80	0,985	0,174	5,671
12	0,208	0,978	0,213	35	0,574	0,819	0,700	58	0,848	0,530	1,600	81	0,988	0,156	6,314
13	0,225	0,974	0,231	36	0,588	0,809	0,727	59	0,857	0,515	1,664	82	0,990	0,139	7,115
14	0,242	0,970	0,249	37	0,602	0,799	0,754	60	0,866	0,500	1,732	83	0,993	0,122	8,144
15	0,259	0,966	0,268	38	0,616	0,788	0,781	61	0,875	0,485	1,804	84	0,995	0,105	9,514
16	0,276	0,961	0,287	39	0,629	0,777	0,810	62	0,883	0,469	1,881	85	0,996	0,087	11,430
17	0,292	0,956	0,306	40	0,643	0,766	0,839	63	0,891	0,454	1,963	86	0,998	0,070	14,301
18	0,309	0,951	0,325	41	0,656	0,755	0,869	64	0,899	0,438	2,050	87	0,999	0,052	19,081
19	0,326	0,946	0,344	42	0,669	0,743	0,900	65	0,906	0,423	2,145	88	0,999	0,035	28,636
20	0,342	0,940	0,364	43	0,682	0,731	0,933	66	0,914	0,407	2,246	89	1,000	0,017	57,290
21	0,358	0,934	0,384	44	0,695	0,719	0,966	67	0,921	0,391	2,356				
22	0,375	0,927	0,404	45	0,707	0,707	1,000	68	0,927	0,375	2,475				
23	0,391	0,921	0,424	46	0,719	0,695	1,036	69	0,934	0,358	2,605				

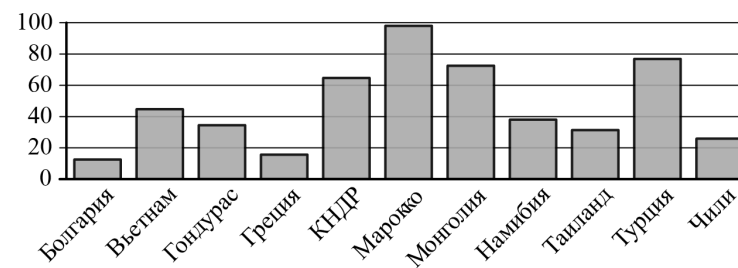
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** Для ремонта квартиры требуется 23 рулона обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 4 рулона?

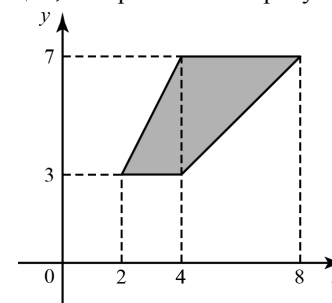
Ответ: _____.

- В2** На диаграмме показано распределение выплавки цинка в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке цинка занимало Марокко, одиннадцатое место — Болгария. Какое место занимала Намибия?



Ответ: _____.

- В3** Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ: _____.

- В4** Керамическая плитка одной и той же торговой марки выпускается трёх разных размеров. Плитки упакованы в пачки. Пользуясь данными таблицы, определите, в каком случае цена одного квадратного метра плитки будет наименьшей. В ответ запишите найденную наименьшую цену квадратного метра в рублях.

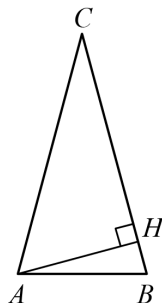
Размер плитки (см)	Количество плиток в пачке	Цена пачки
20×20	25	655 р.
20×30	17	663 р.
30×30	11	653 р. 40 к.

Ответ: _____.

- В5** Найдите корень уравнения $\sqrt{3x+25}=10$.

Ответ: _____.

- В6** В равнобедренном треугольнике ABC основание AB равно 20, AH — высота, $BH=2,1$. Пользуясь таблицами тригонометрических функций, найдите угол BAC (при необходимости результат округлите до целого числа градусов).

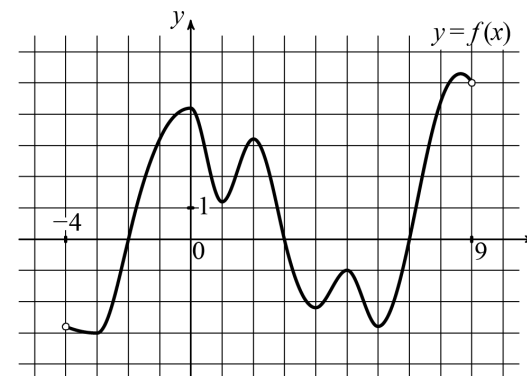


Ответ: _____.

- В7** Найдите значение выражения $28 \operatorname{tg} 46^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ$.

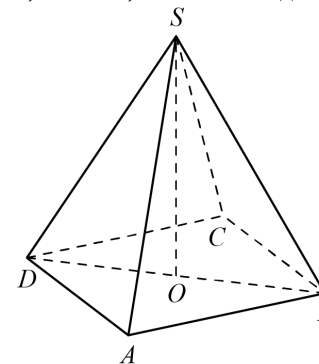
Ответ: _____.

- В8** На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: _____.

- В9** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO=12$, $SA=13$. Найдите длину отрезка BD .

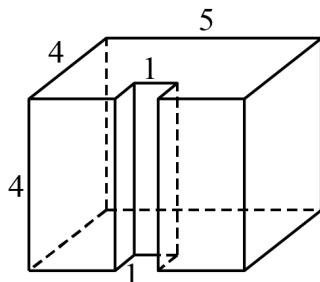


Ответ: _____.

- В10** Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 теннисистов, среди которых 20 участников из России, в том числе Максим Плотвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Максим Плотвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Ответ: _____.

- B11** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

- B12** В некоторой сплошной среде источник и приёмник звукового сигнала движутся прямолинейно навстречу друг другу. Частота звука, регистрируемая приёмником, не совпадает с частотой звука, испускаемого источником. Связь между частотами выражается формулой

$$f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v},$$

где c — скорость звука в данной среде (м/с), $f_0 = 170$ Гц — частота испускаемого звука, f — частота звука, регистрируемая приёмником, а $u = 2$ м/с и $v = 17$ м/с — скорости приёмника и источника звука соответственно. При какой скорости звука в среде частота, регистрируемая приёмником, будет равна 180 Гц? Ответ выразите в метрах в секунду.

Ответ: _____.

- B13** Три одинаковые рубашки дешевле куртки на 10%. На сколько процентов четыре такие же рубашки дороже куртки?

Ответ: _____.

- B14** Найдите наименьшее значение функции $y = (x-3)^2(x-6) - 5$ на отрезке $[4; 10]$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

а) Решите уравнение $(25^{\cos x})^{\sin x} = 5^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $4:5$, считая от вершины B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , O и C_1 .

C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4|x+1| + \frac{1}{2}|x-4| - \frac{5}{2}x \leq 12, \\ x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5. \end{cases}$$

C4

В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 2$ и $CD = 10$.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (1-a)^2 = |x-1+a| + |x-a+1|$$

имеет единственный корень.

C6

Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-3, -1, 2, 4, 6, 7, 9$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Диагностическая работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

24 сентября 2013 года

11 класс

Вариант МА10103 (Запад без логарифмов)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение диагностической работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если дан верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

Район

Город (населённый пункт)

Школ

Класс

Фамилия

Имя

Отчество

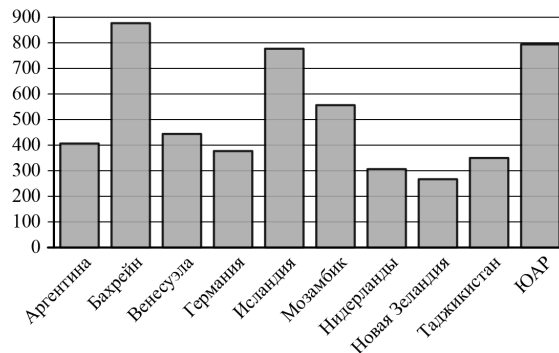
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** В розницу один номер еженедельного журнала «Репортаж» стоит 27 руб., а полугодовая подписка на этот журнал стоит 510 руб. За полгода выходит 25 номеров журнала. Сколько рублей сэкономит г-н Иванов за полгода, если не будет покупать каждый номер журнала отдельно, а оформит подписку?

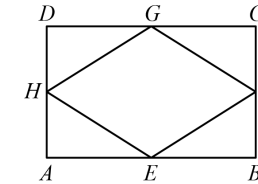
Ответ: _____.

- В2** На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по объёму выплавки занимал Бахрейн, десятое место — Новая Зеландия. Какое место среди представленных стран занимала Германия?



Ответ: _____.

- В3** Середины смежных сторон прямоугольника, диагонали которого равны 2, соединены отрезками. Найдите периметр образовавшегося четырёхугольника.



Ответ: _____.

- В4** Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01, средней цены P , показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0,01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических мясорубок. Определите наибольший рейтинг представленных в таблице моделей электрических мясорубок.

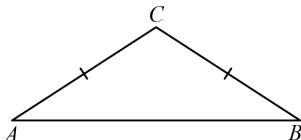
Модель мясорубки	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	5500	3	4	3
Б	4100	1	3	4
В	4200	3	0	3
Г	5300	2	1	3

Ответ: _____.

- В5** Найдите корень уравнения $\sqrt{6x + 13} = 11$.

Ответ: _____.

- B6** В треугольнике ABC угол A равен 31° , $AC = BC$. Найдите угол C . Ответ выразите в градусах.

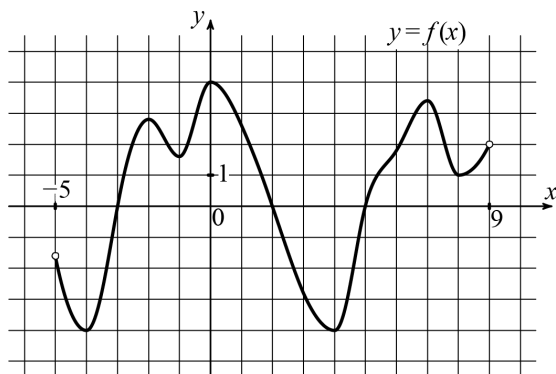


Ответ: _____.

- B7** Найдите значение выражения $-20 \operatorname{tg} 67^\circ \cdot \operatorname{tg} 23^\circ$.

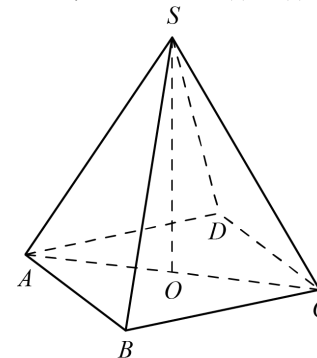
Ответ: _____.

- B8** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: _____.

- B9** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 15$, $SA = 25$. Найдите длину отрезка AC .

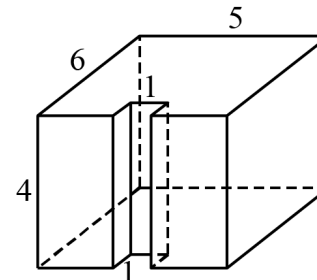


Ответ: _____.

- B10** Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шашистов, среди которых 19 участников из России, в том числе Даниил Раков. Найдите вероятность того, что в первом туре Даниил Раков будет играть с каким-либо шашистом из России.

Ответ: _____.

- B11** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

- B12** В некоторой сплошной среде источник и приёмник звукового сигнала движутся прямолинейно навстречу друг другу. Частота звука, регистрируемая приёмником, не совпадает с частотой звука, испускаемого источником. Связь между частотами выражается формулой

$$f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v},$$

где c — скорость звука в данной среде (м/с), $f_0 = 140$ Гц — частота испускаемого звука, f — частота звука, регистрируемая приёмником, а $u = 9$ м/с и $v = 7$ м/с — скорости приёмника и источника звука соответственно. При какой скорости звука в среде частота, регистрируемая приёмником, будет равна 145 Гц? Ответ выразите в метрах в секунду.

Ответ: _____.

- B13** Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали строить два одинаковых летних домика. В первой бригаде было 6 рабочих, а во второй — 10 рабочих. Через 6 дней после начала работы в первую бригаду перешли 3 рабочих из второй бригады, в результате чего оба домика были построены одновременно. Сколько дней потребовалось бригадам, чтобы закончить работу в новом составе?

Ответ: _____.

- B14** Найдите наибольшее значение функции $y = 12x - 7\sin x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $12^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3}\cos x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

- C2** В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру $B_1 C_1$ и делит его в отношении 8:3, считая от вершины B_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B , D и K .

- C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3|x+1| + \frac{1}{2}|x-2| - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2. \end{cases}$$

- C4** В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

- C5** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 - |x - a + 6| = |x + a - 6| - (a - 6)^2$ имеет единственный корень.

- C6** Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.
а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 6, 9, 12, 15.
б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?
в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Диагностическая работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

24 сентября 2013 года

11 класс

Вариант МА10104 (Запад без логарифмов)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение диагностической работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если дан верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

Район	
Город (населённый пункт)	
Школа	
Класс	
Фамилия	
Имя	
Отчество	

**Таблица тригонометрических функций для углов
от 1 до 89 градусов**

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
1	0,017	1,000	0,017	24	0,407	0,914	0,445	47	0,731	0,682	1,072	70	0,940	0,342	2,747
2	0,035	0,999	0,035	25	0,423	0,906	0,466	48	0,743	0,669	1,111	71	0,946	0,326	2,904
3	0,052	0,999	0,052	26	0,438	0,899	0,488	49	0,755	0,656	1,150	72	0,951	0,309	3,078
4	0,070	0,998	0,070	27	0,454	0,891	0,510	50	0,766	0,643	1,192	73	0,956	0,292	3,271
5	0,087	0,996	0,087	28	0,469	0,883	0,532	51	0,777	0,629	1,235	74	0,961	0,276	3,487
6	0,105	0,995	0,105	29	0,485	0,875	0,554	52	0,788	0,616	1,280	75	0,966	0,259	3,732
7	0,122	0,993	0,123	30	0,500	0,866	0,577	53	0,799	0,602	1,327	76	0,970	0,242	4,011
8	0,139	0,990	0,141	31	0,515	0,857	0,601	54	0,809	0,588	1,376	77	0,974	0,225	4,331
9	0,156	0,988	0,158	32	0,530	0,848	0,625	55	0,819	0,574	1,428	78	0,978	0,208	4,705
10	0,174	0,985	0,176	33	0,545	0,839	0,649	56	0,829	0,559	1,483	79	0,982	0,191	5,145
11	0,191	0,982	0,194	34	0,559	0,829	0,675	57	0,839	0,545	1,540	80	0,985	0,174	5,671
12	0,208	0,978	0,213	35	0,574	0,819	0,700	58	0,848	0,530	1,600	81	0,988	0,156	6,314
13	0,225	0,974	0,231	36	0,588	0,809	0,727	59	0,857	0,515	1,664	82	0,990	0,139	7,115
14	0,242	0,970	0,249	37	0,602	0,799	0,754	60	0,866	0,500	1,732	83	0,993	0,122	8,144
15	0,259	0,966	0,268	38	0,616	0,788	0,781	61	0,875	0,485	1,804	84	0,995	0,105	9,514
16	0,276	0,961	0,287	39	0,629	0,777	0,810	62	0,883	0,469	1,881	85	0,996	0,087	11,430
17	0,292	0,956	0,306	40	0,643	0,766	0,839	63	0,891	0,454	1,963	86	0,998	0,070	14,301
18	0,309	0,951	0,325	41	0,656	0,755	0,869	64	0,899	0,438	2,050	87	0,999	0,052	19,081
19	0,326	0,946	0,344	42	0,669	0,743	0,900	65	0,906	0,423	2,145	88	0,999	0,035	28,636
20	0,342	0,940	0,364	43	0,682	0,731	0,933	66	0,914	0,407	2,246	89	1,000	0,017	57,290
21	0,358	0,934	0,384	44	0,695	0,719	0,966	67	0,921	0,391	2,356				
22	0,375	0,927	0,404	45	0,707	0,707	1,000	68	0,927	0,375	2,475				
23	0,391	0,921	0,424	46	0,719	0,695	1,036	69	0,934	0,358	2,605				

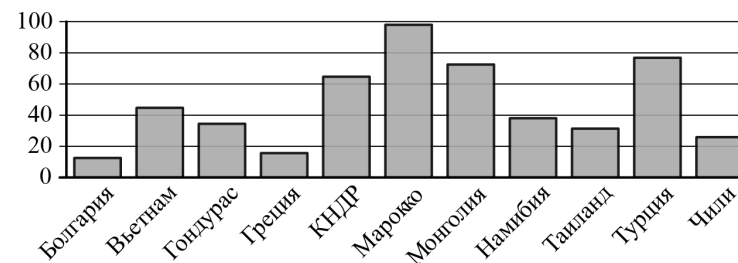
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** В квартире, где проживает Пётр, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 мая счётчик показывал расход 172 куб. м воды, а 1 июня — 177 куб. м. Какую сумму должен заплатить Пётр за холодную воду за май, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 23 руб. 10 коп.? Ответ выразите в рублях.

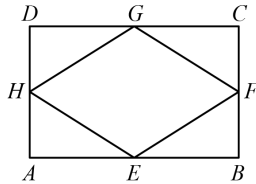
Ответ: _____.

- В2** На диаграмме показано распределение выплавки цинка в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке цинка занимало Марокко, одиннадцатое место — Болгария. Какое место занимала Намибия?



Ответ: _____.

- B3** Середины последовательных сторон прямоугольника, диагонали которого равны 2, соединены отрезками. Найдите периметр образовавшегося четырёхугольника.



Ответ: _____.

- B4** Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01, средней цены P , показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0,01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических мясорубок. Определите наибольший рейтинг представленных в таблице моделей электрических мясорубок.

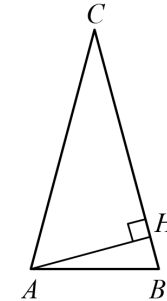
Модель мясорубки	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	5000	4	0	2
Б	3800	0	4	2
В	5800	4	0	2
Г	6000	0	0	2

Ответ: _____.

- B5** Найдите корень уравнения $\sqrt{3x + 25} = 10$.

Ответ: _____.

- B6** В равнобедренном треугольнике ABC основание AB равно 20, AH — высота, $BH = 2,1$. Пользуясь таблицами тригонометрических функций, найдите угол BAC (при необходимости результат округлите до целого числа градусов).

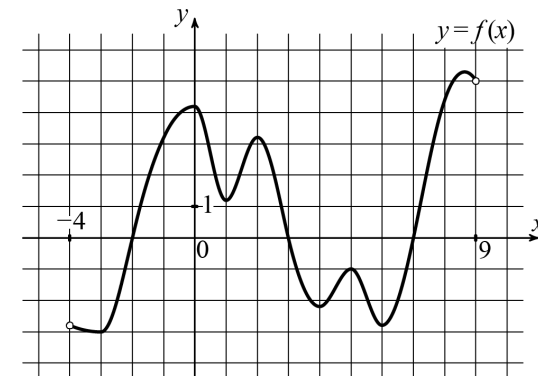


Ответ: _____.

- B7** Найдите значение выражения $46 \operatorname{tg} 7^\circ \cdot \operatorname{tg} 83^\circ$.

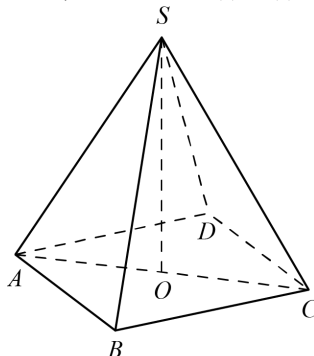
Ответ: _____.

- B8** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: _____.

- B9** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 15$, $SA = 25$. Найдите длину отрезка AC .

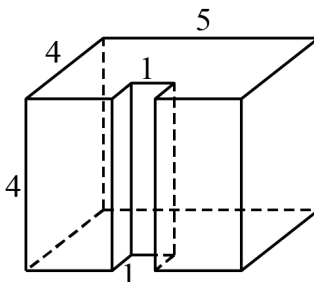


Ответ: _____.

- B10** Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 участников из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Ответ: _____.

- B11** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

- B12** В некоторой сплошной среде источник и приёмник звукового сигнала движутся прямолинейно навстречу друг другу. Частота звука, регистрируемая приёмником, не совпадает с частотой звука, испускаемого источником. Связь между частотами выражается формулой

$$f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v},$$

где c — скорость звука в данной среде (м/с), $f_0 = 140$ Гц — частота испускаемого звука, f — частота звука, регистрируемая приёмником, а $u = 9$ м/с и $v = 7$ м/с — скорости приёмника и источника звука соответственно. При какой скорости звука в среде частота, регистрируемая приёмником, будет равна 145 Гц? Ответ запишите в метрах в секунду.

Ответ: _____.

