Серия
РЕШЕБНИК

ТОЛЬКО ДЛЯ РОДИТЕЛЕЙ

Домашняя работа по алгебре 11

«АЛГЕБРА
И НАЧАЛА
АНАЛИЗА
10 – 11 классы»
А.Н. Колмогоров и др.

А.С. Рылов, А.А. Сапожников

Домашняя работа по алгебре и началам анализа за 11 класс

к учебнику «Алгебра и начала анализа: учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений / [А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.]; под ред. А.Н. Колмогорова. — 16-е изд. — М.: Просвещение, 2007»

Учебно-методическое пособие

Издание одиннадцатое, переработанное и исправленное

Издательство
«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА
2009

УДК 373.167 1.512
ББК 22 141я721
Р95

Имя автора и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги (ст 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Изображение учебника «Алгебра и начала анализа: учеб. для 10–11 кл общеобразоват учреждений / [А.Н. Колмогоров, А.М Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.], под ред. А.Н. Колмогорова. — 16-е изд. —М. Просвещение, 2007» приведено на обложке данного издания исключительно в качестве иллюстративного материала (ст 1274 п 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации)

Рылов, А.С.

Р95 Домашняя работа по алгебре и началам анализа за 11 класс к учебнику А.Н. Колмогорова и др. «Алгебра и начала анализа: учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений»: учебно-методическое пособие / А.С. Рылов, А.А. Сапожников. — 11-е изд., перераб. и испр. — М.. Издательство «Экзамен», 2009. — 223, [1] с. (Серия «Решебник»)

ISBN 978-5-377-02257-2

В пособии решены и в большинстве случаев подробно разобраны задачи и упражнения из учебника «Алгебра и начала анализа: учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений / [А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.]; под ред. А.Н Колмогорова. — 16-е изд. —М.: Просвещение, 2007».

Пособие будет полезно родителям, которые смогут проконтролировать правильность решения, а в случае необходимости помочь детям в выполнении домашней работы по алгебре и началам анализа.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721

Формат 84х108/32. Гарнитура «Таймс»
Бумага типографская. Уч.-изд. л. 8,12. Усл. печ. л. 11,76
Тираж 20 000 экз. Заказ № 5879(3)

ISBN 978-5-377-02257-2

Оглавление

ГЛАВА III. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

§ 7. Первообразная

26. Определение первообразной

326. а) $F(x) = x^5$ – первообразная для $f(x) = 5x^4$ на R;
б) $F(x) = x^{-3}$ – первообразная для $f(x) = -3x^{-4}$ на $(0;\infty)$;
в) $F(x) = \frac{1}{7}x^7$ – первообразная для $f(x) = x^6$ на R;
г) $F(x) = -\frac{1}{6}x^{-6}$ – первообразная для $f(x) = x^{-7}$ на $(0;\infty)$.

327. а) $F'(x) = -\cos x \neq \cos x$, $F(x) = 3 - \sin x$ на R;
б) $F'(x) = (5 - x^4)' = -4x^3$ для любого $x \in R$, таким образом $F(x) = 5 - x^4$ является первообразной для $f(x) = -4x^3$ на R;
в) $F'(x) = (\cos x - 4)' = -\sin x$ для любого $x \in R$, таким образом $F(x) = \cos x - 4$ является первообразной для $f(x) = -\sin x$ на R;
г) $F'(x) = (x^{-2} + 2)' = -\frac{2}{x^3}$ для любого $x \in (0;\infty)$, таким образом

$F(x) = x^2 + 2$ не является первообразной для $f(x) = \frac{1}{2x^3}$ на $(0;\infty)$.

328. а) $F(x) = 3{,}5x + 10$, т.к. $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in R$;
б) $F(x) = \sin x + 3$, т.к. $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in R$;
в) $F(x) = x^2 + 2$, т.к. $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in R$;
г) $F(x) = 8$, т.к. $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in R$.

329. а) $F(x) = \cos x + 4$, т.к. $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in R$;
б) $F(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2$, т.к. $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in R$;
в) $F(x) = 4(5 - x)$, т.к. $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in R$;
г) $F(x) = 1 - \sin x$, т.к. $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in R$.

330. а) $F'(x) = (\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$ для любого $x \in R$,
б) $F'(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x)' = \frac{1}{2}(-2)\sin 2x = -\sin 2x$ для любого $x \in R$,
в) $F'(x) = (\sin 3x)' = 3\cos 3x$ для любого $x \in R$;
г) $F'(x) = \left(3 + tg\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$ для любого $x \in (-\pi;\pi)$.

331. а) $F'(x) = \left(2x + \cos\frac{x}{2}\right)' = 2 - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} = f(x)$ для любого $x \in R$;

б) $F'(x)=\left(\sqrt{4-x^2}\right)'=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=f(x)$ для любого $x\in(-2;2)$;

в) $F'(x)=\left(\frac{1}{x^2}\right)'=-\frac{2}{x^3}$ для любого $x\in(0;\infty)$;

г) $F'(x)=4\left(x\sqrt{x}\right)'=4\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=4\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=6\sqrt{x}=f(x)$ для любого $x\in(0;\infty)$.

332. а) $F(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+8$, т.к. $F'(x)=f(x)$ для любого $x\in R$;

б) $F(x) = x + \cos x + 2$, т.к. $f(x)=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2=1-\sin x$ на R и

$F'(x)=1-\sin x$ для любого $x\in R$;

в) $F(x)=x-12$, т.к. $f(x)=\sin^2x+\cos^2x=1$ на R и $F'(x)=f(x)$ для любого $x\in R$;

г) $F(x)=x^3+x=5$, т.к. $F'(x)=f(x)$ для любого $x\in R$.

333. а) $F_1(x)=x^2+7$ и $F_2(x)=x^2+13$ – первообразные для $f(x)=2x$ на R;

б) $F_1(x)=x+\cos x+12$ и $F_2(x)=x+\cos x-1$ – первообразные для $f(x)=1-\sin x$ на R;

в) $F_1(x)=\frac{1}{3}x^3+3$ и $F_2(x)=\frac{1}{3}x^3+4$ – первообразные для $f(x)=x^2$ на R·

г) $F_1(x)=\sin x+2x+2$ и $F_2(x)=\sin x+2x-7$ – первообразные для $f(x)=\cos x+2$ на R.

334. а) $g(x)=-\frac{1}{x}$ – первообразная для $f(x)=\frac{1}{x^2}$ на $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$,

$f'(x)=-\frac{2}{x^3}=h(x)$;

б) $f(x)=\frac{x^2}{2}-\cos x$ – первообразная для $h(x)=x+\sin x$ на R,

$h'(x)=1+\cos x=g(x)$;

в) $h(x)=\frac{x^2}{2}+2x$ – первообразная для $g(x)=x+2$ на R, $g'(x)=1=f(x)$;

г) $g(x)=3x+2\cos x$ – первообразная для $f(x)=3-2\sin x$ на R,

$f'(x)=-2\cos x=h(x)$.

27. Основное свойство первообразной

335. а) $f(x) = 2 - x^4$;
$F(x) = 2x - \frac{1}{5}x^5 + C$;

б) $f(x) = x + \cos x$;
$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + C$;

в) $f(x) = 4x$; $F(x) = 2x^2 + C$;

г) $f(x) = -3$; $F(x) = -3x + C$.

336. а) $f(x) = x^6$; $F(x) = \frac{1}{7}x^7 + C$; б) $f(\ ) = \frac{1}{x^3} - 2$; $F(x) = -\frac{1}{2x^2} - 2x + C$;

в) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^4}$ $F(x) = x + \frac{1}{3x^3} + C$, г) $f(x) = x^5$; $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + C$.

337 а) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $F(x) = -\frac{1}{x} + C$: $F\left(\frac{1}{2}\right) = -2 + C = -12.C = -10$,

$F(x) = -\frac{1}{x} - 10$;

б) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.F(x) = tgx + C; F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + C = 0, C = -1$; $F(x) = tgx - 1$;

в) $f(x) = x^3$, $F(x) = \frac{x^4}{4} + C; F(-1) = \frac{1}{4} + C = 2, C = 1\frac{3}{4}$; $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 1\frac{3}{4}$;

г) $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x + C$; $F(-\pi) = 1 + C$, $C = -2$;
$F(x) = -\cos$-2 – первообразная для $f(x) = \sin x$; $F(-\pi) = -1$.

338. а) $F'(x) = (\sin x)' - (x\cos x)' = \cos x - \cos x + x\sin x = f(x)$;
$F(x) = \sin x - x\cos x + C$ – общая первообразная;

б) $F'(x) = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(x^2\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$;

$F(x) = \sqrt{x^2+1} + C$ – общая первообразная;
в) $F'(x) = (\cos x)' + (x\sin x)' = -\sin x + \sin x + x\cos x = x\cos x = f(x)$;
$F(x) = \cos x + x\sin x + C$ – общая первообразная;

г) $F'(x) = x'$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1+x^2}{x^2} = f(x)$;

$F(x) = x - \frac{}{x} + C$ - общая первообразная.

339. а) $f(x) = 2\cos x$, $F(x) = 2\sin x + C$; $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2 + C = 1, C = 3$;

$F(x) = 2\sin x + 3$ – искомая первообразная;

б) $f(x = 1 - x^2$, $F(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + C$; $F(-3) = -3 + 9 + C = 6 + C = 9$, $C = 3$;

$F(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + 3$ – искомая первообразная;

в) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right), F(x)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+C; F\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\pi+C=1+C=-1, C=-2;$

$F(x)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$ – искомая первообразная;

г) $f(x)=\frac{1}{x^4}, F(x)=-\frac{1}{3x^3}+C; F\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{8}{3}+C=3, C=5\frac{2}{3};$

$F(x)=-\frac{1}{3x^3}+5\frac{2}{3}$ – искомая первообразная.

340. а) $f(x) = 2 - \sin x$, $F_1(x) = 2x + \cos x$ и $F_2(x) = 2x + \cos x + C$;
$F_2(x) - F_1(x) = C = 4$; $F_1(x) = 2x + \cos x$ и $F_2(x) = 2x + \cos x + 4$ – две искомые первообразные;

б) $f(x)=1+\mathrm{tg}^2x=\frac{1}{\cos^2 x}, F_1(x)=\mathrm{tg}x+C$ и $F_2(x)=\mathrm{tg}x$; $F_1(x)-F_2(x)=C=1$,

$F_1(x) = \mathrm{tg}x + 1$ и $F_2 = \mathrm{tg}x$ – две искомые первообразные;

в) $f(x)=\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=-\cos x, F_1(x)=-\sin x$ и $F_2(x) = -\sin x + C$;

$F_2(x) - F_1(x) = C = \frac{1}{2}$;

$F_1(x) = -\sin x$ и $F_2(x) = -\sin x + 0{,}5$ – две искомые первообразные;

г) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}, F_1(x)=2\sqrt{x}$ и $F_2(x)=2\sqrt{x}+C$; $F_2(x)-F_1(x)=C=2$;

$F_1(x)=2\sqrt{x}$ и $F_2(x)=2\sqrt{x}+2$ – две искомые первообразные.