- B13** Иван и Алексей договорились встретиться в Н-ске. Они едут к Н-ску разными дорогами. Иван звонит Алексею и узнаёт, что тот находится в 168 км от Н-ска и едет с постоянной скоростью 72 км/ч. Иван в момент звонка находится в 165 км от Н-ска и ещё должен по дороге сделать 30-минутную остановку. С какой скоростью должен ехать Иван, чтобы прибыть в Н-ск одновременно с Алексеем?

Ответ: _____.

- B14** Найдите наименьшее значение функции $y = (x-3)^2(x-6) - 5$ на отрезке $[4; 10]$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

а) Решите уравнение $\left(25^{\cos x}\right)^{\sin x} = 5^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $4:5$, считая от вершины B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , O и C_1 .

C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4|x+1| + \frac{1}{2}|x-4| - \frac{5}{2}x \leq 12, \\ x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5. \end{cases}$$

C4

В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 2$ и $CD = 10$.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (1-a)^2 = |x-1+a| + |x-a+1|$$

имеет единственный корень.

C6

Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-3, -1, 2, 4, 6, 7, 9$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Диагностическая работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

24 сентября 2013 года

11 класс

Вариант МА10105 (Запад без производной)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение диагностической работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если дан верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

Райо

Город (населённый пункт)

Школ

Клас

Фамилия

Имя

Отчеств

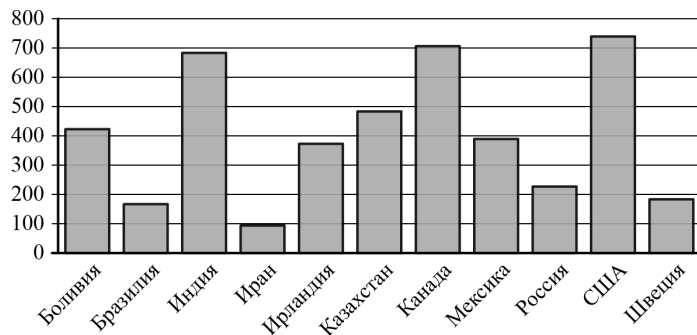
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** В квартире, где проживает Пётр, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 мая счётчик показывал расход 172 куб. м воды, а 1 июня — 177 куб. м. Какую сумму должен заплатить Пётр за холодную воду за май, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 23 руб. 10 коп.? Ответ дайте в рублях.

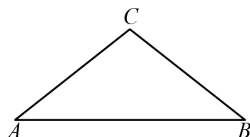
Ответ: _____.

- В2** На диаграмме показано распределение выплавки цинка в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке цинка занимали США, одиннадцатое место — Иран. Какое место занимала Боливия?



Ответ: _____.

- В3** Периметр равнобедренного треугольника равен 25. Боковая сторона равна 7. Найдите основание.



Ответ: _____.

- В4** Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01, средней цены P , показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0,01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических мясорубок. Определите наибольший рейтинг представленных в таблице моделей электрических мясорубок.

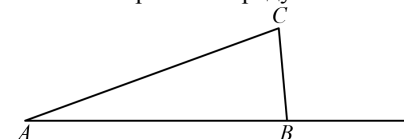
Модель мясорубки	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	5000	4	0	2
Б	3800	0	4	2
В	5800	4	0	2
Г	6000	0	0	2

Ответ: _____.

- В5** Найдите корень уравнения $\log_7(5 - x) = 1$.

Ответ: _____.

- В6** В треугольнике ABC угол A равен 14° , внешний угол при вершине B равен 91° . Найдите угол C . Ответ выразите в градусах.

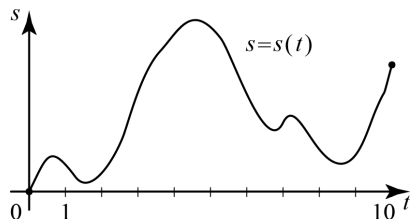


Ответ: _____.

- В7** Найдите значение выражения $46 \operatorname{tg} 7^\circ \cdot \operatorname{tg} 83^\circ$.

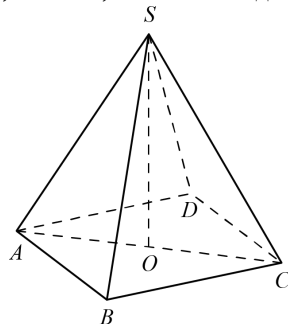
Ответ: _____.

- B8** Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 10 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



Ответ: _____.

- B9** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 12$, $SB = 15$. Найдите длину отрезка AC .

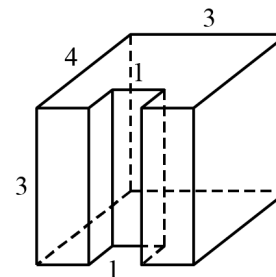


Ответ: _____.

- B10** Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 участников из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Ответ: _____.

- B11** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

- B12** В некоторой сплошной среде источник и приёмник звукового сигнала движутся прямолинейно навстречу друг другу. Частота звука, регистрируемая приёмником, не совпадает с частотой звука, испускаемого источником. Связь между частотами выражается формулой

$$f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v},$$

где c — скорость звука в данной среде (м/с), $f_0 = 160$ Гц — частота испускаемого звука, f — частота звука, регистрируемая приёмником, а $u = 8$ м/с и $v = 16$ м/с — скорости приёмника и источника звука соответственно. При какой скорости звука в среде частота, регистрируемая приёмником, будет равна 170 Гц? Ответ выразите в метрах в секунду.

Ответ: _____.

- B13** Иван и Алексей договорились встретиться в Н-ске. Они едут к Н-ску разными дорогами. Иван звонит Алексею и узнаёт, что тот находится в 168 км от Н-ска и едет с постоянной скоростью 72 км/ч. Иван в момент звонка находится в 165 км от Н-ска и ещё должен по дороге сделать 30-минутную остановку. С какой скоростью должен ехать Иван, чтобы прибыть в Н-ск одновременно с Алексеем?

Ответ: _____.

- B14** Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{9 - 16 \sin x}$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

а) Решите уравнение $12^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3} \cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

C2

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру $B_1 C_1$ и делит его в отношении 8:3, считая от вершины B_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B , D и K .

C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x} \frac{x+3}{(x-4)^2} \geq -2, \\ x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2. \end{cases}$$

C4

В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x - a + 6| = |x + a - 6| - (a - 6)^2$$

имеет единственный корень.

C6

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 6, 9, 12, 15.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Диагностическая работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

24 сентября 2013 года

11 класс

Вариант МА10106 (Запад без производной)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение диагностической работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если дан верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

Район	
Город (населённый пункт)	
Школа	
Класс	
Фамилия	
Имя	
Отчеств	

**Таблица тригонометрических функций для углов
от 1 до 89 градусов**

x	sinx	cosx	tgx	x	sinx	cosx	tgx	x	sinx	cosx	tgx	x	sinx	cosx	tgx
1	0,017	1,000	0,017	24	0,407	0,914	0,445	47	0,731	0,682	1,072	70	0,940	0,342	2,747
2	0,035	0,999	0,035	25	0,423	0,906	0,466	48	0,743	0,669	1,111	71	0,946	0,326	2,904
3	0,052	0,999	0,052	26	0,438	0,899	0,488	49	0,755	0,656	1,150	72	0,951	0,309	3,078
4	0,070	0,998	0,070	27	0,454	0,891	0,510	50	0,766	0,643	1,192	73	0,956	0,292	3,271
5	0,087	0,996	0,087	28	0,469	0,883	0,532	51	0,777	0,629	1,235	74	0,961	0,276	3,487
6	0,105	0,995	0,105	29	0,485	0,875	0,554	52	0,788	0,616	1,280	75	0,966	0,259	3,732
7	0,122	0,993	0,123	30	0,500	0,866	0,577	53	0,799	0,602	1,327	76	0,970	0,242	4,011
8	0,139	0,990	0,141	31	0,515	0,857	0,601	54	0,809	0,588	1,376	77	0,974	0,225	4,331
9	0,156	0,988	0,158	32	0,530	0,848	0,625	55	0,819	0,574	1,428	78	0,978	0,208	4,705
10	0,174	0,985	0,176	33	0,545	0,839	0,649	56	0,829	0,559	1,483	79	0,982	0,191	5,145
11	0,191	0,982	0,194	34	0,559	0,829	0,675	57	0,839	0,545	1,540	80	0,985	0,174	5,671
12	0,208	0,978	0,213	35	0,574	0,819	0,700	58	0,848	0,530	1,600	81	0,988	0,156	6,314
13	0,225	0,974	0,231	36	0,588	0,809	0,727	59	0,857	0,515	1,664	82	0,990	0,139	7,115
14	0,242	0,970	0,249	37	0,602	0,799	0,754	60	0,866	0,500	1,732	83	0,993	0,122	8,144
15	0,259	0,966	0,268	38	0,616	0,788	0,781	61	0,875	0,485	1,804	84	0,995	0,105	9,514
16	0,276	0,961	0,287	39	0,629	0,777	0,810	62	0,883	0,469	1,881	85	0,996	0,087	11,430
17	0,292	0,956	0,306	40	0,643	0,766	0,839	63	0,891	0,454	1,963	86	0,998	0,070	14,301
18	0,309	0,951	0,325	41	0,656	0,755	0,869	64	0,899	0,438	2,050	87	0,999	0,052	19,081
19	0,326	0,946	0,344	42	0,669	0,743	0,900	65	0,906	0,423	2,145	88	0,999	0,035	28,636
20	0,342	0,940	0,364	43	0,682	0,731	0,933	66	0,914	0,407	2,246	89	1,000	0,017	57,290
21	0,358	0,934	0,384	44	0,695	0,719	0,966	67	0,921	0,391	2,356				
22	0,375	0,927	0,404	45	0,707	0,707	1,000	68	0,927	0,375	2,475				
23	0,391	0,921	0,424	46	0,719	0,695	1,036	69	0,934	0,358	2,605				

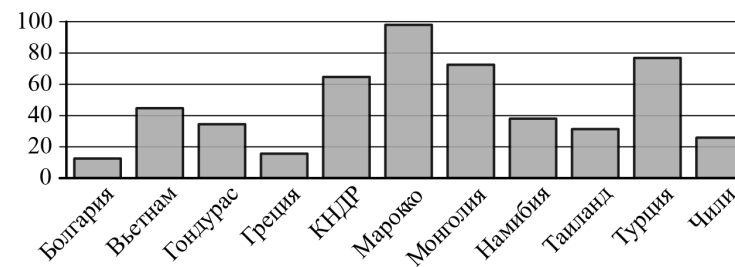
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** Для ремонта квартиры требуется 23 рулона обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 4 рулона?

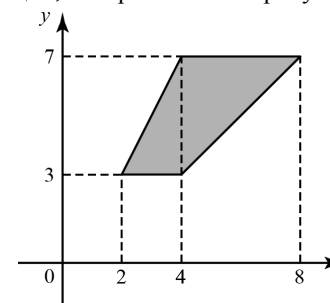
Ответ: _____.

- В2** На диаграмме показано распределение выплавки цинка в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке цинка занимало Марокко, одиннадцатое место — Болгария. Какое место занимала Намибия?



Ответ: _____.

- В3** Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ: _____.

- В4** Керамическая плитка одной и той же торговой марки выпускается трёх разных размеров. Плитки упакованы в пачки. Пользуясь данными таблицы, определите, в каком случае цена одного квадратного метра плитки будет наименьшей. В ответ запишите найденную наименьшую цену квадратного метра в рублях.

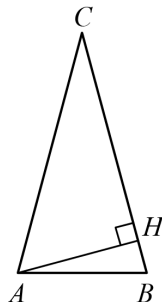
Размер плитки (см)	Количество плиток в пачке	Цена пачки
20×20	25	655 р.
20×30	17	663 р.
30×30	11	653 р. 40 к.

Ответ: _____.

- В5** Найдите корень уравнения $\log_3(-5-x) = 2$.

Ответ: _____.

- В6** В равнобедренном треугольнике ABC основание AB равно 20, AH — высота, $BH = 2,1$. Пользуясь таблицами тригонометрических функций, найдите угол BAC (при необходимости результат округлите до целого числа градусов).

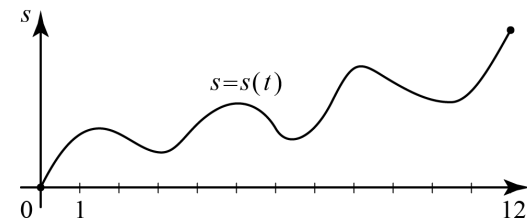


Ответ: _____.

- В7** Найдите значение выражения $28 \operatorname{tg} 46^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ$.

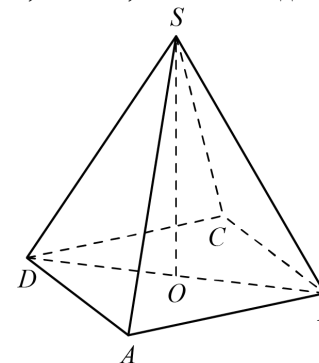
Ответ: _____.

- В8** Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



Ответ: _____.

- В9** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 12$, $SA = 13$. Найдите длину отрезка BD .

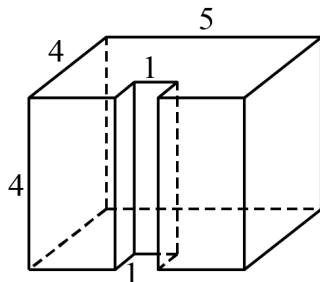


Ответ: _____.

- В10** Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 теннисистов, среди которых 20 участников из России, в том числе Максим Плотвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Максим Плотвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Ответ: _____.

- B11** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

- B12** В некоторой сплошной среде источник и приёмник звукового сигнала движутся прямолинейно навстречу друг другу. Частота звука, регистрируемая приёмником, не совпадает с частотой звука, испускаемого источником. Связь между частотами выражается формулой

$$f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v},$$

где c — скорость звука в данной среде (м/с), $f_0 = 170$ Гц — частота испускаемого звука, f — частота звука, регистрируемая приёмником, а $u = 2$ м/с и $v = 17$ м/с — скорости приёмника и источника звука соответственно. При какой скорости звука в среде частота, регистрируемая приёмником, будет равна 180 Гц? Ответ выразите в метрах в секунду.

Ответ: _____.

- B13** Три одинаковые рубашки дешевле куртки на 10%. На сколько процентов четыре такие же рубашки дороже куртки?

Ответ: _____.

- B14** Найдите наименьшее значение функции $y = 3^{x^2 - 6x + 14}$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

а) Решите уравнение $\left(25^{\cos x}\right)^{\sin x} = 5^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении 4:5, считая от вершины B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , O и C_1 .

C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4, \\ x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5. \end{cases}$$

C4

В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 2$ и $CD = 10$.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (1-a)^2 = |x-1+a| + |x-a+1|$$

имеет единственный корень.

C6

Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

- а) На доске выписан набор $-3, -1, 2, 4, 6, 7, 9$. Какие числа были задуманы?
- б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
- в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Диагностическая работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

24 сентября 2013 года

11 класс

Вариант МА10107 (Запад без производной)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение диагностической работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если дан верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

Район. _____
Город (населённый пункт) _____
Школа _____
Класс _____
Фамилия _____
Имя _____
Отчество _____

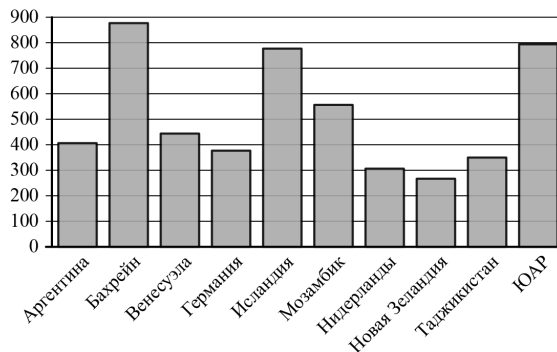
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** В розницу один номер еженедельного журнала «Репортаж» стоит 27 руб., а полугодовая подписка на этот журнал стоит 510 руб. За полгода выходит 25 номеров журнала. Сколько рублей сэкономит г-н Иванов за полгода, если не будет покупать каждый номер журнала отдельно, а оформит подписку?

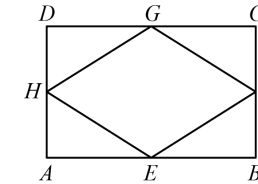
Ответ: _____.

- В2** На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по объёму выплавки занимал Бахрейн, десятое место — Новая Зеландия. Какое место среди представленных стран занимала Германия?



Ответ: _____.

- В3** Середины смежных сторон прямоугольника, диагонали которого равны 2, соединены отрезками. Найдите периметр образовавшегося четырёхугольника.



Ответ: _____.

- В4** Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01, средней цены P , показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0,01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических мясорубок. Определите наибольший рейтинг представленных в таблице моделей электрических мясорубок.

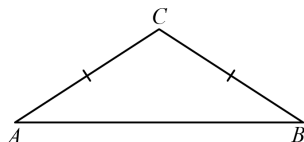
Модель мясорубки	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	5500	3	4	3
Б	4100	1	3	4
В	4200	3	0	3
Г	5300	2	1	3

Ответ: _____.

- В5** Найдите корень уравнения $\log_4(5 - x) = 1$.

Ответ: _____.

- В6** В треугольнике ABC угол A равен 31° , $AC = BC$. Найдите угол C . Ответ выразите в градусах.

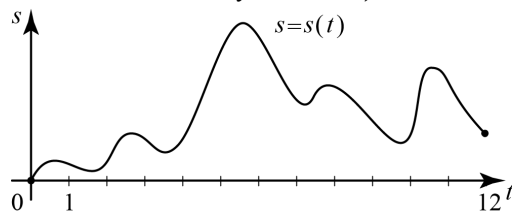


Ответ: _____.

- В7** Найдите значение выражения $-20 \operatorname{tg} 67^\circ \cdot \operatorname{tg} 23^\circ$.

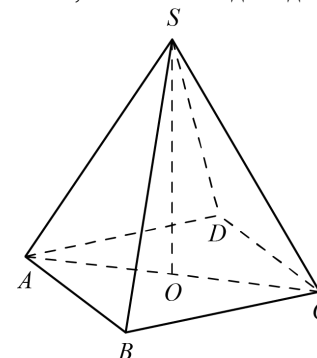
Ответ: _____.

- В8** Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



Ответ: _____.

- В9** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 15$, $SA = 25$. Найдите длину отрезка AC .

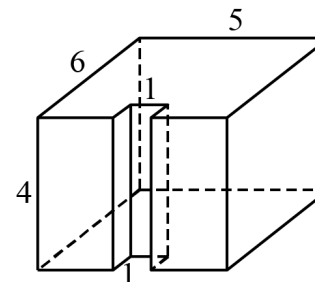


Ответ: _____.

- В10** Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шашкистов, среди которых 19 участников из России, в том числе Даниил Раков. Найдите вероятность того, что в первом туре Даниил Раков будет играть с каким-либо шашкистом из России.

Ответ: _____.

- В11** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

- B12** В некоторой сплошной среде источник и приёмник звукового сигнала движутся прямолинейно навстречу друг другу. Частота звука, регистрируемая приёмником, не совпадает с частотой звука, испускаемого источником. Связь между частотами выражается формулой

$$f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v},$$

где c — скорость звука в данной среде (м/с), $f_0 = 140$ Гц — частота испускаемого звука, f — частота звука, регистрируемая приёмником, а $u = 9$ м/с и $v = 7$ м/с — скорости приёмника и источника звука соответственно. При какой скорости звука в среде частота, регистрируемая приёмником, будет равна 145 Гц? Ответ выразите в метрах в секунду.

Ответ: _____.

- B13** Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали строить два одинаковых летних домика. В первой бригаде было 6 рабочих, а во второй — 10 рабочих. Через 6 дней после начала работы в первую бригаду перешли 3 рабочих из второй бригады, в результате чего оба домика были построены одновременно. Сколько дней потребовалось бригадам, чтобы закончить работу в новом составе?

Ответ: _____.

- B14** Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{16 + 9 \cos x}$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $12^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3} \cos x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

- C2** В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру $B_1 C_1$ и делит его в отношении 8:3, считая от вершины B_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B , D и K .

- C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x} \frac{x+3}{(x-4)^2} \geq -2, \\ x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2. \end{cases}$$

- C4** В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

- C5** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x - a + 6| = |x + a - 6| - (a - 6)^2$$

имеет единственный корень.

- C6** Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.
а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 6, 9, 12, 15.
б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?
в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Диагностическая работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

24 сентября 2013 года

11 класс

Вариант МА10108 (Запад без производной)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение диагностической работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если дан верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

Район	
Город (населённый пункт)	
Школа	
Класс	
Фамилия	
Имя	
Отчество	

**Таблица тригонометрических функций для углов
от 1 до 89 градусов**

x	sinx	cosx	tgx	x	sinx	cosx	tgx	x	sinx	cosx	tgx	x	sinx	cosx	tgx
1	0,017	1,000	0,017	24	0,407	0,914	0,445	47	0,731	0,682	1,072	70	0,940	0,342	2,747
2	0,035	0,999	0,035	25	0,423	0,906	0,466	48	0,743	0,669	1,111	71	0,946	0,326	2,904
3	0,052	0,999	0,052	26	0,438	0,899	0,488	49	0,755	0,656	1,150	72	0,951	0,309	3,078
4	0,070	0,998	0,070	27	0,454	0,891	0,510	50	0,766	0,643	1,192	73	0,956	0,292	3,271
5	0,087	0,996	0,087	28	0,469	0,883	0,532	51	0,777	0,629	1,235	74	0,961	0,276	3,487
6	0,105	0,995	0,105	29	0,485	0,875	0,554	52	0,788	0,616	1,280	75	0,966	0,259	3,732
7	0,122	0,993	0,123	30	0,500	0,866	0,577	53	0,799	0,602	1,327	76	0,970	0,242	4,011
8	0,139	0,990	0,141	31	0,515	0,857	0,601	54	0,809	0,588	1,376	77	0,974	0,225	4,331
9	0,156	0,988	0,158	32	0,530	0,848	0,625	55	0,819	0,574	1,428	78	0,978	0,208	4,705
10	0,174	0,985	0,176	33	0,545	0,839	0,649	56	0,829	0,559	1,483	79	0,982	0,191	5,145
11	0,191	0,982	0,194	34	0,559	0,829	0,675	57	0,839	0,545	1,540	80	0,985	0,174	5,671
12	0,208	0,978	0,213	35	0,574	0,819	0,700	58	0,848	0,530	1,600	81	0,988	0,156	6,314
13	0,225	0,974	0,231	36	0,588	0,809	0,727	59	0,857	0,515	1,664	82	0,990	0,139	7,115
14	0,242	0,970	0,249	37	0,602	0,799	0,754	60	0,866	0,500	1,732	83	0,993	0,122	8,144
15	0,259	0,966	0,268	38	0,616	0,788	0,781	61	0,875	0,485	1,804	84	0,995	0,105	9,514
16	0,276	0,961	0,287	39	0,629	0,777	0,810	62	0,883	0,469	1,881	85	0,996	0,087	11,430
17	0,292	0,956	0,306	40	0,643	0,766	0,839	63	0,891	0,454	1,963	86	0,998	0,070	14,301
18	0,309	0,951	0,325	41	0,656	0,755	0,869	64	0,899	0,438	2,050	87	0,999	0,052	19,081
19	0,326	0,946	0,344	42	0,669	0,743	0,900	65	0,906	0,423	2,145	88	0,999	0,035	28,636
20	0,342	0,940	0,364	43	0,682	0,731	0,933	66	0,914	0,407	2,246	89	1,000	0,017	57,290
21	0,358	0,934	0,384	44	0,695	0,719	0,966	67	0,921	0,391	2,356				
22	0,375	0,927	0,404	45	0,707	0,707	1,000	68	0,927	0,375	2,475				
23	0,391	0,921	0,424	46	0,719	0,695	1,036	69	0,934	0,358	2,605				

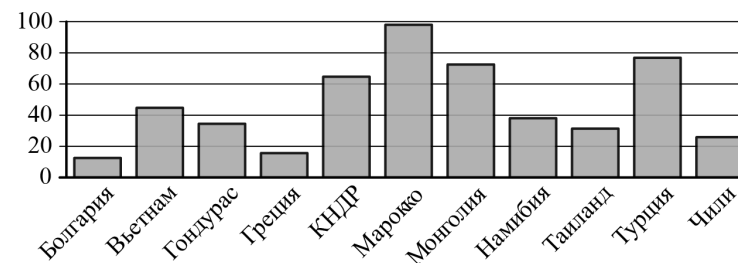
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** В квартире, где проживает Пётр, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 мая счётчик показывал расход 172 куб. м воды, а 1 июня — 177 куб. м. Какую сумму должен заплатить Пётр за холодную воду за май, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 23 руб. 10 коп.? Ответ выразите в рублях.

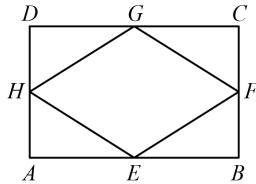
Ответ: _____.

- В2** На диаграмме показано распределение выплавки цинка в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке цинка занимало Марокко, одиннадцатое место — Болгария. Какое место занимала Намибия?



Ответ: _____.

- B3** Середины последовательных сторон прямоугольника, диагонали которого равны 2, соединены отрезками. Найдите периметр образовавшегося четырёхугольника.



Ответ: _____.

- B4** Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01, средней цены P , показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0,01P.$$

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических мясорубок. Определите наибольший рейтинг представленных в таблице моделей электрических мясорубок.

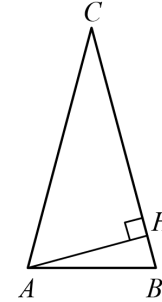
Модель мясорубки	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	5000	4	0	2
Б	3800	0	4	2
В	5800	4	0	2
Г	6000	0	0	2

Ответ: _____.

- B5** Найдите корень уравнения $\log_3(-5-x) = 2$.

Ответ: _____.

- B6** В равнобедренном треугольнике ABC основание AB равно 20, AH — высота, $BH = 2,1$. Пользуясь таблицами тригонометрических функций, найдите угол BAC (при необходимости результат округлите до целого числа градусов).

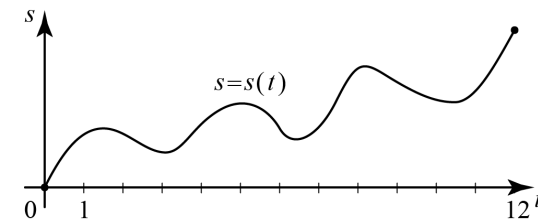


Ответ: _____.

- B7** Найдите значение выражения $46 \operatorname{tg} 7^\circ \cdot \operatorname{tg} 83^\circ$.

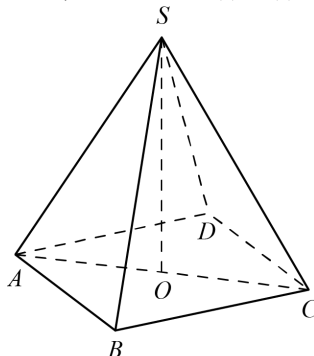
Ответ: _____.

- B8** Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитываются).



Ответ: _____.

- B9** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 15$, $SA = 25$. Найдите длину отрезка AC .

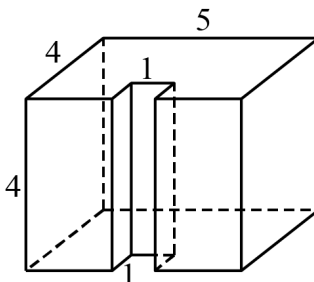


Ответ: _____.

- B10** Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 участников из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Ответ: _____.

- B11** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

- B12** В некоторой сплошной среде источник и приёмник звукового сигнала движутся прямолинейно навстречу друг другу. Частота звука, регистрируемая приёмником, не совпадает с частотой звука, испускаемого источником. Связь между частотами выражается формулой

$$f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v},$$

где c — скорость звука в данной среде (м/с), $f_0 = 140$ Гц — частота испускаемого звука, f — частота звука, регистрируемая приёмником, а $u = 9$ м/с и $v = 7$ м/с — скорости приёмника и источника звука соответственно. При какой скорости звука в среде частота, регистрируемая приёмником, будет равна 145 Гц? Ответ выразите в метрах в секунду.

Ответ: _____.

- B13** Иван и Алексей договорились встретиться в Н-ске. Они едут к Н-ску разными дорогами. Иван звонит Алексею и узнаёт, что тот находится в 168 км от Н-ска и едет с постоянной скоростью 72 км/ч. Иван в момент звонка находится в 165 км от Н-ска и ещё должен по дороге сделать 30-минутную остановку. С какой скоростью должен ехать Иван, чтобы прибыть в Н-ск одновременно с Алексеем?

Ответ: _____.

- B14** Найдите наименьшее значение функции $y = 3^{x^2-6x+14}$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $(25^{\cos x})^{\sin x} = 5^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

- C2** В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $4:5$, считая от вершины B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , O и C_1 .

- C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4, \\ x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5. \end{cases}$$

- C4** В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 2$ и $CD = 10$.

- C5** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (1-a)^2 = |x-1+a| + |x-a+1|$$

имеет единственный корень.

- C6** Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.
а) На доске выписан набор $-3, -1, 2, 4, 6, 7, 9$. Какие числа были задуманы?
б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Диагностическая работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

24 сентября 2013 года

11 класс

Вариант МА10109 (Восток без логарифмов)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение диагностической работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если дан верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

Район

Город (населённый пункт)

Школа

Класс

Фамилия

Имя

Отчество

**Таблица тригонометрических функций для углов
от 1 до 89 градусов**

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
1	0,017	1,000	0,017	24	0,407	0,914	0,445	47	0,731	0,682	1,072	70	0,940	0,342	2,747
2	0,035	0,999	0,035	25	0,423	0,906	0,466	48	0,743	0,669	1,111	71	0,946	0,326	2,904
3	0,052	0,999	0,052	26	0,438	0,899	0,488	49	0,755	0,656	1,150	72	0,951	0,309	3,078
4	0,070	0,998	0,070	27	0,454	0,891	0,510	50	0,766	0,643	1,192	73	0,956	0,292	3,271
5	0,087	0,996	0,087	28	0,469	0,883	0,532	51	0,777	0,629	1,235	74	0,961	0,276	3,487
6	0,105	0,995	0,105	29	0,485	0,875	0,554	52	0,788	0,616	1,280	75	0,966	0,259	3,732
7	0,122	0,993	0,123	30	0,500	0,866	0,577	53	0,799	0,602	1,327	76	0,970	0,242	4,011
8	0,139	0,990	0,141	31	0,515	0,857	0,601	54	0,809	0,588	1,376	77	0,974	0,225	4,331
9	0,156	0,988	0,158	32	0,530	0,848	0,625	55	0,819	0,574	1,428	78	0,978	0,208	4,705
10	0,174	0,985	0,176	33	0,545	0,839	0,649	56	0,829	0,559	1,483	79	0,982	0,191	5,145
11	0,191	0,982	0,194	34	0,559	0,829	0,675	57	0,839	0,545	1,540	80	0,985	0,174	5,671
12	0,208	0,978	0,213	35	0,574	0,819	0,700	58	0,848	0,530	1,600	81	0,988	0,156	6,314
13	0,225	0,974	0,231	36	0,588	0,809	0,727	59	0,857	0,515	1,664	82	0,990	0,139	7,115
14	0,242	0,970	0,249	37	0,602	0,799	0,754	60	0,866	0,500	1,732	83	0,993	0,122	8,144
15	0,259	0,966	0,268	38	0,616	0,788	0,781	61	0,875	0,485	1,804	84	0,995	0,105	9,514
16	0,276	0,961	0,287	39	0,629	0,777	0,810	62	0,883	0,469	1,881	85	0,996	0,087	11,430
17	0,292	0,956	0,306	40	0,643	0,766	0,839	63	0,891	0,454	1,963	86	0,998	0,070	14,301
18	0,309	0,951	0,325	41	0,656	0,755	0,869	64	0,899	0,438	2,050	87	0,999	0,052	19,081
19	0,326	0,946	0,344	42	0,669	0,743	0,900	65	0,906	0,423	2,145	88	0,999	0,035	28,636
20	0,342	0,940	0,364	43	0,682	0,731	0,933	66	0,914	0,407	2,246	89	1,000	0,017	57,290
21	0,358	0,934	0,384	44	0,695	0,719	0,966	67	0,921	0,391	2,356				
22	0,375	0,927	0,404	45	0,707	0,707	1,000	68	0,927	0,375	2,475				
23	0,391	0,921	0,424	46	0,719	0,695	1,036	69	0,934	0,358	2,605				

Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

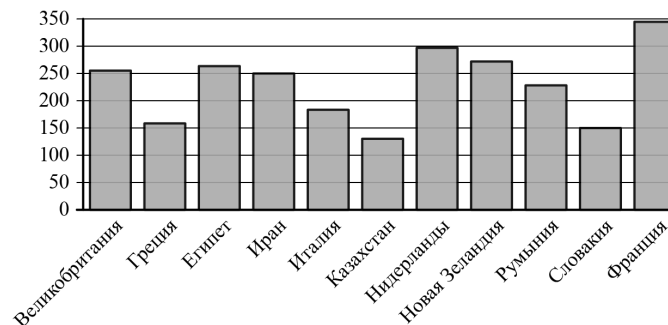
В1

1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 30 копеек. Счётчик электроэнергии 1 марта показывал 53 073 киловатт-часа, а 1 апреля показывал 53 255 киловатт-часов. Какую сумму нужно заплатить за электроэнергию за март? Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____.

В2

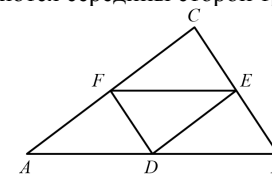
На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по объёму выплавки занимала Франция, одиннадцатое место — Казахстан. Какое место среди представленных стран занимала Румыния?



Ответ: _____.

В3

Периметр треугольника ABC равен 6. Найдите периметр треугольника FDE , вершинами которого являются середины сторон треугольника ABC .



Ответ: _____.

- B4** Для группы иностранных гостей требуется купить путеводители в количестве 10 штук. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Условия покупки и доставки даны в таблице. Определите, в каком из магазинов общая сумма покупки с учётом доставки будет наименьшей. В ответ напишите наименьшую сумму в рублях.

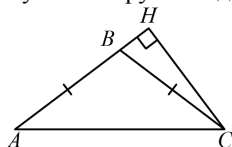
Интернет-магазин	Цена одного путеводителя (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	374	200	Нет
Б	370	300	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 4000 руб.
В	395	250	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 3500 руб.

Ответ: _____.

- B5** Найдите корень уравнения $\sqrt{12+2x} = 4$.

Ответ: _____.

- B6** В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 50, высота CH равна 30,1. Пользуясь таблицей тригонометрических функций, найдите угол ACB (при необходимости результат округлите до целого числа градусов).

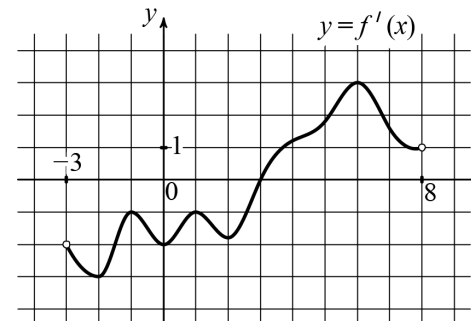


Ответ: _____.

- B7** Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

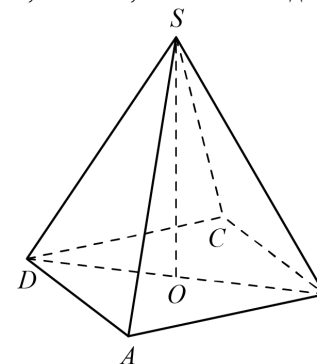
Ответ: _____.

- B8** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: _____.

- B9** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 20$, $SD = 25$. Найдите длину отрезка BD .

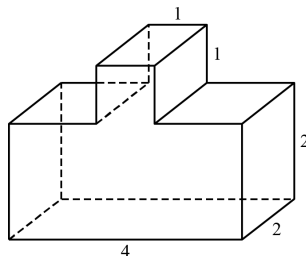


Ответ: _____.

- B10** В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в 12 из них встречается вопрос по теме «Членистоногие». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопроса по теме «Членистоногие».

Ответ: _____.

- В11** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

- В12** Сонар подводного аппарата испускает ультразвуковой сигнал частотой 198 МГц. Отражённый от дна океана сигнал возвращается и регистрируется приёмником. Скорость погружения аппарата v (м/с) и частоты испускаемого и регистрируемого сигналов связаны соотношением

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота исходящего сигнала (МГц), f — частота отражённого сигнала, регистрируемая приёмником (МГц). Найдите частоту отражённого сигнала при скорости погружения 15 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: _____.

- В13** Клиент А. сделал вклад в банке в размере 6200 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал Б. Ещё ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 682 рубля больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

Ответ: _____.

- В14** Найдите наименьшее значение функции $y = (x+6)^2(x+3) + 11$ на отрезке $[-5; 5]$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1

а) Решите уравнение $12^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3} \cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

С2

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру $B_1 C_1$ и делит его в отношении 8:3, считая от вершины B_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B , D и K .

С3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3|x+1| + \frac{1}{2}|x-2| - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2. \end{cases}$$

С4

В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

С5

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x - a + 6| = |x + a - 6| - (a - 6)^2$$

имеет единственный корень.

C6

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 6, 9, 12, 15.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Диагностическая работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

24 сентября 2013 года

11 класс

Вариант МА10110 (Восток без логарифмов)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение диагностической работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если дан верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

Район

Город (населённый пункт)

Школа

Клас

Фамилия

Имя

Отчество

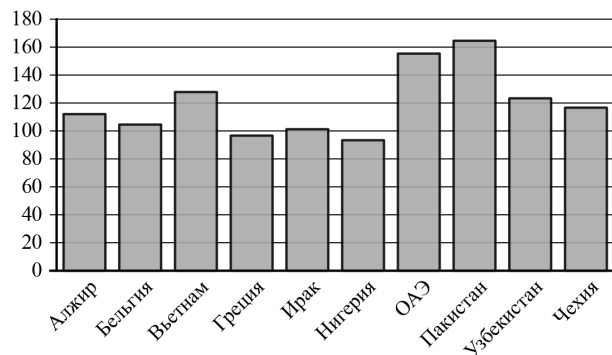
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** По тарифному плану «Просто как день» со счёта абонента компания сотовой связи вечером каждого дня снимает 21 руб. Если на счёту осталось меньше 21 руб., то на следующий день номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счёту 700 руб. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёта?

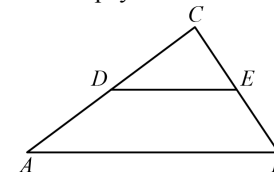
Ответ: _____.

- В2** На диаграмме показано распределение выбросов углекислого газа в атмосферу в 10 странах мира (в миллионах тонн) за 2008 год. Среди представленных стран первое место по объёму выбросов занимал Пакистан, десятое место — Нигерия. Какое место среди представленных стран занимала Чехия?



Ответ: _____.

- В3** Периметр треугольника ABC равен 12. Найдите периметр треугольника CDE , где DE — средняя линия треугольника ABC .



Ответ: _____.

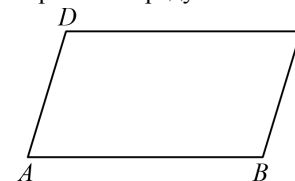
- В4** Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок: либо скидку 15% на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, либо скидку 10% на звонки в другие регионы, либо скидку 5% на услуги мобильного интернета. Клиент посмотрел распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 600 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 800 рублей на звонки в другие регионы и 700 рублей на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же, и исходя из этого выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Сколько рублей составит эта скидка, если звонки и пользование Интернетом сохраняются в прежнем объёме?

Ответ: _____.

- В5** Найдите корень уравнения $\sqrt{20+x} = 5$.

Ответ: _____.

- В6** Один угол параллелограмма больше другого на 14° . Найдите больший угол параллелограмма. Ответ выразите в градусах.



Ответ: _____.

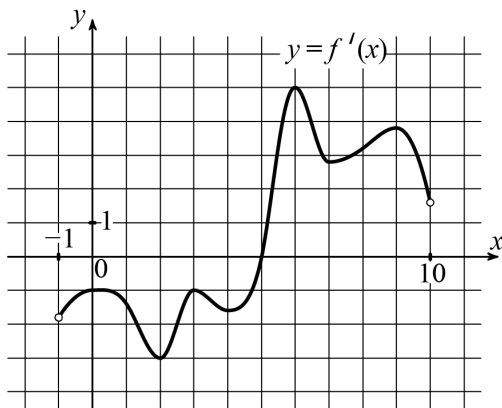
B7

Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{5\sqrt{29}}{29}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Ответ: _____.

B8

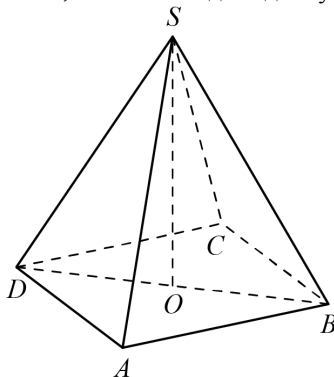
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1; 10)$. В какой точке отрезка $[0; 5]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: _____.

B9

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 4$, $SD = 5$. Найдите длину отрезка BD .



Ответ: _____.

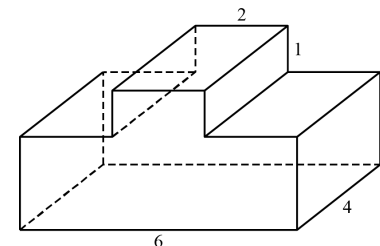
B10

В сборнике билетов по истории всего 25 билетов, в 18 из них встречается вопрос по теме «Царствование Александра Второго». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не доста-**нется вопроса по теме «Царствование Александра Второго».