341. а) $a(t) = -2t$, $v(t) = -t^2 + C_1$, $x(t)=-\frac{t^3}{3}+C_1t+C_2$,

$v(1) = -1 + C_1 = 2$, $C_1 = 3$; $x(t)=-\frac{t^3}{3}+3t+C_2$,

$x(1)=-\frac{1}{3}+3+C_2=4, C_2=1\frac{1}{3}$; $x(t)=-\frac{t^3}{3}+3t+\frac{4}{3}$;

б) $a(t) = \sin t$, $v(t) = -\cos t + C_1$, $x(t) = -\sin t + C_1t + C_2$; $v\left(\frac{\pi}{2}\right)=C_1=1$;

$x(t) = -\sin t + t+C_2$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1+\frac{\pi}{2}+C_2=2, C_2=3-\frac{\pi}{2}$; $x(t)=-\sin t+t+3-\frac{\pi}{2}$,

в) $a(t) = 6t$, $v(t) = 3t^2 + C_1$, $x(t) = t^3 + C_1t + C_2$; $v(0) = C_1 = 1$;
$x(t) = t^3 + t + C_2$, $x(0) = C_2 = 3$; $x(t) = t^3 + t + 3$;
г) $a(t) = \cos t$, $v(t) = \sin t + C_1$, $x(t) = -\cos t + C_1t + C_2$; $v(\pi) = C_1 = 0$,
$x(t) = -\cos t + C_2$, $x(\pi) = 1 + C_2 = 1$, $C_2 = 0$; $x(t) = -\cos t$.

28. Три правила нахождения первообразных

342. а) $f(x) = 2 - x^3 + \frac{1}{x^3}$; поэтому

$F(x) = 2x - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2} + C$ – общий вид первообразных для f(x);

б) $f(x) = x - \frac{2}{x^5} + \cos x$;

$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^4} + \sin x + C$ – общий вид первообразных для f(x);

в) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \sin x$;

$F(x) = -\frac{1}{x} + \cos x + C$ – общий вид первообразных для f(x);

г) $f(x) = 5x^2 - 1$;

$F(x) = \frac{5}{3}x^3 - x + C$ – общий вид первообразных для f(x).

343. а) $f(x) = (2x - 3)^5$; $F(x) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}(2x-3)^6 + C = \frac{1}{12}(2x-3)^6 + C$ – общий вид первообразных для f(x);

б) $f(x) = 3\sin 2x$; $F(x) = \frac{1}{2}\cdot(-3)\cdot\cos 2x + C = -1{,}5\cos 2x + C$ — общий вид первообразных для f(x);

в) $f(x) = (4 - 5x)^7$; $F(x) = -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}(4-5x)^8 + C = -\frac{1}{40}(4-5x)^8 + C$ – общий вид первообразных для f(x);

г) $f(x) = -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$; $F(x) = -\frac{1}{3}\cdot 3\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + C = -\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + C$ – общий вид первообразных для f(x).

344. а) $f(x) = \frac{3}{(4 - 15x)^4}$, $F(x) = -\frac{1}{15}\cdot\left(-\frac{1}{(4-15x)^3}\right) + C = \frac{1}{15(4-15x)^3} + C$ – общий вид первообразных для f(x);

б) $f(x) = \frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$;

$F(x) = -2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + C$ – общий вид первообразных для f(x);

в) $f(x)=\frac{4}{(3x-1)^2}$. $F(x)=\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{(3x-1)}\right)+C=-\frac{4}{3(3x-1)}+C$ – **общий вид** первообразных для f(x);

г) $f(x)=-\frac{2}{x^5}+\frac{1}{\cos^2(3x-1)}$;

$F(x)=\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3}tg(3x-1)+C$ – общий вид первообразных для f(x).

345. а) $f(x)=4x+\frac{1}{x^2}$; $F(x)=2x^2-\frac{1}{x}+C$ – общая первообразная;

$F(-1)=2+1+C=4$, $C=1$; $F(x)=2x^2-\frac{1}{x}+1$ – искомая первообразная;

б) $f(x)=x^3+2$; $F(x)=\frac{x^4}{4}+2x+C$ – общая первообразная;

$F(2)=4+4+C=15$, $C=7$; $F(x)=\frac{x^4}{4}+2x+7$ – искомая первообразная;

в) $f(x)=1-2x$; $F(x)=x-x^2+C$ – общая первообразная;

$F(3)=3-9+C=2$, $C=8$; $F(x)=x-x^2+8$ – искомая первообразная;

г) $f(x)=\frac{1}{x^3}-10x^4+3$; $F(x)=-\frac{1}{2x^2}-2x^5+3x+C$ – общая первообразная;

$F(1)=-\frac{1}{2}-2+3+C=5$; $C=4\frac{1}{2}$;

$F(x)=-\frac{1}{2x^2}-2x^5+3x+4{,}5$ – искомая первообразная.