Ответ: _____.

B11

Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

B12

Сонар подводного аппарата испускает ультразвуковой сигнал частотой 249 МГц. Отражённый от дна океана сигнал возвращается и регистрируется приёмником. Скорость погружения аппарата v (м/с) и частоты испускаемого и регистрируемого сигналов связаны соотношением

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота исходящего сигнала (МГц), f — частота отражённого сигнала, регистрируемая приёмником (МГц). Найдите частоту отражённого сигнала при скорости погружения 6 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: _____.

B13

Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 10 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

Ответ: _____.

B14

Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 49}{x}$ на отрезке $[-19; -1]$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

а) Решите уравнение $\left(25^{\cos x}\right)^{\sin x} = 5^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $4:5$, считая от вершины B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , O и C_1 .

C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4|x+1| + \frac{1}{2}|x-4| - \frac{5}{2}x \leq 12, \\ x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5. \end{cases}$$

C4

В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 2$ и $CD = 10$.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (1-a)^2 = |x-1+a| + |x-a+1|$$

имеет единственный корень.

C6

Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-3, -1, 2, 4, 6, 7, 9$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Диагностическая работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

24 сентября 2013 года

11 класс

Вариант МА10111 (Восток без логарифмов)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение диагностической работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если дан верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

Район	
Город (населённый пункт)	
Школа	
Класс	
Фамилия	
Имя	
Отчество	

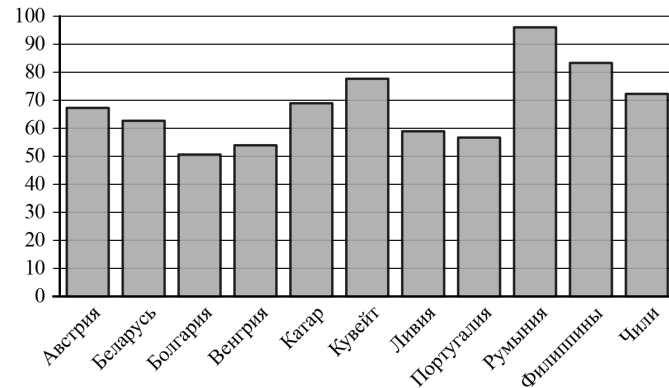
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** В магазине «Сделай сам» мебель продаётся в разобранном виде. Покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 15% от стоимости купленной мебели. Шкаф стоит 2000 рублей. Во сколько рублей обойдётся покупка этого шкафа вместе со сборкой?

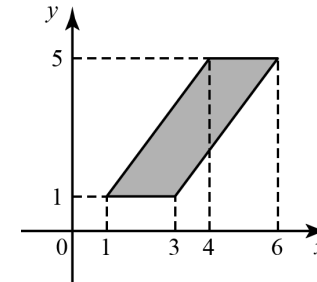
Ответ: _____.

- В2** На диаграмме показано распределение выбросов углекислого газа в атмосферу в 11 странах мира (в миллионах тонн) за 2008 год. Среди представленных стран первое место по объёму выбросов занимала Румыния, одиннадцатое место — Болгария. Какое место среди представленных стран занимала Венгрия?



Ответ: _____.

- В3** Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



Ответ: _____.

- В4** В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона (руб.)	Первоначальный взнос (в процентах от цены)	Срок кредита (мес.)	Сумма ежемесячного платежа (руб.)
Эпсилон	10 000	15	6	1620
Дельта	10 500	10	12	850
Омикрон	9 500	20	12	780

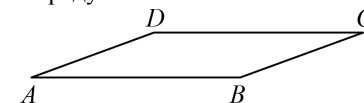
Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дороже всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наибольшую сумму в рублях.

Ответ: _____.

- В5** Найдите корень уравнения $\sqrt{21+3x} = 3$.

Ответ: _____.

- В6** Сумма двух углов параллелограмма равна 24° . Найдите один из оставшихся углов. Ответ выразите в градусах.



Ответ: _____.

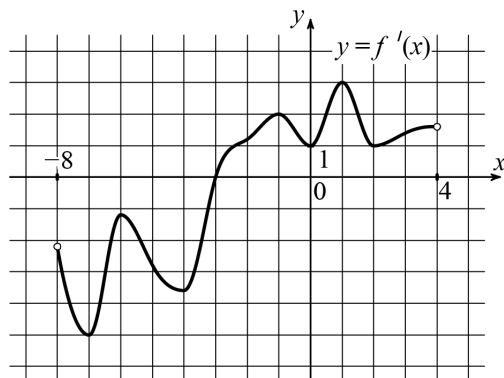
В7

Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Ответ: _____.

В8

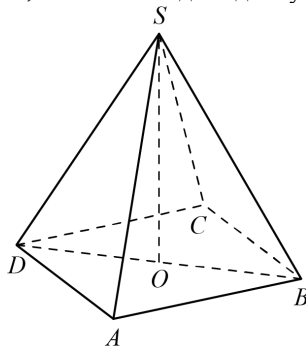
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 4)$. В какой точке отрезка $[-3; 1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: _____.

В9

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 6$, $SA = 10$. Найдите длину отрезка BD .



Ответ: _____.

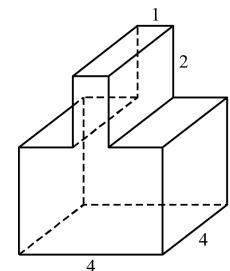
В10

В сборнике билетов по географии всего 50 билетов, в 8 из них встречается вопрос по теме «Страны Африки». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопроса по теме «Страны Африки».

Ответ: _____.

В11

Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

В12

Сонар подводного аппарата испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Отражённый от дна океана сигнал возвращается и регистрируется приёмником. Скорость погружения аппарата v (м/с) и частоты испускаемого и регистрируемого сигналов связаны соотношением

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота исходящего сигнала (МГц), f — частота отражённого сигнала, регистрируемая приёмником (МГц). Найдите частоту отражённого сигнала при скорости погружения 2 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: _____.

В13

Два велосипедиста едут по круговой дорожке длиной 1,2 км каждый со своей постоянной скоростью. Они выехали одновременно. Первые 5 кругов первый велосипедист проехал на 9 минут быстрее, чем второй, а еще через 27 минут поравнялся со вторым. Найдите скорость второго велосипедиста. Ответ выразите в км/ч.

Ответ: _____.

- B14** Найдите наименьшее значение функции $y = (x-6)^2(x+6) - 9$ на отрезке $[2; 13]$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $12^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3}\cos x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

- C2** В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру $B_1 C_1$ и делит его в отношении $8:3$, считая от вершины B_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B , D и K .

- C3** Решите систему неравенств
- $$\begin{cases} 3|x+1| + \frac{1}{2}|x-2| - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2. \end{cases}$$

- C4** В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

- C5** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение
- $$x^2 - |x - a + 6| = |x + a - 6| - (a - 6)^2$$
- имеет единственный корень.

- C6** Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.
а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 6, 9, 12, 15.
б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?
в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Диагностическая работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

24 сентября 2013 года

11 класс

Вариант МА10112 (Восток без логарифмов)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение диагностической работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если дан верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

Район

Город (населённый пункт)

Школа

Клас

Фамилия

Имя

Отчество

**Таблица тригонометрических функций для углов
от 1 до 89 градусов**

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
1	0,017	1,000	0,017	24	0,407	0,914	0,445	47	0,731	0,682	1,072	70	0,940	0,342	2,747
2	0,035	0,999	0,035	25	0,423	0,906	0,466	48	0,743	0,669	1,111	71	0,946	0,326	2,904
3	0,052	0,999	0,052	26	0,438	0,899	0,488	49	0,755	0,656	1,150	72	0,951	0,309	3,078
4	0,070	0,998	0,070	27	0,454	0,891	0,510	50	0,766	0,643	1,192	73	0,956	0,292	3,271
5	0,087	0,996	0,087	28	0,469	0,883	0,532	51	0,777	0,629	1,235	74	0,961	0,276	3,487
6	0,105	0,995	0,105	29	0,485	0,875	0,554	52	0,788	0,616	1,280	75	0,966	0,259	3,732
7	0,122	0,993	0,123	30	0,500	0,866	0,577	53	0,799	0,602	1,327	76	0,970	0,242	4,011
8	0,139	0,990	0,141	31	0,515	0,857	0,601	54	0,809	0,588	1,376	77	0,974	0,225	4,331
9	0,156	0,988	0,158	32	0,530	0,848	0,625	55	0,819	0,574	1,428	78	0,978	0,208	4,705
10	0,174	0,985	0,176	33	0,545	0,839	0,649	56	0,829	0,559	1,483	79	0,982	0,191	5,145
11	0,191	0,982	0,194	34	0,559	0,829	0,675	57	0,839	0,545	1,540	80	0,985	0,174	5,671
12	0,208	0,978	0,213	35	0,574	0,819	0,700	58	0,848	0,530	1,600	81	0,988	0,156	6,314
13	0,225	0,974	0,231	36	0,588	0,809	0,727	59	0,857	0,515	1,664	82	0,990	0,139	7,115
14	0,242	0,970	0,249	37	0,602	0,799	0,754	60	0,866	0,500	1,732	83	0,993	0,122	8,144
15	0,259	0,966	0,268	38	0,616	0,788	0,781	61	0,875	0,485	1,804	84	0,995	0,105	9,514
16	0,276	0,961	0,287	39	0,629	0,777	0,810	62	0,883	0,469	1,881	85	0,996	0,087	11,430
17	0,292	0,956	0,306	40	0,643	0,766	0,839	63	0,891	0,454	1,963	86	0,998	0,070	14,301
18	0,309	0,951	0,325	41	0,656	0,755	0,869	64	0,899	0,438	2,050	87	0,999	0,052	19,081
19	0,326	0,946	0,344	42	0,669	0,743	0,900	65	0,906	0,423	2,145	88	0,999	0,035	28,636
20	0,342	0,940	0,364	43	0,682	0,731	0,933	66	0,914	0,407	2,246	89	1,000	0,017	57,290
21	0,358	0,934	0,384	44	0,695	0,719	0,966	67	0,921	0,391	2,356				
22	0,375	0,927	0,404	45	0,707	0,707	1,000	68	0,927	0,375	2,475				
23	0,391	0,921	0,424	46	0,719	0,695	1,036	69	0,934	0,358	2,605				

Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

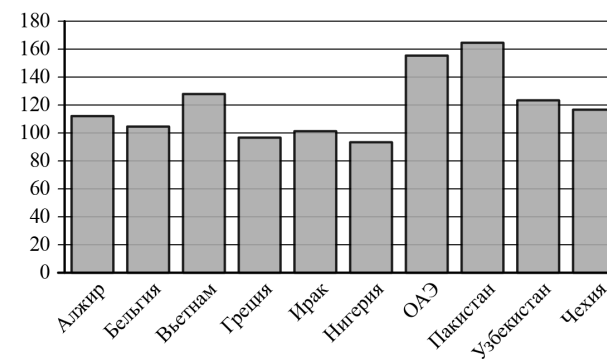
В1

1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 30 копеек. Счётчик электроэнергии 1 марта показывал 53 073 киловатт-часа, а 1 апреля показывал 53 255 киловатт-часов. Какую сумму нужно заплатить за электроэнергию за март? Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____.

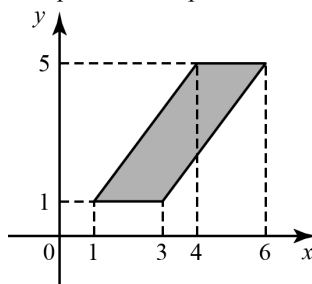
В2

На диаграмме показано распределение выбросов углекислого газа в атмосферу в 10 странах мира (в миллионах тонн) за 2008 год. Среди представленных стран первое место по объёму выбросов занимал Пакистан, десятое место — Нигерия. Какое место среди представленных стран занимала Чехия?



Ответ: _____.

- В3** Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



Ответ: _____.

- В4** Для группы иностранных гостей требуется купить путеводители в количестве 10 штук. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Условия покупки и доставки даны в таблице. Определите, в каком из магазинов общая сумма покупки с учётом доставки будет наименьшей. В ответ напишите наименьшую сумму в рублях.

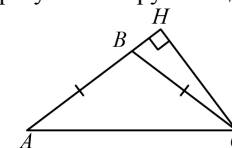
Интернет-магазин	Цена одного путеводителя (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	374	200	Нет
Б	370	300	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 4000 руб.
В	395	250	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 3500 руб.

Ответ: _____.

- В5** Найдите корень уравнения $\sqrt{20+x} = 5$.

Ответ: _____.

- В6** В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 50, высота CH равна 30,1. Пользуясь таблицей тригонометрических функций, найдите угол ACB (при необходимости результат округлите до целого числа градусов).

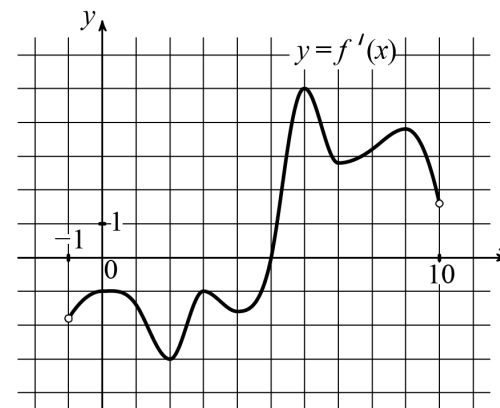


Ответ: _____.

- В7** Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

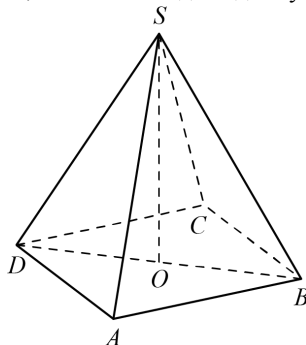
Ответ: _____.

- В8** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1; 10)$. В какой точке отрезка $[0; 5]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: _____.

- B9** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO=6$, $SA=10$. Найдите длину отрезка BD .

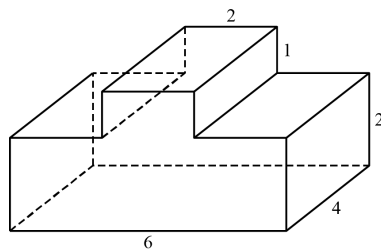


Ответ: _____.

- B10** В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в 12 из них встречается вопрос по теме «Членистоногие». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопроса по теме «Членистоногие».

Ответ: _____.

- B11** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

- B12** Сонар подводного аппарата испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Отражённый от дна океана сигнал возвращается и регистрируется приёмником. Скорость погружения аппарата v (м/с) и частоты испускаемого и регистрируемого сигналов связаны соотношением

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где $c=1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота исходящего сигнала (МГц), f — частота отражённого сигнала, регистрируемая приёмником (МГц). Найдите частоту отражённого сигнала при скорости погружения 2 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: _____.

- B13** Клиент А. сделал вклад в банке в размере 6200 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал Б. Ещё ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 682 рубля больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

Ответ: _____.

- B14** Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 49}{x}$ на отрезке $[-19; -1]$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $\left(25^{\cos x}\right)^{\sin x} = 5^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

- C2** В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $4:5$, считая от вершины B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , O и C_1 .

- C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4|x+1| + \frac{1}{2}|x-4| - \frac{5}{2}x \leq 12, \\ x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5. \end{cases}$$

- C4** В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 2$ и $CD = 10$.

- C5** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (1-a)^2 = |x-1+a| + |x-a+1|$$

имеет единственный корень.

- C6** Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.
а) На доске выписан набор $-3, -1, 2, 4, 6, 7, 9$. Какие числа были задуманы?
б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Диагностическая работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

24 сентября 2013 года

11 класс

Вариант МА10113 (Восток без производной)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение диагностической работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если дан верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

Район. _____
Город (населённый пункт) _____
Школа. _____
Класс. _____
Фамилия _____
Имя _____
Отчество. _____

**Таблица тригонометрических функций для углов
от 1 до 89 градусов**

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
1	0,017	1,000	0,017	24	0,407	0,914	0,445	47	0,731	0,682	1,072	70	0,940	0,342	2,747
2	0,035	0,999	0,035	25	0,423	0,906	0,466	48	0,743	0,669	1,111	71	0,946	0,326	2,904
3	0,052	0,999	0,052	26	0,438	0,899	0,488	49	0,755	0,656	1,150	72	0,951	0,309	3,078
4	0,070	0,998	0,070	27	0,454	0,891	0,510	50	0,766	0,643	1,192	73	0,956	0,292	3,271
5	0,087	0,996	0,087	28	0,469	0,883	0,532	51	0,777	0,629	1,235	74	0,961	0,276	3,487
6	0,105	0,995	0,105	29	0,485	0,875	0,554	52	0,788	0,616	1,280	75	0,966	0,259	3,732
7	0,122	0,993	0,123	30	0,500	0,866	0,577	53	0,799	0,602	1,327	76	0,970	0,242	4,011
8	0,139	0,990	0,141	31	0,515	0,857	0,601	54	0,809	0,588	1,376	77	0,974	0,225	4,331
9	0,156	0,988	0,158	32	0,530	0,848	0,625	55	0,819	0,574	1,428	78	0,978	0,208	4,705
10	0,174	0,985	0,176	33	0,545	0,839	0,649	56	0,829	0,559	1,483	79	0,982	0,191	5,145
11	0,191	0,982	0,194	34	0,559	0,829	0,675	57	0,839	0,545	1,540	80	0,985	0,174	5,671
12	0,208	0,978	0,213	35	0,574	0,819	0,700	58	0,848	0,530	1,600	81	0,988	0,156	6,314
13	0,225	0,974	0,231	36	0,588	0,809	0,727	59	0,857	0,515	1,664	82	0,990	0,139	7,115
14	0,242	0,970	0,249	37	0,602	0,799	0,754	60	0,866	0,500	1,732	83	0,993	0,122	8,144
15	0,259	0,966	0,268	38	0,616	0,788	0,781	61	0,875	0,485	1,804	84	0,995	0,105	9,514
16	0,276	0,961	0,287	39	0,629	0,777	0,810	62	0,883	0,469	1,881	85	0,996	0,087	11,430
17	0,292	0,956	0,306	40	0,643	0,766	0,839	63	0,891	0,454	1,963	86	0,998	0,070	14,301
18	0,309	0,951	0,325	41	0,656	0,755	0,869	64	0,899	0,438	2,050	87	0,999	0,052	19,081
19	0,326	0,946	0,344	42	0,669	0,743	0,900	65	0,906	0,423	2,145	88	0,999	0,035	28,636
20	0,342	0,940	0,364	43	0,682	0,731	0,933	66	0,914	0,407	2,246	89	1,000	0,017	57,290
21	0,358	0,934	0,384	44	0,695	0,719	0,966	67	0,921	0,391	2,356				
22	0,375	0,927	0,404	45	0,707	0,707	1,000	68	0,927	0,375	2,475				
23	0,391	0,921	0,424	46	0,719	0,695	1,036	69	0,934	0,358	2,605				

Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

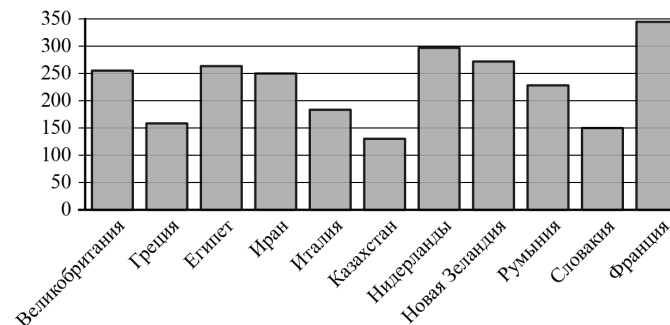
В1

1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 30 копеек. Счётчик электроэнергии 1 марта показывал 53 073 киловатт-часа, а 1 апреля показывал 53 255 киловатт-часов. Какую сумму нужно заплатить за электроэнергию за март? Ответ выразите в рублях.

Ответ: _____.

В2

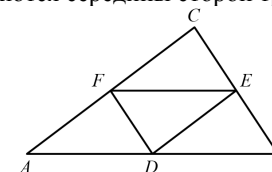
На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по объёму выплавки занимала Франция, одиннадцатое место — Казахстан. Какое место среди представленных стран занимала Румыния?



Ответ: _____.

В3

Периметр треугольника ABC равен 6. Найдите периметр треугольника FDE , вершинами которого являются середины сторон треугольника ABC .



Ответ: _____.

- В4** Для группы иностранных гостей требуется купить путеводители в количестве 10 штук. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Условия покупки и доставки даны в таблице. Определите, в каком из магазинов общая сумма покупки с учётом доставки будет наименьшей. В ответ напишите наименьшую сумму в рублях.

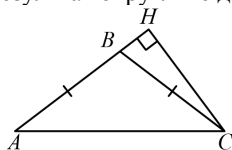
Интернет-магазин	Цена одного путеводителя (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	374	200	Нет
Б	370	300	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 4000 руб.
В	395	250	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 3500 руб.