346. а) $f(x)=1-\cos 3x+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;

$F(x)=x-\frac{1}{3}\sin 3x+2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+C$ – общая первообразная;

б) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 4x}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}-3x^2$;

$F(x)=-\frac{1}{4}ctg4x-2\sqrt{2-x}-x^3+C$ – общая первообразная;

в) $f(x)=\frac{2}{\cos^2(3x+1)}-3\sin(4-x)+2x$;

$F(x)=\frac{2}{3}tg(3x+1)-3\cos(4-x)+x^2+C$ – общая первообразная;

г) $f(x)=\frac{1}{(3-2x)^3}+\frac{3}{\sqrt{5x-2}}-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

$F(x)=\frac{1}{4(3-2x)^2}+\frac{6}{5}\sqrt{5x-2}+2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+C$ – общая первообразная.

347. а) $f(x) = 2x + 1$; $F(x) = x^2 + x + C$ – общая первообразная;
$F(0) = 0$: $C = 0$; $F(x) = x^2 + x$ – искомая первообразная;
б) $f(x) = 3x^2 - 2x$; $F(x) = x^3 - x^2 + C$ – общая первообразная
$F(1)=4$: $1-1 + C = 4$, $C = 4$; $F(x) = x^3 - x^2 + 4$ – искомая первообразная;
в) $f(x) = x + 2$; $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$ – общая первообразная;
$F(1)=3$: $\frac{1}{2}+2+C=3$, $C=\frac{1}{2}$; $F(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}$ – искомая первообразная;
г) $f(x) = -x^2 + 3x$; $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C$ – общая первообразная;
$F(2)=-1$: $-\frac{8}{3}+6+C=-1, C=-4\frac{1}{3}$; $F(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4\frac{1}{3}$ – искомая первообразная.

348. $v(t) = t^2 + 2t - 1$, т.к. $v(t)$ $x'(t)$, то
$x(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 - t + C$; $x(0)=0$: $C=0$; $x(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 - t$ – искомая функция.

349. $v(t) = 2\cos\frac{t}{2}$; $x(t) = 4\sin\frac{t}{2} + C$;
$x\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4: 4\sin\frac{\pi}{6} + C = 4, 2 + C = 4, C = 2$; $x(t) = 4\sin\frac{t}{2} + 2$.

350. $a(t) = 12t^2 + 4$; т.к. $a(t) = v'(t)$, то $v(t) = 4t^3 + 4t + C_1$; $v(1) = 10$: $4+4+C_1=10$; $C_1 = 2$; $v(t) = 4t^3 + 4t + 2$; $x(t) = t^4 + 2t^2 + 2t + C_2$; $x(1)=12$: $1+2+2+C_2=12$, $C_2=7$; $x(t)=t^4 + 2t^2 + 2t + 7$ – искомая функция.

351. а) $F = ma$, т.о. $a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{6-9t}{3} = 2 - 3t$; $v(t) = 2t - \frac{3}{2}t^2 + C_1$;
$v(1) = 2 - \frac{3}{2} + C_1 = 4$; $C_1=3{,}5$; $x(t)=t^2 - \frac{t^3}{2} + 3{,}5t + C_2$; $x(1)=-5$: $1-0{,}5+3{,}5+$
$+C_2 = -5$, $C_2 = -9$; $x(t) = t^2 - \frac{t^3}{2} + 3{,}5t - 9$ – искомая функция;
б) $F = ma$, т.о. $a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{14\sin t}{7} = 2\sin t$; $v(t) = -2\cos t + C_1$;
$V(\pi) = 2 + C_1 = 2, C_1 = 0$; $v(t) = -2\cos t$; $x(t) = -2\sin t + C_2$; $x(\pi) = C_2 = 3$;
$x(t) = -2\sin t + 3$ – искомая функция;
в) $F= ma$, т.о. $a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{25\cos t}{5} = 5\cos t$;
$v(t) = 5\sin t + C_1$; $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 + C_1 = 2, C_1 = -3$;

$v(t) = 5\sin t - 3$; $x(t) = -5\cos t - 3t + C_2$; $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2} + C_2 = 4, C_2 = 4 + \frac{3\pi}{2}$

$x(t) = -5\cos t - 3t + 4 + \frac{3\pi}{2}$ – искомая функция;

г) $F = ma$, т.о. $a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{8t+8}{4} = 2t + 2$;

$v(t) = t^2 + 2t + C_1$; $v(2) = 4 + 4 + C_1 = 9$, $C_1 = 1$;

$v(t) = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$; $x(t) = \frac{(t+1)^3}{3} + C_2$; $x(2) = 9 + C_2 = 7$, $C_2 = -2$,

$x(t) = \frac{(t+1)^3}{3} - 2$ – искомая функция.

352. а) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$; $F(x) = x^3 - x^2 + 4x + C$ – общая первообразная $F_1(-1) = 1$: $-1 - 1 - 4 + C_1 = 1$, $C_1 = 7$;
$F_1(x) = x^3 - x^2 + 4x + 7$ – первая первообразная;
$F_2(0) = 3$: $C_2 = 3$; $F_2(x) = x^3 - x^2 + 4x + 3$ – вторая первообразная,
$F_1(x) - F_2(x) = 4$ – следовательно график $F_1(x)$ расположен выше графика $F_2(x)$;
б) $f(x)=4x - 6x^2 + 1$; $F(x) = 2x^2 - 2x^3 + x + C$ – общая первообразная
$F_1(0) = 2$: $C_1 = 2$; $F_1(x) = 2x^2 - 2x^3 + x + 2$ – первая первообразная,
$F_2(1) = 3$: $2 - 2 + 1 + C_2 = 3$, $C_2 = 2$;
$F_2(x) = 2x^2 - 2x^3 + x + 2$ – вторая первообразная т.к.
$F_2(x)-F_1(x)=0$–отсюда следует, что графики $F_1(x)$ и $F_2(x)$ совпадают;

в) $f(x) = 4x - x^3$; $F(x) = 2x^2 - \frac{x^4}{4} + C$ – общая первообразная;

$F_1(2)=1$: $2\cdot4-4+C_1=1$, $C_1=-3$; $F_1(x)=2x^2 - \frac{x^4}{4} - 3$ –первая первообразная;

$F_2(-2) = 3$: $2\cdot4 - 4 + C_2 = 3$, $C_2 = -1$;

$F_2(x) = 2x^2 - \frac{x^4}{4} - 1$ – вторая первообразная;

$F_1(x) - F_2(x) = -2$ – таким образом график $F_1(x)$ расположен ниже графика $F_2(x)$;

г) $f(x) = (2x + 1)^2$; $F(x) = \frac{(2x+1)^3}{6} + C$ – общая первообразная;

$F_1(-3) = -1$: $-\frac{125}{6} + C_1 = -1, C_1 = 19\frac{5}{6}$;

$F_1(x) = \frac{(2x+1)^3}{6} + 19\frac{5}{6}$ – первая первообразная;

$F_2(1)=6\frac{1}{3}:\frac{27}{6}+C_2=6\frac{1}{3}, C_2=1\frac{5}{6}$;

$F_2(x)=\frac{(2x+1)^3}{6}+1\frac{5}{6}$ – вторая первообразная;

$F_1(x) - F_2(x) = 18$ – отсюда следует, что график $F_1(x)$ расположен выше графика $F_2(x)$.

§ 8. Интеграл

29. Площадь криволинейной трапеции

353. а) $y(x) = x^2$; $Y(x)=\frac{x^3}{3}$; $S = Y(3) - Y(0)=\frac{3^3}{3}=9$;

б) $y = \cos x$; $Y = \sin x$; $S=Y\left(\frac{\pi}{2}\right)-Y(0)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin 0=1$;

в) $y = \sin x$; $Y(x) = -\cos x$; $S = Y(\pi) - Y(0) = 1 + 1 = 2$;

г) $y(x)=-\frac{1}{x}$ – первообразная для функции $y=\frac{1}{x^2}$;

$S=y(2)-y(1)=-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$.

354. а) $Y(x)=\frac{x^4}{4}+x$ - первообразная для функции $y = x^3 + 1$;

$S=Y(2)-Y(0)=\frac{2^4}{4}+2=6$;

б) $Y(x) = x - 2\cos x$ – первообразная для функции $y = 1 + 2\sin x$;

$S=Y\left(\frac{\pi}{2}\right)-Y(0)=\frac{\pi}{2}-2\cos\frac{\pi}{2}+2\cos 0=\frac{\pi}{2}+2$;

в) $Y(x)=4x-\frac{x^3}{3}$ – первообразная для функции $y = 4 - x^2$;

$y = 0$ при $x = \pm 2$, поэтому $S = Y(2) - Y(-2)=2\cdot\left(4\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right)=10\frac{2}{3}$;

г) $Y(x)=x+\frac{1}{2}\sin x$ – первообразная для функции $y=1+\frac{1}{2}\cos x$;

$S=Y\left(\frac{\pi}{2}\right)-Y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)=1+\pi$.

355. а) $Y(x)=\frac{(x+2)^3}{3}$ – первообразная для функции $y = (x + 2)^2$;

y=0 при x=2; x = –2 при y = 4, поэтому $S = Y(0) - Y(-2) = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$,

б) $Y(x) = -\frac{1}{x+1} + x$ – первообразная для функции $y = \frac{1}{(x+1)^2} + 1$;

$S = Y(2) - Y(0) = -\frac{1}{2+1} + 2 + 1 = 2\frac{2}{3}$;

в) $Y(x) = x^2 - \frac{x^3}{3}$ – первообразная для функции $y = 2x - x^2$; функция

y = 0 при x = 0, x = 2, поэтому $S = Y(2) - Y(0) = 4 - \frac{8}{3} = 1\frac{1}{3}$,

г) $Y(x) = -\frac{(x-1)^4}{4}$ – первообразная для функции $y = -(x-1)^3$;

ограничена на $[0;1] \to S = Y(1) - Y(0) = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$.

356. $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$; а) $Y(x) = -3\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$;

$S = Y\left(\frac{3\pi}{4}\right) - Y\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -3\cos\frac{3\pi}{2} + 3\cos 0 = 3$; y = 2cos2x; б) y(x) = sin2,

$S = y\left(\frac{\pi}{4}\right) - y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$; $y = \sin x - \frac{1}{2}$; в) $y(x) = -\cos x - \frac{1}{2}x$

$S = y\left(\frac{5\pi}{6}\right) - y\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$; y = 1 – cosx;

г) y(x) = x – sinx; $S = y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 2$.

30. Формула Ньютона – Лейбница

357.