Ответ: _____.

- В5** Найдите корень уравнения $2^{2-3x} = 32$.

Ответ: _____.

- В6** В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 50, высота CH равна 30,1. Пользуясь таблицей тригонометрических функций, найдите угол ACB (при необходимости результат округлите до целого числа градусов).

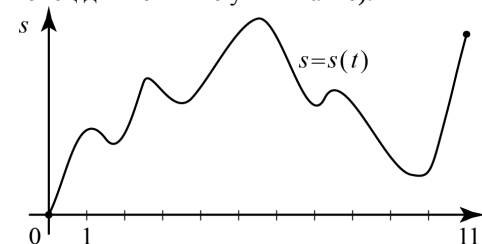


Ответ: _____.

- В7** Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

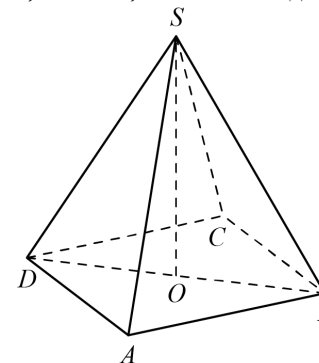
Ответ: _____.

- В8** Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 11 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



Ответ: _____.

- В9** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 20$, $SD = 25$. Найдите длину отрезка BD .

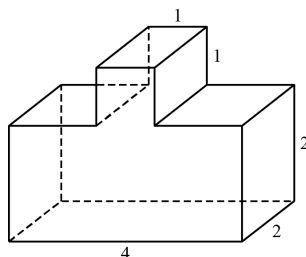


Ответ: _____.

- В10** В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в 12 из них встречается вопрос по теме «Членистоногие». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопроса по теме «Членистоногие».

Ответ: _____.

- В11** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

- В12** Сонар подводного аппарата испускает ультразвуковой сигнал частотой 198 МГц. Отражённый от дна океана сигнал возвращается и регистрируется приёмником. Скорость погружения аппарата v (м/с) и частоты испускаемого и регистрируемого сигналов связаны соотношением

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота исходящего сигнала (МГц), f — частота отражённого сигнала, регистрируемая приёмником (МГц). Найдите частоту отражённого сигнала при скорости погружения 15 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: _____.

- В13** Клиент А. сделал вклад в банке в размере 6200 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал Б. Ещё ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 682 рубля больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

Ответ: _____.

- В14** Найдите наименьшее значение функции $y = \log_2(x^2 - 4x + 12)$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1

- а) Решите уравнение $12^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3} \cos x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

С2

- В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру $B_1 C_1$ и делит его в отношении 8:3, считая от вершины B_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B , D и K .

С3

- Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x} \frac{x+3}{(x-4)^2} \geq -2, \\ x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2. \end{cases}$$

С4

- В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

С5

- Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 - |x - a + 6| = |x + a - 6| - (a - 6)^2$ имеет единственный корень.

C6

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 6, 9, 12, 15.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Диагностическая работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

24 сентября 2013 года

11 класс

Вариант МА10114 (Восток без производной)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение диагностической работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если дан верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

Район. _____
Город (населённый пункт) _____
Школа. _____
Класс. _____
Фамилия _____
Имя _____
Отчество. _____

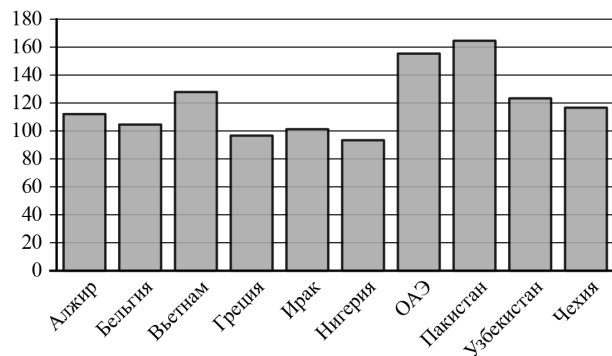
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** По тарифному плану «Просто как день» со счёта абонента компания сотовой связи вечером каждого дня снимает 21 руб. Если на счёту осталось меньше 21 руб., то на следующий день номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счёту 700 руб. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёта?

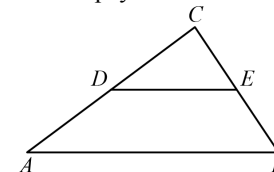
Ответ: _____.

- В2** На диаграмме показано распределение выбросов углекислого газа в атмосферу в 10 странах мира (в миллионах тонн) за 2008 год. Среди представленных стран первое место по объёму выбросов занимал Пакистан, десятое место — Нигерия. Какое место среди представленных стран занимала Чехия?



Ответ: _____.

- В3** Периметр треугольника ABC равен 12. Найдите периметр треугольника CDE , где DE — средняя линия треугольника ABC .



Ответ: _____.

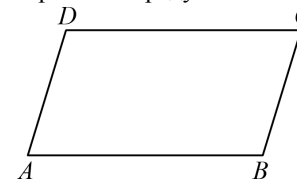
- В4** Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок: либо скидку 15% на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, либо скидку 10% на звонки в другие регионы, либо скидку 5% на услуги мобильного интернета. Клиент посмотрел распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 600 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 800 рублей на звонки в другие регионы и 700 рублей на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же, и исходя из этого выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Сколько рублей составит эта скидка, если звонки и пользование Интернетом сохранятся в прежнем объёме?

Ответ: _____.

- В5** Найдите корень уравнения $9^{3-x} = 9$.

Ответ: _____.

- В6** Один угол параллелограмма больше другого на 14° . Найдите больший угол параллелограмма. Ответ выразите в градусах.



Ответ: _____.

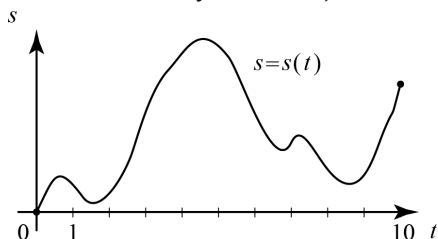
B7

Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{5\sqrt{29}}{29}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Ответ: _____.

B8

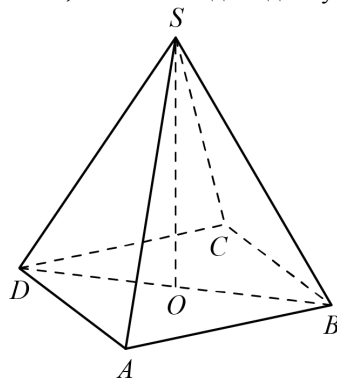
Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 10 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитываются).



Ответ: _____.

B9

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 4$, $SD = 5$. Найдите длину отрезка BD .



Ответ: _____.

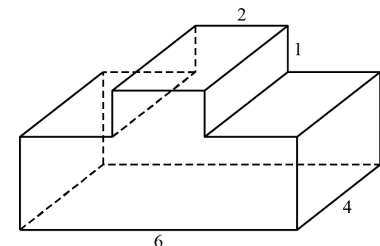
B10

В сборнике билетов по истории всего 25 билетов, в 18 из них встречается вопрос по теме «Царствование Александра Второго». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопроса по теме «Царствование Александра Второго».

Ответ: _____.

B11

Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

B12

Сонар подводного аппарата испускает ультразвуковой сигнал частотой 249 МГц. Отражённый от дна океана сигнал возвращается и регистрируется приёмником. Скорость погружения аппарата v (м/с) и частоты испускаемого и регистрируемого сигналов связаны соотношением

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота исходящего сигнала (МГц), f — частота отражённого сигнала, регистрируемая приёмником (МГц). Найдите частоту отражённого сигнала при скорости погружения 6 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: _____.

B13

Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 10 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

Ответ: _____.

B14 Найдите наибольшее значение функции $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 6x + 12)$ на отрезке $[-19; -1]$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

а) Решите уравнение $\left(25^{\cos x}\right)^{\sin x} = 5^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $4:5$, считая от вершины B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , O и C_1 .

C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4, \\ x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5. \end{cases}$$

C4

В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 2$ и $CD = 10$.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (1-a)^2 = |x-1+a| + |x-a+1|$$

имеет единственный корень.

C6

Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-3, -1, 2, 4, 6, 7, 9$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Диагностическая работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

24 сентября 2013 года

11 класс

Вариант МА10115 (Восток без производной)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение диагностической работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если дан верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

Район. _____
Город (населённый пункт) _____
Школа. _____
Класс. _____
Фамилия _____
Имя _____
Отчество. _____

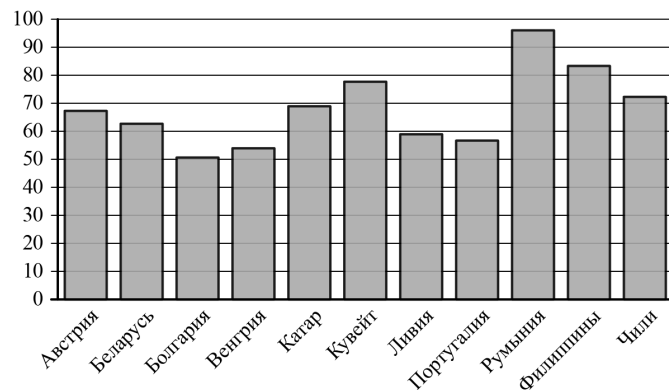
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** В магазине «Сделай сам» мебель продаётся в разобранном виде. Покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 15% от стоимости купленной мебели. Шкаф стоит 2000 рублей. Во сколько рублей обойдётся покупка этого шкафа вместе со сборкой?

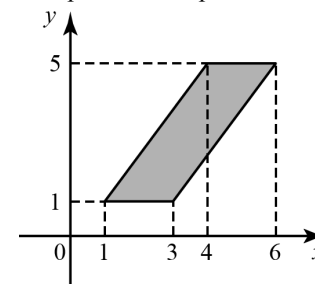
Ответ: _____.

- В2** На диаграмме показано распределение выбросов углекислого газа в атмосферу в 11 странах мира (в миллионах тонн) за 2008 год. Среди представленных стран первое место по объёму выбросов занимала Румыния, одиннадцатое место — Болгария. Какое место среди представленных стран занимала Венгрия?



Ответ: _____.

- В3** Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



Ответ: _____.

- В4** В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона (руб.)	Первоначальный взнос (в процентах от цены)	Срок кредита (мес.)	Сумма ежемесячного платежа (руб.)
Эпсилон	10 000	15	6	1620
Дельта	10 500	10	12	850
Омикрон	9 500	20	12	780

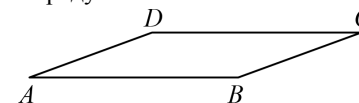
Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дороже всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наибольшую сумму в рублях.

Ответ: _____.

- В5** Найдите корень уравнения $6^{3-x} = 36$.

Ответ: _____.

- В6** Сумма двух углов параллелограмма равна 24° . Найдите один из оставшихся углов. Ответ выразите в градусах.



Ответ: _____.

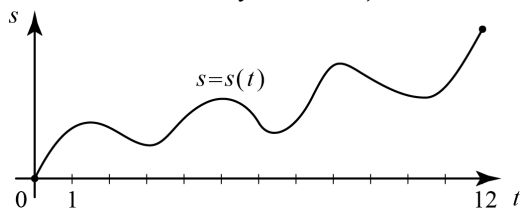
B7

Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Ответ: _____.

B8

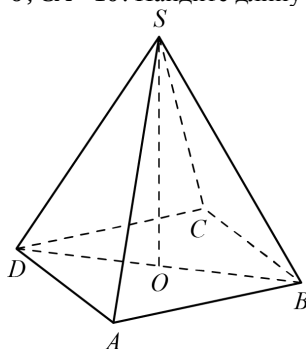
Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитываются).



Ответ: _____.

B9

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 6$, $SA = 10$. Найдите длину отрезка BD .



Ответ: _____.

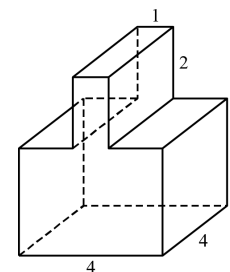
B10

В сборнике билетов по географии всего 50 билетов, в 8 из них встречается вопрос по теме «Страны Африки». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопроса по теме «Страны Африки».

Ответ: _____.

B11

Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

B12

Сонар подводного аппарата испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Отражённый от дна океана сигнал возвращается и регистрируется приёмником. Скорость погружения аппарата v (м/с) и частоты испускаемого и регистрируемого сигналов связаны соотношением

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота исходящего сигнала (МГц), f — частота отражённого сигнала, регистрируемая приёмником (МГц). Найдите частоту отражённого сигнала при скорости погружения 2 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: _____.

B13

Два велосипедиста едут по круговой дорожке длиной 1,2 км каждый со своей постоянной скоростью. Они выехали одновременно. Первые 5 кругов первый велосипедист проехал на 9 минут быстрее, чем второй, а еще через 27 минут поравнялся со вторым. Найдите скорость второго велосипедиста. Ответ выразите в км/ч.

Ответ: _____.

- B14** Найдите наименьшее значение функции $y = \log_2(x^2 - 6x + 25)$ на отрезке $[2; 13]$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $12^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3} \cos x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

- C2** В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру $B_1 C_1$ и делит его в отношении $8:3$, считая от вершины B_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B , D и K .

- C3** Решите систему неравенств
- $$\begin{cases} \log_{4-x} \frac{x+3}{(x-4)^2} \geq -2, \\ x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2. \end{cases}$$

- C4** В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

- C5** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение
- $$x^2 - |x - a + 6| = |x + a - 6| - (a - 6)^2$$
- имеет единственный корень.

- C6** Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.
а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 6, 9, 12, 15.
б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?
в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Диагностическая работа № 1

по МАТЕМАТИКЕ

24 сентября 2013 года

11 класс

Вариант МА10116 (Восток без производной)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение диагностической работы по математике даётся 235 минут. Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (В1–В14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если дан верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

Желаем успеха!

Район. _____
Город (населённый пункт) _____
Школа. _____
Класс. _____
Фамилия _____
Имя _____
Отчество. _____

**Таблица тригонометрических функций для углов
от 1 до 89 градусов**

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
1	0,017	1,000	0,017	24	0,407	0,914	0,445	47	0,731	0,682	1,072	70	0,940	0,342	2,747
2	0,035	0,999	0,035	25	0,423	0,906	0,466	48	0,743	0,669	1,111	71	0,946	0,326	2,904
3	0,052	0,999	0,052	26	0,438	0,899	0,488	49	0,755	0,656	1,150	72	0,951	0,309	3,078
4	0,070	0,998	0,070	27	0,454	0,891	0,510	50	0,766	0,643	1,192	73	0,956	0,292	3,271
5	0,087	0,996	0,087	28	0,469	0,883	0,532	51	0,777	0,629	1,235	74	0,961	0,276	3,487
6	0,105	0,995	0,105	29	0,485	0,875	0,554	52	0,788	0,616	1,280	75	0,966	0,259	3,732
7	0,122	0,993	0,123	30	0,500	0,866	0,577	53	0,799	0,602	1,327	76	0,970	0,242	4,011
8	0,139	0,990	0,141	31	0,515	0,857	0,601	54	0,809	0,588	1,376	77	0,974	0,225	4,331
9	0,156	0,988	0,158	32	0,530	0,848	0,625	55	0,819	0,574	1,428	78	0,978	0,208	4,705
10	0,174	0,985	0,176	33	0,545	0,839	0,649	56	0,829	0,559	1,483	79	0,982	0,191	5,145
11	0,191	0,982	0,194	34	0,559	0,829	0,675	57	0,839	0,545	1,540	80	0,985	0,174	5,671
12	0,208	0,978	0,213	35	0,574	0,819	0,700	58	0,848	0,530	1,600	81	0,988	0,156	6,314
13	0,225	0,974	0,231	36	0,588	0,809	0,727	59	0,857	0,515	1,664	82	0,990	0,139	7,115
14	0,242	0,970	0,249	37	0,602	0,799	0,754	60	0,866	0,500	1,732	83	0,993	0,122	8,144
15	0,259	0,966	0,268	38	0,616	0,788	0,781	61	0,875	0,485	1,804	84	0,995	0,105	9,514
16	0,276	0,961	0,287	39	0,629	0,777	0,810	62	0,883	0,469	1,881	85	0,996	0,087	11,430
17	0,292	0,956	0,306	40	0,643	0,766	0,839	63	0,891	0,454	1,963	86	0,998	0,070	14,301
18	0,309	0,951	0,325	41	0,656	0,755	0,869	64	0,899	0,438	2,050	87	0,999	0,052	19,081
19	0,326	0,946	0,344	42	0,669	0,743	0,900	65	0,906	0,423	2,145	88	0,999	0,035	28,636
20	0,342	0,940	0,364	43	0,682	0,731	0,933	66	0,914	0,407	2,246	89	1,000	0,017	57,290
21	0,358	0,934	0,384	44	0,695	0,719	0,966	67	0,921	0,391	2,356				
22	0,375	0,927	0,404	45	0,707	0,707	1,000	68	0,927	0,375	2,475				
23	0,391	0,921	0,424	46	0,719	0,695	1,036	69	0,934	0,358	2,605				

Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

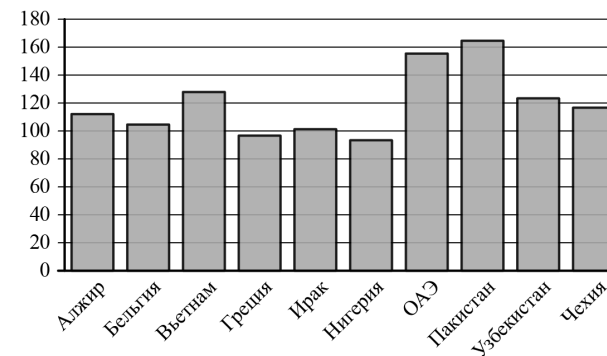
В1

1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 30 копеек. Счётчик электроэнергии 1 марта показывал 53 073 киловатт-часа, а 1 апреля показывал 53 255 киловатт-часов. Какую сумму нужно заплатить за электроэнергию за март? Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____.

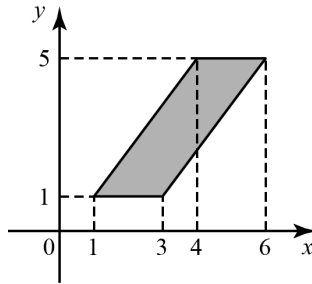
В2

На диаграмме показано распределение выбросов углекислого газа в атмосферу в 10 странах мира (в миллионах тонн) за 2008 год. Среди представленных стран первое место по объёму выбросов занимал Пакистан, десятое место — Нигерия. Какое место среди представленных стран занимала Чехия?



Ответ: _____.

В3 Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



Ответ: _____.

В4 Для группы иностранных гостей требуется купить путеводители в количестве 10 штук. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Условия покупки и доставки даны в таблице. Определите, в каком из магазинов общая сумма покупки с учётом доставки будет наименьшей. В ответ напишите наименьшую сумму в рублях.

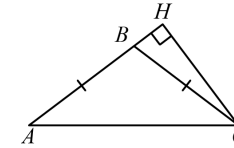
Интернет-магазин	Цена одного путеводителя (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	374	200	Нет
Б	370	300	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 4000 руб.
В	395	250	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 3500 руб.

Ответ: _____.

В5 Найдите корень уравнения $9^{3-x} = 9$.

Ответ: _____.

В6 В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 50, высота CH равна 30,1. Пользуясь таблицей тригонометрических функций, найдите угол ACB (при необходимости результат округлите до целого числа градусов).

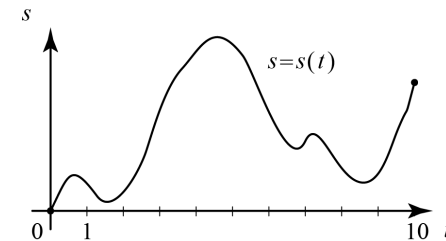


Ответ: _____.

В7 Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

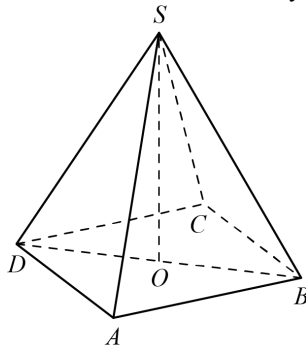
Ответ: _____.

В8 Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 10 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние s в метрах. Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



Ответ: _____.

- B9** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 6$, $SA = 10$. Найдите длину отрезка BD .

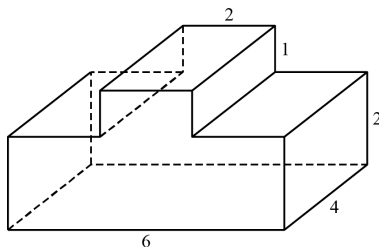


Ответ: _____.

- B10** В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в 12 из них встречается вопрос по теме «Членистоногие». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопроса по теме «Членистоногие».

Ответ: _____.

- B11** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

- B12** Сонар подводного аппарата испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Отражённый от дна океана сигнал возвращается и регистрируется приёмником. Скорость погружения аппарата v (м/с) и частоты испускаемого и регистрируемого сигналов связаны соотношением

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота исходящего сигнала (МГц), f — частота отражённого сигнала, регистрируемая приёмником (МГц). Найдите частоту отражённого сигнала при скорости погружения 2 м/с. Ответ выразите в МГц.

Ответ: _____.

- B13** Клиент А. сделал вклад в банке в размере 6200 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал Б. Ещё ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 682 рубля больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

Ответ: _____.

- B14** Найдите наибольшее значение функции $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 6x + 12)$ на отрезке $[-19; -1]$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

а) Решите уравнение $\left(25^{\cos x}\right)^{\sin x} = 5^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

- C2** В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $4:5$, считая от вершины B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , O и C_1 .

- C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4, \\ x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5. \end{cases}$$

- C4** В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 2$ и $CD = 10$.

- C5** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (1-a)^2 = |x-1+a| + |x-a+1|$$

имеет единственный корень.

- C6** Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.
а) На доске выписан набор $-3, -1, 2, 4, 6, 7, 9$. Какие числа были задуманы?
б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

	Вар	В1	В2	В3	В4	В5	В6	В7	В8	В9	В10	В11	В12	В13	В14
Без логарифмов	1	115.5	5	11	2	22	77	46	7	18	0.08	33	400	90	7
	2	6	6	12	650	25	84	28	8	10	0.76	76	340	20	-9
	3	165	7	4	13	18	118	-20	7	40	0.72	116	455	12	7
	4	115.5	6	4	2	25	84	46	8	40	0.08	76	455	90	-9
	9	236.6	7	3	3940	2	37	-3	3	30	0.52	18	202	10	7
	10	34	5	6	90	5	97	0.4	5	6	0.28	56	251	95	-14
	11	2300	10	8	11260	-4	168	-0.2	-3	16	0.84	56	751	8	-9
	12	236.6	5	8	3940	5	37	-3	5	16	0.52	56	751	10	-14
Без производной	5	115.5	5	11	2	-2	77	46	6	18	0.08	33	400	90	5
	6	6	6	12	650	-14	84	28	6	10	0.76	76	340	20	243
	7	165	7	4	13	1	118	-20	9	40	0.72	116	455	12	5
	8	115.5	6	4	2	-14	84	46	6	40	0.08	76	455	90	243
	13	236.6	7	3	3940	-1	37	-3	8	30	0.52	18	202	10	3
	14	34	5	6	90	2	97	0.4	6	6	0.28	56	251	95	-1
	15	2300	10	8	11260	1	168	-0.2	6	16	0.84	56	751	8	4
	16	236.6	5	8	3940	2	37	-3	6	16	0.52	56	751	10	-1

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

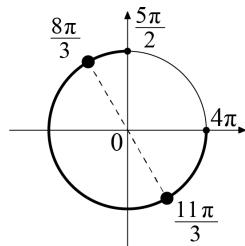
C1

а) Решите уравнение $12^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3} \cos x}$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$4^{\sin x} \cdot 3^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3} \cos x}; \quad 3^{\sin x} = 3^{-\sqrt{3} \cos x};$$

$$\sin x = -\sqrt{3} \cos x; \quad \operatorname{tg} x = -\sqrt{3},$$

откуда $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.Получим числа: $\frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$.Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру $B_1 C_1$ и делит его в отношении 8:3, считая от вершины B_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K .

Решение.

Пусть L — точка, в которой плоскость сечения пересекает ребро $C_1 D_1$. Отрезок KL параллелен диагонали BD . Искомое сечение — трапеция $BDLK$ (рис. 1). Плоскость сечения пересекает нижнее основание по прямой BD , параллельной $B_1 D_1$, значит, KL параллельно $B_1 D_1$.

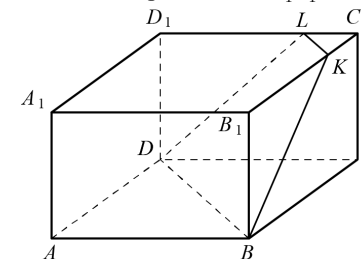


Рис. 1

Треугольники $LC_1 K$ и $D_1 C_1 B_1$ подобны, следовательно,

$$C_1 L : C_1 D_1 = C_1 K : C_1 B_1 = KL : B_1 D_1 = 3 : 11.$$

Значит, $BD = B_1 D_1 = 11\sqrt{2}$, $KL = 3\sqrt{2}$.

В равных прямоугольных треугольниках $DD_1 L$ и $BB_1 K$ имеем $BK = DL = \sqrt{DD_1^2 + D_1 L^2} = \sqrt{113}$, значит, трапеция $BDLK$ равнобедренная.

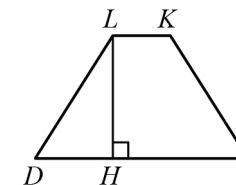


Рис. 2

Пусть LH — высота трапеции $BDLK$, проведённая к основанию BD (рис. 2), тогда:

$$DH = \frac{BD - KL}{2} = 4\sqrt{2}; \quad LH = \sqrt{DL^2 - DH^2} = 9;$$

$$S_{BDLK} = \frac{BD + KL}{2} \cdot LH = 63\sqrt{2}.$$

Ответ: $63\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3|x+1| + \frac{1}{2}|x-2| - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Раскрывая модули, получаем три случая:

$$\begin{cases} -3x - 3 - \frac{1}{2}x + 1 - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ x \leq -1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 3 - \frac{1}{2}x + 1 - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ -1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x + 3 + \frac{1}{2}x - 1 - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ x > 2. \end{cases}$$

В первом случае: $\begin{cases} -5x \leq 10, \\ x \leq -1; \end{cases} \quad -2 \leq x \leq -1.$

Во втором случае $\begin{cases} x \leq 4, \\ -1 < x \leq 2; \end{cases} \quad -1 < x \leq 2.$

В третьем случае $\begin{cases} 2x \leq 6, \\ x > 2; \end{cases} \quad 2 < x \leq 3.$

Объединяя промежутки, получаем $-2 \leq x \leq 3.$

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2; \quad x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2}{x-5} \leq 0;$$

$$\frac{x^4 + x^3 - 2x^2}{x-5} \leq 0; \quad \frac{x^2(x-1)(x+2)}{x-5} \leq 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \leq -2$; $x = 0$; $1 \leq x < 5.$

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -2$; $x = 0$; $1 \leq x \leq 3.$

Ответ: -2 ; 0 ; $[1; 3].$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4

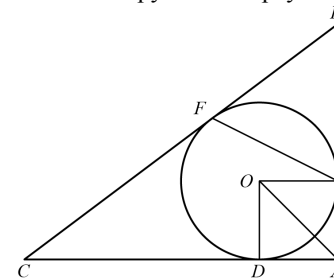
В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

Решение.

а) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC .



Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит, AO — биссектриса угла BAC . Треугольник AOD прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle OAD = 45^\circ$. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$.

б) Обозначим $BF = x$. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AE = AD = 5$, $CF = CD = 15$ и $BE = BF = x$. По теореме Пифагора $BC^2 = AC^2 + AB^2$, или $(15 + x)^2 = 20^2 + (5 + x)^2$. Из этого уравнения находим, что $x = 10$. Тогда

$$BC = 25, \sin \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 40.$$

Ответ: 40.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), пункт а) не выполнен	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), при этом используется недоказанное утверждение из пункта а). ИЛИ Выполнен пункт а), пункт б) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x - a + 6| = |x + a - 6| - (a - 6)^2$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$x^2 + (a - 6)^2 = |x + a - 6| + |x - a + 6|.$$

Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет нечётное число корней, только если $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$. Подставим значение $x = 0$ в уравнение:

$$(a - 6)^2 = 2|a - 6|; \quad |a - 6| \cdot (|a - 6| - 2) = 0,$$

откуда либо $|a - 6| = 0$; $a = 6$, либо $|a - 6| = 2$; $a = 4$ или $a = 8$.

При $a = 6$ уравнение принимает вид $x^2 = 2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа $-2, 0$ и 2 , то есть уравнение имеет ровно три корня.

При $a = 4$ и при $a = 8$ уравнение принимает вид $x^2 + 4 = |x - 2| + |x + 2|$.

При $x < -2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2 + 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $-2 \leq x \leq 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень.

При $x > 2$ получаем уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

Таким образом, при $a = 4$ и при $a = 8$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $a = 4$ и $a = 8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены оба значения a , но в ответ включено не более одного постороннего значения a	3
Обоснованно получено одно из значений a	2
Получен один из следующих результатов: — задача верно сведена к исследованию квадратных уравнений, полученных после раскрытия модулей; — есть утверждение о симметрии корней исходного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 6, 9, 12, 15.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Решение.

а) Задуманные числа 3, 3, 3, 3, 3 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $23 - 1 = 22$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 8 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части числа $\frac{47}{8}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 10 меньше, чем сумма

двух восьмёрок, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $47 - 8 - 9 - 10 = 20$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 8, оставшиеся задуманные числа —

это 10 и 10 или 20 (если бы 20 получалось как $8+12$ или $9+11$, то были бы выписаны числа 12 или 11, но их нет). Для задуманных чисел 8, 9, 10, 10, 10 и 8, 9, 10, 20 на доске будет записан набор, данный в условии. (Для чисел 8, 9, 10, 20 это можно проверить непосредственно, а для чисел 8, 9, 10, 10, 10 — заметить, что они будут давать точно те же суммы, что и числа 8, 9, 10, 20.)

Ответ: а) 3, 3, 3, 3, 3; б) нет; в) 8, 9, 10, 10, 10 или 8, 9, 10, 20.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. в; — оба набора задуманных чисел в п. в	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

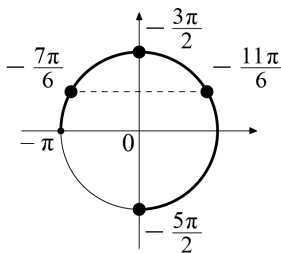
Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $\left(25^{\cos x}\right)^{\sin x} = 5^{\cos x}$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$5^{2\sin x \cos x} = 5^{\cos x}; \quad 2\sin x \cos x = \cos x; \quad \cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0.$$

Значит, либо $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, либо $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.Получим числа $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}$.Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $4:5$, считая от вершины B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , O и C_1 .

Решение.

Пусть плоскость AOC_1 пересекает ребро DD_1 в точке P . Плоскость сечения пересекает плоскость $CC_1 D_1$ по прямой $C_1 P$, параллельной AO , следовательно, искомое сечение — параллелограмм $AOC_1 P$ (рис. 1).

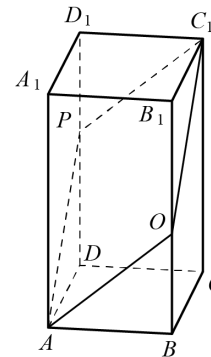


Рис. 1

Треугольники ADP и $C_1 B_1 O$ равны, следовательно,

$$DP = B_1 O = \frac{5}{9} BB_1 = 5; \quad BO = BB_1 - B_1 O = 4.$$

Далее,

$$AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = \sqrt{41}; \quad AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{41},$$

значит, $AOC_1 P$ — ромб со стороной $\sqrt{41}$ и диагональю

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{122} \quad (\text{рис. 2}).$$

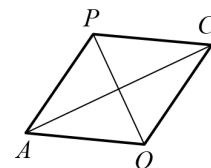


Рис. 2

Тогда найдём другую диагональ:

$$OP = 2 \sqrt{AO^2 - \left(\frac{AC_1}{2}\right)^2} = \sqrt{42}; \quad S_{AOC_1 P} = \frac{AC_1 \cdot OP}{2} = \sqrt{1281}.$$

Ответ: $\sqrt{1281}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4|x+1| + \frac{1}{2}|x-4| - \frac{5}{2}x \leq 12, \\ x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Раскрывая модули, получаем три случая:

$$\begin{cases} -4x - 4 - \frac{1}{2}x + 2 - \frac{5}{2}x \leq 12, \\ x \leq -1, \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 4 - \frac{1}{2}x + 2 - \frac{5}{2}x \leq 12, \\ -1 < x \leq 4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x + 4 + \frac{1}{2}x - 2 - \frac{5}{2}x \leq 12, \\ x > 4. \end{cases}$$

В первом случае $\begin{cases} -7x \leq 14, \\ x \leq -1, \end{cases} \quad -2 \leq x \leq -1.$

Во втором случае $\begin{cases} x \leq 6, \\ -1 < x \leq 4; \end{cases} \quad -1 < x \leq 4.$

В третьем случае $\begin{cases} 2x \leq 10, \\ x > 4. \end{cases} \quad 4 < x \leq 5.$

Объединяя промежутки, получаем $-2 \leq x \leq 5.$

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5; \quad x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2}{x-6} \leq 0;$$

$$\frac{x^4 - x^3 - 2x^2}{x-6} \leq 0; \quad \frac{x^2(x+1)(x-2)}{x-6} \leq 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \leq -1$; $x = 0$; $2 \leq x < 6$.

3. Решение исходной системы неравенств: $-2 \leq x \leq -1$; $x = 0$; $2 \leq x \leq 5$.

Ответ: $[-2; -1]$; 0 ; $[2; 5]$.

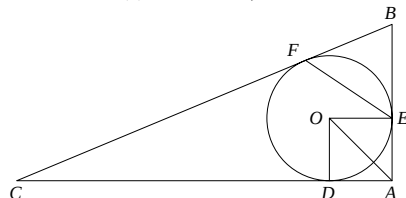
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F .
 Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 2$ и $CD = 10$.

Решение.

а) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC . Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит, AO — биссектриса угла BAC . Треугольник AOD прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle OAD = 45^\circ$. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$.



б) Обозначим $BF = x$. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AE = AD = 2$, $CF = CD = 10$ и $BE = BF = x$. По теореме Пифагора $BC^2 = AC^2 + AB^2$, или $(10 + x)^2 = 12^2 + (2 + x)^2$. Из этого уравнения находим, что $x = 3$. Тогда

$$BC = 13, \sin \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{12}{13} = \frac{54}{13}.$$

Ответ: $\frac{54}{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), пункт а) не выполнен	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), при этом используется недоказанное утверждение из пункта а). ИЛИ Выполнен пункт а), пункт б) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (1-a)^2 = |x-1+a| + |x-a+1|$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$x^2 + (a-1)^2 = |x+a-1| + |x-a+1|.$$

Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень, только если $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$. Подставим значение $x = 0$ в исходное уравнение:

$$(1-a)^2 = 2|1-a|; |1-a| \cdot (|1-a| - 2) = 0,$$

откуда либо $|1-a| = 0$; $a = 1$, либо $|1-a| = 2$; $a = -1$ или $a = 3$.

При $a = 1$ исходное уравнение принимает вид $x^2 = 2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа -2 ; 0 и 2 , то есть исходное уравнение имеет более одного корня.

При $a = -1$ и при $a = 3$ уравнение принимает вид $x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$.

При $x < -2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2 + 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $-2 \leq x \leq 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень.

При $x > 2$ получаем уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $a = -1$ и при $a = 3$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $a = -1$; $a = 3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены оба значения a , но в ответ включено не более одного постороннего значения a	3
Обоснованно получено одно из значений a	2
Получен один из следующих результатов: — задача верно сведена к исследованию квадратных уравнений, полученных после раскрытия модулей; — есть утверждение о симметрии корней исходного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-3, -1, 2, 4, 6, 7, 9$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Решение.

а) Если было задумано 4 числа или более, то на доске должно быть записано не менее 15 чисел. Если было задумано 2 числа или меньше, то на доске должно быть записано не более 3 чисел. Значит, было задумано 3 числа. Если бы было задумано 2 отрицательных числа, то на доске было бы выписано не менее трёх отрицательных чисел. Значит, отрицательное число одно, и это число — наименьшее число в наборе, то есть -3 . Наибольшее число в наборе 9 является суммой двух положительных задуманных чисел. Из положительных выписанных чисел только 2 и 7 дают в сумме 9. Значит, были задуманы числа $-3, 2$ и 7 .

б) Рассмотрим различные задуманные числа, среди которых нет нуля. Пусть для этих чисел в наборе на доске оказалось ровно k нулей. Если добавить к задуманным числам нуль, то на доске окажется ровно $2k+1$ нулей: k нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел, k нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел и задуманного нуля, и задуманный нуль. Таким образом, если среди задуманных чисел есть нуль, то в наборе на доске окажется нечётное количество нулей.

Поскольку на доске выписано ровно 6 нулей, среди задуманных чисел нет нуля. Пусть задумано пять или меньше (ненулевых) чисел. Среди них есть положительные и отрицательные. Нуль получается тогда, когда сумма некоторого количества положительных чисел равна по модулю сумме некоторого количества отрицательных чисел. Подумаем, сколько может быть одинаковых среди всевозможных сумм задуманных чисел одного знака. Одно задуманное число даёт одну сумму; два различных задуманных числа одного знака дают три различные суммы; три различных задуманных числа одного знака дают семь сумм, среди которых не более двух (задуманное число, наибольшее по модулю, и сумма двух других задуманных чисел) совпадают; четыре различных задуманных числа одного знака дают 15 сумм, среди которых не может быть трёх одинаковых. Значит, среди сумм положительных и отрицательных чисел совпадают по модулю не более четырёх. Таким образом, если было задумано не более пяти различных ненулевых чисел, то на доске окажется не более четырёх нулей.

Если были задуманы числа $-5; -2; -1; 1; 2; 3$, то на доске окажется ровно шесть нулей. Значит, наименьшее количество задуманных чисел — 6.

в) Нет, не всегда. Например, для задуманных чисел $-3, 1, 2$ и $-2, -1, 3$ на доске будет выписан один и тот же набор $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Ответ: а) $-3, 2, 7$; б) 6; в) нет.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — оценка количества задуманных чисел в п. а; — пример в п. а; — обоснованное решение п. б; — обоснованное решение п. в	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

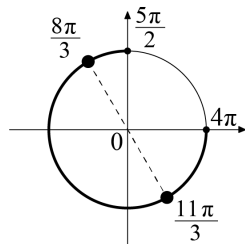
C1

а) Решите уравнение $12^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3} \cos x}$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$4^{\sin x} \cdot 3^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3} \cos x}; \quad 3^{\sin x} = 3^{-\sqrt{3} \cos x};$$

$$\sin x = -\sqrt{3} \cos x; \quad \operatorname{tg} x = -\sqrt{3},$$

откуда $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.Получим числа: $\frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$.Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру $B_1 C_1$ и делит его в отношении 8:3, считая от вершины B_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K .

Решение.

Пусть L — точка, в которой плоскость сечения пересекает ребро $C_1 D_1$. Отрезок KL параллелен диагонали BD . Искомое сечение — трапеция $BDLK$ (рис. 1). Плоскость сечения пересекает нижнее основание по прямой BD , параллельной $B_1 D_1$, значит, KL параллельно $B_1 D_1$.

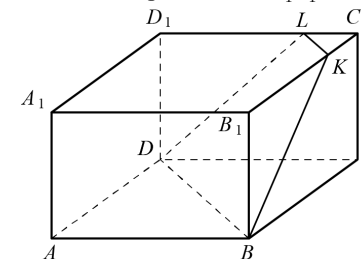


Рис. 1

Треугольники $LC_1 K$ и $D_1 C_1 B_1$ подобны, следовательно,

$$C_1 L : C_1 D_1 = C_1 K : C_1 B_1 = KL : B_1 D_1 = 3 : 11.$$

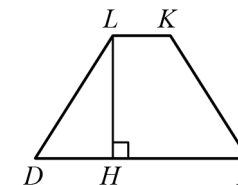
Значит, $BD = B_1 D_1 = 11\sqrt{2}$, $KL = 3\sqrt{2}$.В равных прямоугольных треугольниках $DD_1 L$ и $BB_1 K$ имеем $BK = DL = \sqrt{DD_1^2 + D_1 L^2} = \sqrt{113}$, значит, трапеция $BDLK$ равнобедренная.

Рис. 2

Пусть LH — высота трапеции $BDLK$, проведённая к основанию BD (рис. 2), тогда:

$$DH = \frac{BD - KL}{2} = 4\sqrt{2}; \quad LH = \sqrt{DL^2 - DH^2} = 9;$$

$$S_{BDLK} = \frac{BD + KL}{2} \cdot LH = 63\sqrt{2}.$$

Ответ: $63\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x} \frac{x+3}{(x-4)^2} \geq -2, \\ x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{4-x} \frac{x+3}{(x-4)^2} \geq -2; \log_{4-x}(x+3) - \log_{4-x}(x-4)^2 \geq -2; \log_{4-x}(x+3) \geq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 4 - x < 1$;

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+3) \geq 0, & \begin{cases} 0 < x+3 \leq 1, \\ 3 < x < 4; \end{cases} \text{ нет решений.} \\ 0 < 4 - x < 1; \end{cases}$$

Второй случай: $4 - x > 1$;

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+3) \geq 0, & \begin{cases} x+3 \geq 1, \\ x < 3, \end{cases} \text{ откуда } -2 \leq x < 3. \\ 4 - x > 1; \end{cases}$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-2 \leq x < 3$.