а) $\int_{-1}^{2} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{2} = \frac{32}{5} + \frac{1}{5} = \frac{33}{5} = 6\frac{3}{5}$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 =$
$= 1 - 0 = 1$;

в) $\int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg0 =$
$= 1 - 0 = 1.$

358. а) $\int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{2(2x+1)}\Big|_1^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$;

б) $\int\limits_0^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}dx = 6\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} = 6\sin\frac{\pi}{2} - 6\sin 0 = 6 - 0 = 6;$

в) $\int\limits_1^{10} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0{,}9;$

г) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\pi - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)(-1) = \frac{1}{2}$

359. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} = 1;\ \int\limits_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1;$ т.к. $1 = 1$, то $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int\limits_0^1 dx;$

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\cos\frac{\pi}{3} + \cos 0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$

$\int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{\frac{1}{4}} - 2\sqrt{\frac{1}{16}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$ т.к. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, то $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}};$

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1;\ \int\limits_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt[3]{3}} = 1 - 0 = 1;$

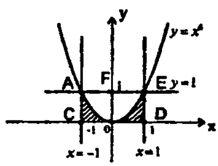
т.к. $1 = 1$, то $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int\limits_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx;$

г) $\int\limits_0^1 (2x+1)dx = x^2 + x\Big|_0^1 = 2;\ \int\limits_0^2 (x^3 - 1)dx = \frac{x^4}{4} - x\Big|_0^2 = 4 - 2 = 2;$ т.к. $2 = 2$, то

$\int\limits_0^1 (2x+1)dx = \int\limits_0^2 (x^3 - 1)dx.$

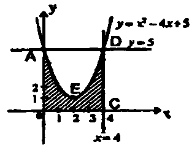
360. а) $S_{ACODE} = S_{ACO} + S_{OED} = 2S_{OED}$
т.к. функция $y = x^4$ четная;

$S_{ACODE} = 2\int\limits_0^1 x^4 dx = 2\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{2}{5};$



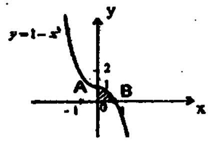
б) $S_{AFEO} = S_{ACDE} - S_{ACOED} = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5};$

в) $S_{AOCDE}=\int\limits_0^4 (x^2-4x+5)dx=\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x\Big|_0^4=\frac{64}{3}-32+20=\frac{28}{3}=9\frac{1}{3};$

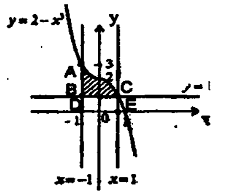


г) $S_{AED}=S_{AOCD}-S_{AOCDE}=20-9\frac{1}{3}=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}.$

361.

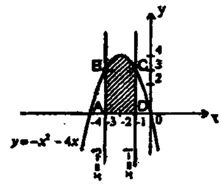


а) $S_{ABO}=\int\limits_0^1(1-x^3)dx=x-\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4};$



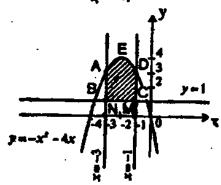
б) $S_{ABC}=S_{ADEC}-S_{BDEC}=2-\frac{1}{4}+2-\frac{1}{4}=4-2=$

$=\int(2-x^3)dx-2\cdot1=2x-\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1}-2=2;$



в) $S_{ABCD}=\int\limits_{-3}^{-1}(-x^2-4x)dx=-\frac{x^3}{3}-2x^2\Big|_{-3}^{-1}=$

$=\left(\frac{1}{3}-2\right)+(-9+18)=7\frac{1}{3};$



г) $S_{ABCDE}=S_{ANMDE}-S_{BNMC}=$

$=\int\limits_{-3}^{-1}(-x^2-4x)dx-2=7\frac{1}{3}-2=5\frac{1}{3};$

362. а) $\int\limits_{-\pi}^{2\pi}\sin\frac{x}{3}dx=-3\cos\frac{x}{3}\Big|_{-\pi}^{2\pi}=-3\left(\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=6\cos\frac{\pi}{3}=6\cdot\frac{1}{2}=3;$

б) $\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x+5}}=\sqrt{2x+5}\Big|_{-2}^{2}=\sqrt{9}-1=2;$ в) $\int\limits_{0}^{3\pi}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{9}}=9tg\frac{x}{9}\Big|_0^{3\pi}=9tg\frac{\pi}{3}=9\sqrt{3};$

г) $\int\limits_{-2}^{6}\frac{dx}{\sqrt{x+3}}=2\sqrt{x+3}\Big|_{-2}^{6}=2(\sqrt{9}-1)=4.$

363. а) $\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)^2dx=\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}}\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)dx=\left(x-2\cos\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}}=$

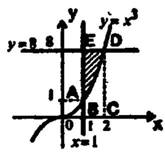
$=\left(\frac{2\pi}{3}-2\cos\frac{\pi}{3}\right)+2\cos 0=\frac{2\pi}{3}-1+2=\frac{2\pi}{3}+1;$

б) $\int\limits_0^2(1+2x)^3dx=\frac{(1+2x)^4}{8}\Big|_0^2=\frac{5^4}{8}-\frac{1}{8}=\frac{624}{8}=78;$

в $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx=\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{12}}=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4};$

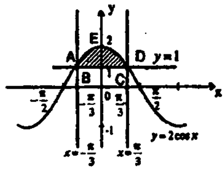
г) $\int\limits_1^4\left(x+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2\sqrt{x}\right)\Big|_1^4=\frac{16}{2}+2\sqrt{4}-\frac{1}{2}-2=\frac{19}{2}=9\frac{1}{2}.$

364.



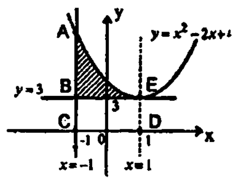
а) $S_{AED}=S_{BECD}-S_{ABCD}=$

$=1\cdot 8-\int\limits_1^2 x^3dx=8-\frac{x^4}{4}\Big|_1^2=8-3\frac{3}{4}=4\frac{1}{4};$



б) $S_{AED}=S_{AEDCB}-S_{ABCD}=$

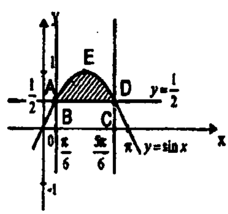
$=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}2\cos x dx-1\cdot\frac{2\pi}{3}=2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}-\frac{2\pi}{3}=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3};$



в) $x^2-2x+4=3$, $x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$, $x=1;$

$S_{ABE}=S_{ACDE}-S_{BCDE}=\int\limits_{-1}^1(x^2-2x+4)dx-2\cdot 3=$

$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+4x\right)\Big|_{-1}^1-6=8\frac{2}{3}-6=2\frac{2}{3};$

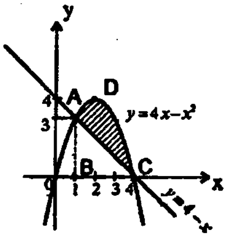


г) $S_{AED}=S_{ABCED}-S_{ABCD}=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sin x dx-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=$

$=-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}-\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}==\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$

365.

а) $4x-x^2=4-x$; $x^2-5x+4=0$; $x=4$; $x=1$;

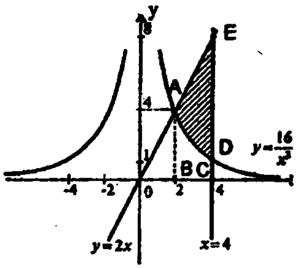


$S_{ADC}=S_{ABCD}-S_{ABC}=$

$$=\int_1^4(4x-x^2)dx-\frac{3\cdot3}{2}=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^4-\frac{9}{2}=$$

$$=\left(32-\frac{64}{3}\right)-\left(2-\frac{1}{3}\right)-\frac{9}{2}=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2};$$

б) $\frac{16}{x^2}=2x$; $x^3=8$; $x=2$;

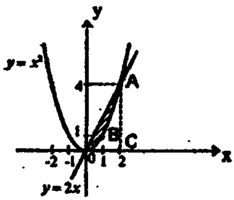


$$S_{OADC}=S_{OAB}+S_{ABCD}=\frac{2\cdot4}{2}+\int_2^4\frac{16dx}{x^2}=$$

$$=4-\frac{16}{x}\Big|_2^4=4-4+8=8;$$

$$S_{ADE}=S_{OEC}-S_{OADC}=\frac{4\cdot8}{2}-8=8;$$

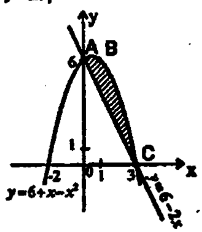
в) $x^2=2x$ при $x=0$; 2.



$$S_{OAB}=S_{OAC}-S_{OBAC}=\frac{2\cdot4}{2}-\int_0^2x^2dx=$$

$$=4-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3};$$

г) $6+x-x^2=6-2x$;
$x^2-3x=0$; $x=0$; $x=3$.

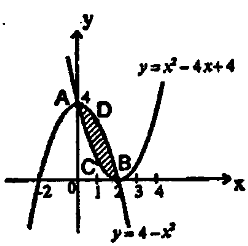


$$S_{ABC}=S_{OABC}-S_{AOC}=\int_0^3(6+x-x^2)dx-$$

$$-\frac{3\cdot6}{2}=\left(6x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3-9=18+\frac{9}{2}-9-9=\frac{9}{2}$$

366.

а) $x^2-4x+4=4-x^2$;
$2x^2-4x=0$; $x^2-2x=0$; $x=2$; $x=0$;



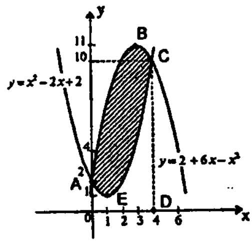
$$S_{ACBD}=S_{AOBD}-S_{AOBC}=\int_0^2(4-x^2)dx-$$

$$-\int_0^2(x^2-4x+4)dx=\int_0^2(4x-2x^2)dx=\left(2x^2-\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^2=$$

$= 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

б) $x^2 - 2x + 2 = 2 + 6x - x^2$

$2x^2 - 8x = 0$; $x^2 - 4x = 0$; $x = 0$; $x = 4$.

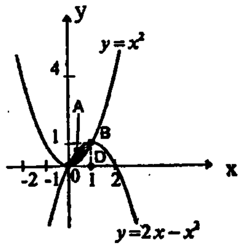


$S_{ABCE} = S_{OABCD} - S_{OAECD} =$

$$= \int (8x - 2x^2)dx = \left(4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^4 =$$

$$= 4 \cdot 16 - \frac{128}{3} = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}.$$

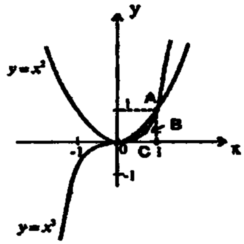
в) $x^2 = 2x - x^2$; $x^2 - x = 0$; $x = 0$; $x = 1$;



$S_{OAB} = S_{OABD} - S_{OBD} =$

$$= \int_0^1 (2x - 2x^2)dx = \left(x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

г) $x^2 = x^3$; $x^2(1 - x) = 0$; $x = 0$; $x = 1$;

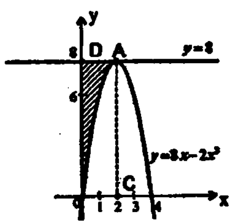


$$S_{OAB} = S_{OAC} - S_{OCAB} = \int_0^1 x^2dx - \int_0^1 x^3dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

367.