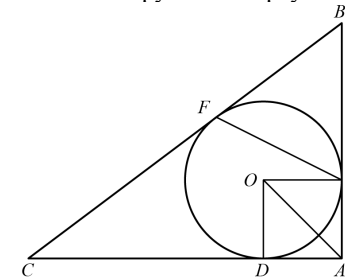
2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2; \quad x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2}{x-5} \leq 0;$$

$$\frac{x^4 + x^3 - 2x^2}{x-5} \leq 0; \quad \frac{x^2(x-1)(x+2)}{x-5} \leq 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \leq -2$; $x = 0$; $1 \leq x < 5$.3. Решение исходной системы неравенств: $x = -2$; $x = 0$; $1 \leq x < 3$.Ответ: -2 ; 0 ; $[1; 3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.Решение.а) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC .

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит, AO — биссектриса угла BAC . Треугольник AOD прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle OAD = 45^\circ$. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$.

б) Обозначим $BF = x$. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AE = AD = 5$, $CF = CD = 15$ и $BE = BF = x$. По теореме Пифагора $BC^2 = AC^2 + AB^2$, или $(15 + x)^2 = 20^2 + (5 + x)^2$. Из этого уравнения находим, что $x = 10$. Тогда

$$BC = 25, \sin \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 40.$$

Ответ: 40.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), пункт а) не выполнен	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), при этом используется недоказанное утверждение из пункта а). ИЛИ Выполнен пункт а), пункт б) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x - a + 6| = |x + a - 6| - (a - 6)^2$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$x^2 + (a - 6)^2 = |x + a - 6| + |x - a + 6|.$$

Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет нечётное число корней, только если $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$. Подставим значение $x = 0$ в уравнение:

$$(a - 6)^2 = 2|a - 6|; \quad |a - 6| \cdot (|a - 6| - 2) = 0,$$

откуда либо $|a - 6| = 0$; $a = 6$, либо $|a - 6| = 2$; $a = 4$ или $a = 8$.

При $a = 6$ уравнение принимает вид $x^2 = 2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа $-2, 0$ и 2 , то есть уравнение имеет ровно три корня.

При $a = 4$ и при $a = 8$ уравнение принимает вид $x^2 + 4 = |x - 2| + |x + 2|$.

При $x < -2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2 + 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $-2 \leq x \leq 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень.

При $x > 2$ получаем уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

Таким образом, при $a = 4$ и при $a = 8$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $a = 4$ и $a = 8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены оба значения a , но в ответ включено не более одного постороннего значения a	3
Обоснованно получено одно из значений a	2
Получен один из следующих результатов: — задача верно сведена к исследованию квадратных уравнений, полученных после раскрытия модулей; — есть утверждение о симметрии корней исходного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 6, 9, 12, 15.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Решение.

а) Задуманные числа 3, 3, 3, 3, 3 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $23 - 1 = 22$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 8 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части числа $\frac{47}{8}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 10 меньше, чем сумма

двух восьмёрок, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $47 - 8 - 9 - 10 = 20$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 8, оставшиеся задуманные числа —

это 10 и 10 или 20 (если бы 20 получалось как $8+12$ или $9+11$, то были бы выписаны числа 12 или 11, но их нет). Для задуманных чисел 8, 9, 10, 10, 10 и 8, 9, 10, 20 на доске будет записан набор, данный в условии. (Для чисел 8, 9, 10, 20 это можно проверить непосредственно, а для чисел 8, 9, 10, 10, 10 — заметить, что они будут давать точно те же суммы, что и числа 8, 9, 10, 20.)

Ответ: а) 3, 3, 3, 3, 3; б) нет; в) 8, 9, 10, 10, 10 или 8, 9, 10, 20.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. в; — оба набора задуманных чисел в п. в	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

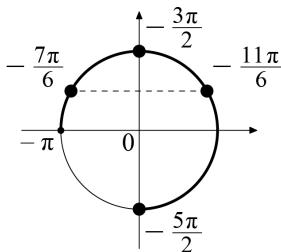
Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $\left(25^{\cos x}\right)^{\sin x} = 5^{\cos x}$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$5^{2\sin x \cos x} = 5^{\cos x}; \quad 2\sin x \cos x = \cos x; \quad \cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0.$$

Значит, либо $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, либо $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.Получим числа $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}$.Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $4:5$, считая от вершины B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , O и C_1 .

Решение.

Пусть плоскость AOC_1 пересекает ребро DD_1 в точке P . Плоскость сечения пересекает плоскость $CC_1 D_1$ по прямой $C_1 P$, параллельной AO , следовательно, искомое сечение — параллелограмм $AOC_1 P$ (рис. 1).

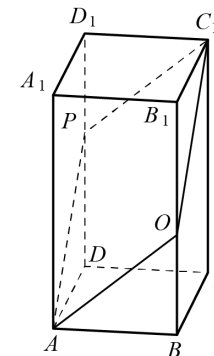


Рис. 1

Треугольники ADP и $C_1 B_1 O$ равны, следовательно,

$$DP = B_1 O = \frac{5}{9} BB_1 = 5; \quad BO = BB_1 - B_1 O = 4. \text{ Далее,}$$

$$AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = \sqrt{41}; \quad AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{41},$$

значит, $AOC_1 P$ — ромб со стороной $\sqrt{41}$ и диагональю $AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{122}$ (рис. 2).

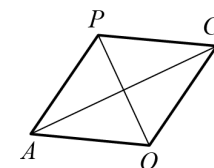


Рис. 2

Тогда другая диагональ

$$OP = 2\sqrt{AO^2 - \left(\frac{AC_1}{2}\right)^2} = \sqrt{42}; \quad S_{AOC_1 P} = \frac{AC_1 \cdot OP}{2} = \sqrt{1281}.$$

Ответ: $\sqrt{1281}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4, \\ x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4; \quad \log_{5-x} (x+2) - \log_{5-x} (x-5)^4 \geq -4;$$

$$\log_{5-x} (x+2) \geq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 5 - x < 1$;

$$\begin{cases} \log_{5-x} (x+2) \geq 0, \\ 0 < 5 - x < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x + 2 \leq 1, \\ 4 < x < 5; \end{cases} \quad \text{нет решений.}$$

Второй случай: $5 - x > 1$;

$$\begin{cases} \log_{5-x} (x+2) \geq 0, \\ 5 - x > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2 \geq 1, \\ x < 4, \end{cases} \quad \text{откуда } -1 \leq x < 4.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-1 \leq x < 4$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5; \quad x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2}{x-6} \leq 0;$$

$$\frac{x^4 - x^3 - 2x^2}{x-6} \leq 0; \quad \frac{x^2(x+1)(x-2)}{x-6} \leq 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \leq -1$; $x = 0$; $2 \leq x < 6$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -1$; $x = 0$; $2 \leq x < 4$.

Ответ: -1 ; 0 ; $[2; 4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4

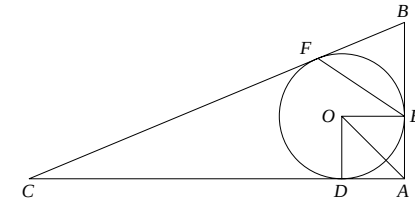
В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 2$ и $CD = 10$.

Решение.

а) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC . Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит, AO — биссектриса угла BAC . Треугольник AOD прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle OAD = 45^\circ$. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$.



б) Обозначим $BF = x$. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AE = AD = 2$, $CF = CD = 10$ и $BE = BF = x$. По теореме Пифагора $BC^2 = AC^2 + AB^2$, или $(10 + x)^2 = 12^2 + (2 + x)^2$. Из этого уравнения находим, что $x = 3$. Тогда

$$BC = 13, \quad \sin \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{12}{13} = \frac{54}{13}.$$

Ответ: $\frac{54}{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), пункт а) не выполнен	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), при этом используется недоказанное утверждение из пункта а). ИЛИ Выполнен пункт а), пункт б) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (1-a)^2 = |x-1+a| + |x-a+1|$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$x^2 + (a-1)^2 = |x+a-1| + |x-a+1|.$$

Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень, только если $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$. Подставим значение $x=0$ в исходное уравнение:

$$(1-a)^2 = 2|1-a|; |1-a| \cdot (|1-a|-2) = 0,$$

откуда либо $|1-a|=0$; $a=1$, либо $|1-a|=2$; $a=-1$ или $a=3$.

При $a=1$ исходное уравнение принимает вид $x^2 = 2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа -2 ; 0 и 2 , то есть исходное уравнение имеет более одного корня.

При $a=-1$ и при $a=3$ уравнение принимает вид $x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$.

При $x < -2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2 + 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $-2 \leq x \leq 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень.

При $x > 2$ получаем уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $a=-1$ и при $a=3$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $a=-1$; $a=3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены оба значения a , но в ответ включено не более одного постороннего значения a	3
Обоснованно получено одно из значений a	2
Получен один из следующих результатов: — задача верно сведена к исследованию квадратных уравнений, полученных после раскрытия модулей; — есть утверждение о симметрии корней исходного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6

Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-3, -1, 2, 4, 6, 7, 9$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Решение.

а) Если было задумано 4 числа или более, то на доске должно быть записано не менее 15 чисел. Если было задумано 2 числа или меньше, то на доске должно быть записано не более 3 чисел. Значит, было задумано 3 числа. Если бы было задумано 2 отрицательных числа, то на доске было бы выписано не менее трёх отрицательных чисел. Значит, отрицательное число одно, и это число — наименьшее число в наборе, то есть -3 . Наибольшее число в наборе 9 является суммой двух положительных задуманных чисел. Из положительных выписанных чисел только 2 и 7 дают в сумме 9. Значит, были задуманы числа $-3, 2$ и 7 .

б) Рассмотрим различные задуманные числа, среди которых нет нуля. Пусть для этих чисел в наборе на доске оказалось ровно k нулей. Если добавить к задуманным числам нуль, то на доске окажется ровно $2k+1$ нулей: k нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел, k нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел и задуманного нуля, и задуманный нуль. Таким образом, если среди задуманных чисел есть нуль, то в наборе на доске окажется нечётное количество нулей.

Поскольку на доске выписано ровно 6 нулей, среди задуманных чисел нет нуля. Пусть задумано пять или меньше (ненулевых) чисел. Среди них есть

положительные и отрицательные. Нуль получается тогда, когда сумма некоторого количества положительных чисел равна по модулю сумме некоторого количества отрицательных чисел. Подумаем, сколько может быть одинаковых среди всевозможных сумм задуманных чисел одного знака. Одно задуманное число даёт одну сумму; два различных задуманных числа одного знака дают три различные суммы; три различных задуманных числа одного знака дают семь сумм, среди которых не более двух (задуманное число, наибольшее по модулю, и сумма двух других задуманных чисел) совпадают; четыре различных задуманных числа одного знака дают 15 сумм, среди которых не может быть трёх одинаковых. Значит, среди сумм положительных и отрицательных чисел совпадают по модулю не более четырёх. Таким образом, если было задумано не более пяти различных ненулевых чисел, то на доске окажется не более четырёх нулей.

Если были задуманы числа -5 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 , то на доске окажется ровно шесть нулей. Значит, наименьшее количество задуманных чисел — 6.

в) Нет, не всегда. Например, для задуманных чисел -3 , 1 , 2 и -2 , -1 , 3 на доске будет выписан один и тот же набор -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 .

Ответ: а) -3 , 2 , 7 ; б) 6; в) нет.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — оценка количества задуманных чисел в п. а; — пример в п. а; — обоснованное решение п. б; — обоснованное решение п. в	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

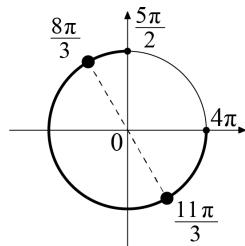
C1

а) Решите уравнение $12^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3} \cos x}$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$4^{\sin x} \cdot 3^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3} \cos x}; \quad 3^{\sin x} = 3^{-\sqrt{3} \cos x};$$

$$\sin x = -\sqrt{3} \cos x; \quad \operatorname{tg} x = -\sqrt{3},$$

откуда $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.Получим числа: $\frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$.Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру $B_1 C_1$ и делит его в отношении 8:3, считая от вершины B_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K .

Решение.

Пусть L — точка, в которой плоскость сечения пересекает ребро $C_1 D_1$. Отрезок KL параллелен диагонали BD . Искомое сечение — трапеция $BDLK$ (рис. 1). Плоскость сечения пересекает нижнее основание по прямой BD , параллельной $B_1 D_1$, значит, KL параллельно $B_1 D_1$.

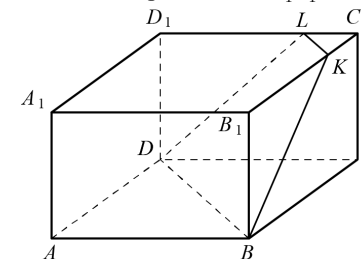


Рис. 1

Треугольники $LC_1 K$ и $D_1 C_1 B_1$ подобны, следовательно,

$$C_1 L : C_1 D_1 = C_1 K : C_1 B_1 = KL : B_1 D_1 = 3 : 11.$$

Значит, $BD = B_1 D_1 = 11\sqrt{2}$, $KL = 3\sqrt{2}$.

В равных прямоугольных треугольниках $DD_1 L$ и $BB_1 K$ имеем $BK = DL = \sqrt{DD_1^2 + D_1 L^2} = \sqrt{113}$, значит, трапеция $BDLK$ равнобедренная.

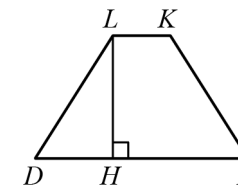


Рис. 2

Пусть LH — высота трапеции $BDLK$, проведённая к основанию BD (рис. 2), тогда:

$$DH = \frac{BD - KL}{2} = 4\sqrt{2}; \quad LH = \sqrt{DL^2 - DH^2} = 9;$$

$$S_{BDLK} = \frac{BD + KL}{2} \cdot LH = 63\sqrt{2}.$$

Ответ: $63\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3|x+1| + \frac{1}{2}|x-2| - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Раскрывая модули, получаем три случая:

$$\begin{cases} -3x - 3 - \frac{1}{2}x + 1 - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ x \leq -1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 3 - \frac{1}{2}x + 1 - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ -1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x + 3 + \frac{1}{2}x - 1 - \frac{3}{2}x \leq 8, \\ x > 2. \end{cases}$$

В первом случае: $\begin{cases} -5x \leq 10, \\ x \leq -1; \end{cases} \quad -2 \leq x \leq -1.$

Во втором случае $\begin{cases} x \leq 4, \\ -1 < x \leq 2; \end{cases} \quad -1 < x \leq 2.$

В третьем случае $\begin{cases} 2x \leq 6, \\ x > 2; \end{cases} \quad 2 < x \leq 3.$

Объединяя промежутки, получаем $-2 \leq x \leq 3.$

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2; \quad x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2}{x-5} \leq 0;$$

$$\frac{x^4 + x^3 - 2x^2}{x-5} \leq 0; \quad \frac{x^2(x-1)(x+2)}{x-5} \leq 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \leq -2$; $x = 0$; $1 \leq x < 5.$

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -2$; $x = 0$; $1 \leq x \leq 3.$

Ответ: -2 ; 0 ; $[1; 3].$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4

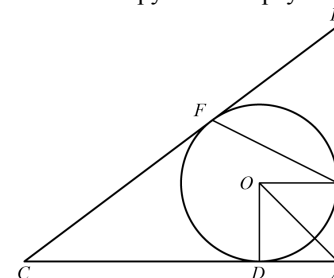
В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

Решение.

а) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC .



Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит, AO — биссектриса угла BAC . Треугольник AOD прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle OAD = 45^\circ$. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$.

б) Обозначим $BF = x$. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AE = AD = 5$, $CF = CD = 15$ и $BE = BF = x$. По теореме Пифагора $BC^2 = AC^2 + AB^2$, или $(15 + x)^2 = 20^2 + (5 + x)^2$. Из этого уравнения находим, что $x = 10$. Тогда

$$BC = 25, \sin \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 40.$$

Ответ: 40.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), пункт а) не выполнен	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), при этом используется недоказанное утверждение из пункта а). ИЛИ Выполнен пункт а), пункт б) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x - a + 6| = |x + a - 6| - (a - 6)^2$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$x^2 + (a - 6)^2 = |x + a - 6| + |x - a + 6|.$$

Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет нечётное число корней, только если $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$. Подставим значение $x = 0$ в уравнение:

$$(a - 6)^2 = 2|a - 6|; \quad |a - 6| \cdot (|a - 6| - 2) = 0,$$

откуда либо $|a - 6| = 0$; $a = 6$, либо $|a - 6| = 2$; $a = 4$ или $a = 8$.

При $a = 6$ уравнение принимает вид $x^2 = 2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа $-2, 0$ и 2 , то есть уравнение имеет ровно три корня.

При $a = 4$ и при $a = 8$ уравнение принимает вид $x^2 + 4 = |x - 2| + |x + 2|$.

При $x < -2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2 + 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $-2 \leq x \leq 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень.

При $x > 2$ получаем уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

Таким образом, при $a = 4$ и при $a = 8$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $a = 4$ и $a = 8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены оба значения a , но в ответ включено не более одного постороннего значения a	3
Обоснованно получено одно из значений a	2
Получен один из следующих результатов: — задача верно сведена к исследованию квадратных уравнений, полученных после раскрытия модулей; — есть утверждение о симметрии корней исходного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 6, 9, 12, 15.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Решение.

а) Задуманные числа 3, 3, 3, 3, 3 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $23 - 1 = 22$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 8 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части числа $\frac{47}{8}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 10 меньше, чем сумма

двух восьмёрок, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $47 - 8 - 9 - 10 = 20$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 8, оставшиеся задуманные числа —

это 10 и 10 или 20 (если бы 20 получалось как $8+12$ или $9+11$, то были бы выписаны числа 12 или 11, но их нет). Для задуманных чисел 8, 9, 10, 10, 10 и 8, 9, 10, 20 на доске будет записан набор, данный в условии. (Для чисел 8, 9, 10, 20 это можно проверить непосредственно, а для чисел 8, 9, 10, 10, 10 — заметить, что они будут давать точно те же суммы, что и числа 8, 9, 10, 20.)

Ответ: а) 3, 3, 3, 3, 3; б) нет; в) 8, 9, 10, 10, 10 или 8, 9, 10, 20.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. в; — оба набора задуманных чисел в п. в	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

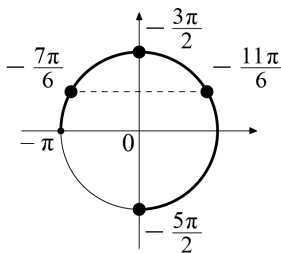
Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $\left(25^{\cos x}\right)^{\sin x} = 5^{\cos x}$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$5^{2\sin x \cos x} = 5^{\cos x}; \quad 2\sin x \cos x = \cos x; \quad \cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0.$$

Значит, либо $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, либо $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.Получим числа $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}$.Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $4:5$, считая от вершины B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , O и C_1 .

Решение.

Пусть плоскость AOC_1 пересекает ребро DD_1 в точке P . Плоскость сечения пересекает плоскость $CC_1 D_1$ по прямой $C_1 P$, параллельной AO , следовательно, искомое сечение — параллелограмм $AOC_1 P$ (рис. 1).

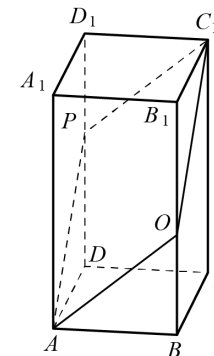


Рис. 1

Треугольники ADP и $C_1 B_1 O$ равны, следовательно,

$$DP = B_1 O = \frac{5}{9} BB_1 = 5; \quad BO = BB_1 - B_1 O = 4.$$

Далее,

$$AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = \sqrt{41}; \quad AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{41},$$

значит, $AOC_1 P$ — ромб со стороной $\sqrt{41}$ и диагональю

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{122} \quad (\text{рис. 2}).$$

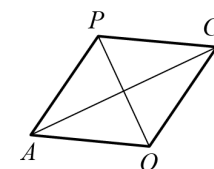


Рис. 2

Тогда найдём другую диагональ:

$$OP = 2 \sqrt{AO^2 - \left(\frac{AC_1}{2}\right)^2} = \sqrt{42}; \quad S_{AOC_1 P} = \frac{AC_1 \cdot OP}{2} = \sqrt{1281}.$$

Ответ: $\sqrt{1281}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4|x+1| + \frac{1}{2}|x-4| - \frac{5}{2}x \leq 12, \\ x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Раскрывая модули, получаем три случая:

$$\begin{cases} -4x - 4 - \frac{1}{2}x + 2 - \frac{5}{2}x \leq 12, \\ x \leq -1, \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 4 - \frac{1}{2}x + 2 - \frac{5}{2}x \leq 12, \\ -1 < x \leq 4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x + 4 + \frac{1}{2}x - 2 - \frac{5}{2}x \leq 12, \\ x > 4. \end{cases}$$

В первом случае $\begin{cases} -7x \leq 14, \\ x \leq -1, \end{cases} \quad -2 \leq x \leq -1.$

Во втором случае $\begin{cases} x \leq 6, \\ -1 < x \leq 4; \end{cases} \quad -1 < x \leq 4.$

В третьем случае $\begin{cases} 2x \leq 10, \\ x > 4. \end{cases} \quad 4 < x \leq 5.$

Объединяя промежутки, получаем $-2 \leq x \leq 5.$

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5; \quad x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2}{x-6} \leq 0;$$

$$\frac{x^4 - x^3 - 2x^2}{x-6} \leq 0; \quad \frac{x^2(x+1)(x-2)}{x-6} \leq 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \leq -1$; $x = 0$; $2 \leq x < 6$.

3. Решение исходной системы неравенств: $-2 \leq x \leq -1$; $x = 0$; $2 \leq x \leq 5$.

Ответ: $[-2; -1]$; 0 ; $[2; 5]$.

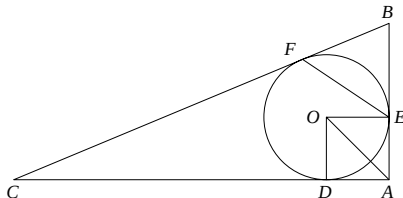
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F .
 Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 2$ и $CD = 10$.

Решение.

а) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC . Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит, AO — биссектриса угла BAC . Треугольник AOD прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle OAD = 45^\circ$. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$.



б) Обозначим $BF = x$. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AE = AD = 2$, $CF = CD = 10$ и $BE = BF = x$. По теореме Пифагора $BC^2 = AC^2 + AB^2$, или $(10 + x)^2 = 12^2 + (2 + x)^2$. Из этого уравнения находим, что $x = 3$. Тогда

$$BC = 13, \sin \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{12}{13} = \frac{54}{13}.$$

Ответ: $\frac{54}{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), пункт а) не выполнен	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), при этом используется недоказанное утверждение из пункта а). ИЛИ Выполнен пункт а), пункт б) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (1-a)^2 = |x-1+a| + |x-a+1|$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$x^2 + (a-1)^2 = |x+a-1| + |x-a+1|.$$

Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень, только если $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$. Подставим значение $x = 0$ в исходное уравнение:

$$(1-a)^2 = 2|1-a|; |1-a| \cdot (|1-a| - 2) = 0,$$

откуда либо $|1-a| = 0$; $a = 1$, либо $|1-a| = 2$; $a = -1$ или $a = 3$.

При $a = 1$ исходное уравнение принимает вид $x^2 = 2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа -2 ; 0 и 2 , то есть исходное уравнение имеет более одного корня.

При $a = -1$ и при $a = 3$ уравнение принимает вид $x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$.

При $x < -2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2 + 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $-2 \leq x \leq 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень.

При $x > 2$ получаем уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $a = -1$ и при $a = 3$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $a = -1$; $a = 3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены оба значения a , но в ответ включено не более одного постороннего значения a	3
Обоснованно получено одно из значений a	2
Получен один из следующих результатов: — задача верно сведена к исследованию квадратных уравнений, полученных после раскрытия модулей; — есть утверждение о симметрии корней исходного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-3, -1, 2, 4, 6, 7, 9$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Решение.

а) Если было задумано 4 числа или более, то на доске должно быть записано не менее 15 чисел. Если было задумано 2 числа или меньше, то на доске должно быть записано не более 3 чисел. Значит, было задумано 3 числа. Если бы было задумано 2 отрицательных числа, то на доске было бы выписано не менее трёх отрицательных чисел. Значит, отрицательное число одно, и это число — наименьшее число в наборе, то есть -3 . Наибольшее число в наборе 9 является суммой двух положительных задуманных чисел. Из положительных выписанных чисел только 2 и 7 дают в сумме 9. Значит, были задуманы числа $-3, 2$ и 7.

б) Рассмотрим различные задуманные числа, среди которых нет нуля. Пусть для этих чисел в наборе на доске оказалось ровно k нулей. Если добавить к задуманным числам нуль, то на доске окажется ровно $2k+1$ нулей: k нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел, k нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел и задуманного нуля, и задуманный нуль. Таким образом, если среди задуманных чисел есть нуль, то в наборе на доске окажется нечётное количество нулей.

Поскольку на доске выписано ровно 6 нулей, среди задуманных чисел нет нуля. Пусть задумано пять или меньше (ненулевых) чисел. Среди них есть положительные и отрицательные. Нуль получается тогда, когда сумма некоторого количества положительных чисел равна по модулю сумме некоторого количества отрицательных чисел. Подумаем, сколько может быть одинаковых среди всевозможных сумм задуманных чисел одного знака. Одно задуманное число даёт одну сумму; два различных задуманных числа одного знака дают три различные суммы; три различных задуманных числа одного знака дают семь сумм, среди которых не более двух (задуманное число, наибольшее по модулю, и сумма двух других задуманных чисел) совпадают; четыре различных задуманных числа одного знака дают 15 сумм, среди которых не может быть трёх одинаковых. Значит, среди сумм положительных и отрицательных чисел совпадают по модулю не более четырёх. Таким образом, если было задумано не более пяти различных ненулевых чисел, то на доске окажется не более четырёх нулей.

Если были задуманы числа $-5; -2; -1; 1; 2; 3$, то на доске окажется ровно шесть нулей. Значит, наименьшее количество задуманных чисел — 6.

в) Нет, не всегда. Например, для задуманных чисел $-3, 1, 2$ и $-2, -1, 3$ на доске будет выписан один и тот же набор $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Ответ: а) $-3, 2, 7$; б) 6; в) нет.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — оценка количества задуманных чисел в п. а; — пример в п. а; — обоснованное решение п. б; — обоснованное решение п. в	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

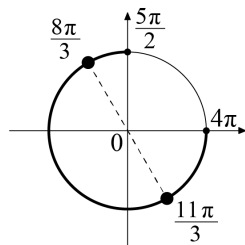
C1

а) Решите уравнение $12^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3} \cos x}$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$4^{\sin x} \cdot 3^{\sin x} = 4^{\sin x} \cdot 3^{-\sqrt{3} \cos x}; \quad 3^{\sin x} = 3^{-\sqrt{3} \cos x};$$

$$\sin x = -\sqrt{3} \cos x; \quad \operatorname{tg} x = -\sqrt{3},$$

откуда $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.Получим числа: $\frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$.Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру $B_1 C_1$ и делит его в отношении 8:3, считая от вершины B_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K .

Решение.

Пусть L — точка, в которой плоскость сечения пересекает ребро $C_1 D_1$. Отрезок KL параллелен диагонали BD . Искомое сечение — трапеция $BDLK$ (рис. 1). Плоскость сечения пересекает нижнее основание по прямой BD , параллельной $B_1 D_1$, значит, KL параллельно $B_1 D_1$.

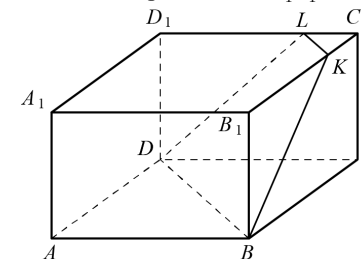


Рис. 1

Треугольники $LC_1 K$ и $D_1 C_1 B_1$ подобны, следовательно,

$$C_1 L : C_1 D_1 = C_1 K : C_1 B_1 = KL : B_1 D_1 = 3 : 11.$$

Значит, $BD = B_1 D_1 = 11\sqrt{2}$, $KL = 3\sqrt{2}$.

В равных прямоугольных треугольниках $DD_1 L$ и $BB_1 K$ имеем $BK = DL = \sqrt{DD_1^2 + D_1 L^2} = \sqrt{113}$, значит, трапеция $BDLK$ равнобедренная.

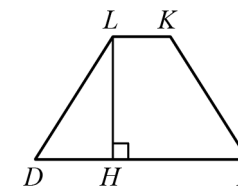


Рис. 2

Пусть LH — высота трапеции $BDLK$, проведённая к основанию BD (рис. 2), тогда:

$$DH = \frac{BD - KL}{2} = 4\sqrt{2}; \quad LH = \sqrt{DL^2 - DH^2} = 9;$$

$$S_{BDLK} = \frac{BD + KL}{2} \cdot LH = 63\sqrt{2}.$$

Ответ: $63\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x} \frac{x+3}{(x-4)^2} \geq -2, \\ x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{4-x} \frac{x+3}{(x-4)^2} \geq -2; \log_{4-x}(x+3) - \log_{4-x}(x-4)^2 \geq -2; \log_{4-x}(x+3) \geq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 4 - x < 1$;

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+3) \geq 0, & \begin{cases} 0 < x+3 \leq 1, \\ 3 < x < 4; \end{cases} \text{ нет решений.} \\ 0 < 4 - x < 1; \end{cases}$$

Второй случай: $4 - x > 1$;

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+3) \geq 0, & \begin{cases} x+3 \geq 1, \\ x < 3, \end{cases} \text{ откуда } -2 \leq x < 3. \\ 4 - x > 1; \end{cases}$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-2 \leq x < 3$.

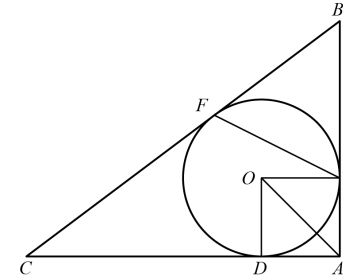
2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \leq 2; \quad x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2}{x-5} \leq 0;$$

$$\frac{x^4 + x^3 - 2x^2}{x-5} \leq 0; \quad \frac{x^2(x-1)(x+2)}{x-5} \leq 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \leq -2$; $x = 0$; $1 \leq x < 5$.3. Решение исходной системы неравенств: $x = -2$; $x = 0$; $1 \leq x < 3$.Ответ: -2 ; 0 ; $[1; 3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.Решение.а) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC .

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит, AO — биссектриса угла BAC . Треугольник AOD прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle OAD = 45^\circ$. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$.

б) Обозначим $BF = x$. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AE = AD = 5$, $CF = CD = 15$ и $BE = BF = x$. По теореме Пифагора $BC^2 = AC^2 + AB^2$, или $(15 + x)^2 = 20^2 + (5 + x)^2$. Из этого уравнения находим, что $x = 10$. Тогда

$$BC = 25, \sin \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 40.$$

Ответ: 40.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), пункт а) не выполнен	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), при этом используется недоказанное утверждение из пункта а). ИЛИ Выполнен пункт а), пункт б) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x - a + 6| = |x + a - 6| - (a - 6)^2$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$x^2 + (a - 6)^2 = |x + a - 6| + |x - a + 6|.$$

Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет нечётное число корней, только если $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$. Подставим значение $x = 0$ в уравнение:

$$(a - 6)^2 = 2|a - 6|; \quad |a - 6| \cdot (|a - 6| - 2) = 0,$$

откуда либо $|a - 6| = 0$; $a = 6$, либо $|a - 6| = 2$; $a = 4$ или $a = 8$.

При $a = 6$ уравнение принимает вид $x^2 = 2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа $-2, 0$ и 2 , то есть уравнение имеет ровно три корня.

При $a = 4$ и при $a = 8$ уравнение принимает вид $x^2 + 4 = |x - 2| + |x + 2|$.

При $x < -2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2 + 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $-2 \leq x \leq 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень.

При $x > 2$ получаем уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

Таким образом, при $a = 4$ и при $a = 8$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $a = 4$ и $a = 8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены оба значения a , но в ответ включено не более одного постороннего значения a	3
Обоснованно получено одно из значений a	2
Получен один из следующих результатов: — задача верно сведена к исследованию квадратных уравнений, полученных после раскрытия модулей; — есть утверждение о симметрии корней исходного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 6, 9, 12, 15.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Решение.

а) Задуманные числа 3, 3, 3, 3, 3 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $23 - 1 = 22$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 8 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части числа $\frac{47}{8}$, то есть 5. Кроме того, числа 9 и 10 меньше, чем сумма

двух восьмёрок, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $47 - 8 - 9 - 10 = 20$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 8, оставшиеся задуманные числа —

это 10 и 10 или 20 (если бы 20 получалось как $8+12$ или $9+11$, то были бы выписаны числа 12 или 11, но их нет). Для задуманных чисел 8, 9, 10, 10, 10 и 8, 9, 10, 20 на доске будет записан набор, данный в условии. (Для чисел 8, 9, 10, 20 это можно проверить непосредственно, а для чисел 8, 9, 10, 10, 10 — заметить, что они будут давать точно те же суммы, что и числа 8, 9, 10, 20.)

Ответ: а) 3, 3, 3, 3, 3; б) нет; в) 8, 9, 10, 10, 10 или 8, 9, 10, 20.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. в; — оба набора задуманных чисел в п. в	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

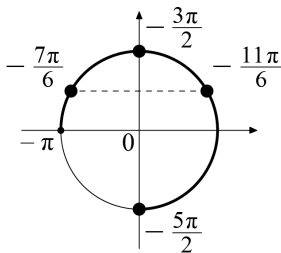
Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $\left(25^{\cos x}\right)^{\sin x} = 5^{\cos x}$.б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$5^{2\sin x \cos x} = 5^{\cos x}; \quad 2\sin x \cos x = \cos x; \quad \cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0.$$

Значит, либо $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, либо $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.Получим числа $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}$.Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $4:5$, считая от вершины B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , O и C_1 .

Решение.

Пусть плоскость AOC_1 пересекает ребро DD_1 в точке P . Плоскость сечения пересекает плоскость $CC_1 D_1$ по прямой $C_1 P$, параллельной AO , следовательно, искомое сечение — параллелограмм $AOC_1 P$ (рис. 1).

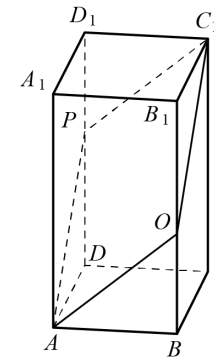


Рис. 1

Треугольники ADP и $C_1 B_1 O$ равны, следовательно,

$$DP = B_1 O = \frac{5}{9} BB_1 = 5; \quad BO = BB_1 - B_1 O = 4. \text{ Далее,}$$

$$AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = \sqrt{41}; \quad AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{41},$$

значит, $AOC_1 P$ — ромб со стороной $\sqrt{41}$ и диагональю $AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{122}$ (рис. 2).

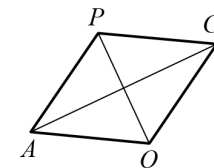


Рис. 2

Тогда другая диагональ

$$OP = 2\sqrt{AO^2 - \left(\frac{AC_1}{2}\right)^2} = \sqrt{42}; \quad S_{AOC_1 P} = \frac{AC_1 \cdot OP}{2} = \sqrt{1281}.$$

Ответ: $\sqrt{1281}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено. ИЛИ При правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4, \\ x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4; \quad \log_{5-x} (x+2) - \log_{5-x} (x-5)^4 \geq -4;$$

$$\log_{5-x} (x+2) \geq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 5 - x < 1$;

$$\begin{cases} \log_{5-x} (x+2) \geq 0, \\ 0 < 5 - x < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x+2 \leq 1, \\ 4 < x < 5; \end{cases} \quad \text{нет решений.}$$

Второй случай: $5 - x > 1$;

$$\begin{cases} \log_{5-x} (x+2) \geq 0, \\ 5 - x > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2 \geq 1, \\ x < 4, \end{cases} \quad \text{откуда } -1 \leq x < 4.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-1 \leq x < 4$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x-6} \leq 5; \quad x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2}{x-6} \leq 0;$$

$$\frac{x^4 - x^3 - 2x^2}{x-6} \leq 0; \quad \frac{x^2(x+1)(x-2)}{x-6} \leq 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \leq -1$; $x = 0$; $2 \leq x < 6$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -1$; $x = 0$; $2 \leq x < 4$.

Ответ: -1 ; 0 ; $[2; 4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4

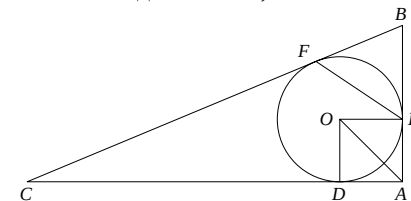
В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 2$ и $CD = 10$.

Решение.

а) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC . Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит, AO — биссектриса угла BAC . Треугольник AOD прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle OAD = 45^\circ$. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$.



б) Обозначим $BF = x$. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AE = AD = 2$, $CF = CD = 10$ и $BE = BF = x$. По теореме Пифагора $BC^2 = AC^2 + AB^2$, или $(10 + x)^2 = 12^2 + (2 + x)^2$. Из этого уравнения находим, что $x = 3$. Тогда

$$BC = 13, \quad \sin \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{12}{13} = \frac{54}{13}.$$

Ответ: $\frac{54}{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), пункт а) не выполнен	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), при этом используется недоказанное утверждение из пункта а). ИЛИ Выполнен пункт а), пункт б) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (1-a)^2 = |x-1+a| + |x-a+1|$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$x^2 + (a-1)^2 = |x+a-1| + |x-a+1|.$$

Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень, только если $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$. Подставим значение $x=0$ в исходное уравнение:

$$(1-a)^2 = 2|1-a|; |1-a| \cdot (|1-a| - 2) = 0,$$

откуда либо $|1-a| = 0$; $a=1$, либо $|1-a| = 2$; $a = -1$ или $a = 3$.

При $a=1$ исходное уравнение принимает вид $x^2 = 2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа -2 ; 0 и 2 , то есть исходное уравнение имеет более одного корня.

При $a = -1$ и при $a = 3$ уравнение принимает вид $x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$.

При $x < -2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2 + 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $-2 \leq x \leq 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень.

При $x > 2$ получаем уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $a = -1$ и при $a = 3$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $a = -1$; $a = 3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены оба значения a , но в ответ включено не более одного постороннего значения a	3
Обоснованно получено одно из значений a	2
Получен один из следующих результатов: — задача верно сведена к исследованию квадратных уравнений, полученных после раскрытия модулей; — есть утверждение о симметрии корней исходного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6

Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-3, -1, 2, 4, 6, 7, 9$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Решение.

а) Если было задумано 4 числа или более, то на доске должно быть записано не менее 15 чисел. Если было задумано 2 числа или меньше, то на доске должно быть записано не более 3 чисел. Значит, было задумано 3 числа. Если бы было задумано 2 отрицательных числа, то на доске было бы выписано не менее трёх отрицательных чисел. Значит, отрицательное число одно, и это число — наименьшее число в наборе, то есть -3 . Наибольшее число в наборе 9 является суммой двух положительных задуманных чисел. Из положительных выписанных чисел только 2 и 7 дают в сумме 9. Значит, были задуманы числа $-3, 2$ и 7 .

б) Рассмотрим различные задуманные числа, среди которых нет нуля. Пусть для этих чисел в наборе на доске оказалось ровно k нулей. Если добавить к задуманным числам нуль, то на доске окажется ровно $2k+1$ нулей: k нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел, k нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел и задуманного нуля, и задуманный нуль. Таким образом, если среди задуманных чисел есть нуль, то в наборе на доске окажется нечётное количество нулей.

Поскольку на доске выписано ровно 6 нулей, среди задуманных чисел нет нуля. Пусть задумано пять или меньше (ненулевых) чисел. Среди них есть

положительные и отрицательные. Нуль получается тогда, когда сумма некоторого количества положительных чисел равна по модулю сумме некоторого количества отрицательных чисел. Подумаем, сколько может быть одинаковых среди всевозможных сумм задуманных чисел одного знака. Одно задуманное число даёт одну сумму; два различных задуманных числа одного знака дают три различные суммы; три различных задуманных числа одного знака дают семь сумм, среди которых не более двух (задуманное число, наибольшее по модулю, и сумма двух других задуманных чисел) совпадают; четыре различных задуманных числа одного знака дают 15 сумм, среди которых не может быть трёх одинаковых. Значит, среди сумм положительных и отрицательных чисел совпадают по модулю не более четырёх. Таким образом, если было задумано не более пяти различных ненулевых чисел, то на доске окажется не более четырёх нулей.

Если были задуманы числа -5 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 , то на доске окажется ровно шесть нулей. Значит, наименьшее количество задуманных чисел — 6.

в) Нет, не всегда. Например, для задуманных чисел -3 , 1 , 2 и -2 , -1 , 3 на доске будет выписан один и тот же набор -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 .

Ответ: а) -3 , 2 , 7 ; б) 6 ; в) нет.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — оценка количества задуманных чисел в п. а; — пример в п. а; — обоснованное решение п. б; — обоснованное решение п. в	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4