$y = 8x - 2x^2$; $x_в = \frac{-8}{-2} = 2$; $y_в = 16 - 8 = 8$.



точка A(2;8); $y'(x) = 8 - 4x$, $y'(2) = 0$;

$y_{кас} = y(2) + y'(2)(x-2) = 8$ – уравнение касательной;

$$S_{ODA} = S_{ODAC} - S_{OAC} = 2 \cdot 8 - \int_0^2 (8x - 2x^2)dx =$$

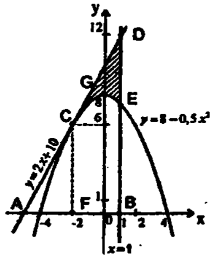
$$= 16 - \left(4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 16 - 16 + \frac{2 \cdot 8}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

368. $f(x) = 8 - 0{,}5x^2$; $f'(x) = -x$, $f'(-2) = 2$; $f(-2) = 6$;

$y(x) = f(-2) + 2(x+2) = 2x + 10$ – уравнение касательной; $y(1) = 2 \cdot 1 + 10 = 12$;

$$S_{CDE} = S_{FCDB} - S_{FCEB} = 3\cdot 6 + \frac{3\cdot 6}{2} - \int_{-2}^{1}(8 - 0{,}5x^2)dx = 27 - \left(8x - \frac{0.5x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= 27 - \left(8 - \frac{1}{6}\right) + \left(-16 + \frac{8}{6}\right) = 28{,}5 - 24 = 4{,}5.$$



369. а) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ и $\int_a^b g(x)dx = G(b) - G(a)$,

где F(x) и G(x) – первообразные на [a;b] для f(x) и g(x) соответственно;

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \left(F(x) + G(x)\right)\Big|_a^b = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) =$$

$$= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

б) $k\int_a^b f(x)dx = k[F(b) - F(a)]$, где F(x) – первообразная для f(x) на [a;b];

$$\int_a^b kf(x)dx = [kf(x)]\Big|_a^b = k[F(b) - F(a)] = k\int_a^b f(x)dx,$$ где k – const.

31. Применение интеграла

370. а) $V(x) = \pi\int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx = \pi\int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1)dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^1 =$

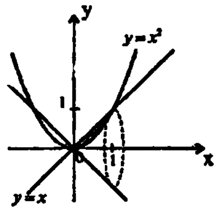
$$= \pi\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right) = 1\frac{13}{15}\pi;$$

б) $V(x) = \pi\int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^4 = \pi\left(8 - \frac{1}{2}\right) = 7\frac{1}{2}\pi;$

в) $V(x) = \pi\int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = \pi\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2};$ г) $y = 1 - x^2 = 0;\ x^2 = 1;\ x = \pm 1;$

$$V(x)=\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2\,dx=\pi\int_{-1}^{1}(1-2x^2+x^4)dx=\pi\left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=2\pi\cdot\frac{8}{15}=\frac{16\pi}{15}=1\frac{1}{15}\pi.$$



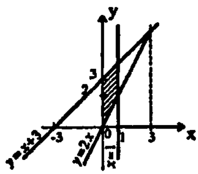
371. а) $V = V_{конуса} - V_0$, где

$V_{конуса}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi$, т.к. $r = h = 1$.

$V_0=\pi\int_0^1 x^4dx=\pi\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{1}{5}x$; $V=\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{5}\pi=\frac{2}{15}\pi$;

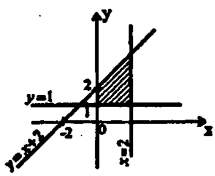
б) $V=\pi\int_0^1(x+3)^2dx-\pi\int_0^1(2x)^2dx=\pi\int_0^1(x^2+6x+9)dx-\pi\int_0^1 4x^2dx=$

$$=\pi\int_0^1(6x+9-3x^2)dx=\pi(3x^2+9x-x^3)\Big|_0^1=\pi(3\cdot1+9-1)=11\pi,$$

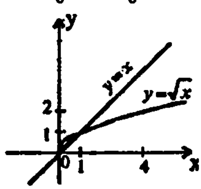


в) $V=\pi\int_0^2(x+2)^2dx-\pi\int_0^2dx=\pi\int_0^2(x^2+4x+4)dx-\pi x\Big|_0^2=$

$$=\pi\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\right)\Big|_0^2-2\pi=\pi\left(\frac{8}{3}+8+8\right)-2\pi=16\frac{2}{3}\pi.$$



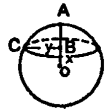
г) $V=\pi\int_0^1(\sqrt{x})^2dx-\pi\int_0^1x^2dx=\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-\pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}.$



372.

а) Пусть $|OB| = x$, тогда $S(x) = \pi y^2 = \pi(R^2 - x^2)$,

$S(x)$ – площшадь сечения шара, $x \in [R - H; R]$.

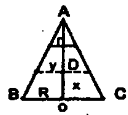


$$V = \int_{R-H}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi R^2 x \Big|_{R-H}^{R} - \pi\frac{x^3}{3}\Big|_{R-H}^{R} = \pi R^2 H - \frac{\pi}{3}\left[R^3 - (R-H)^3\right] =$$

$$= \pi R^2 H - \frac{\pi}{3}\left[3HR^2 - 3RH^2 + H^3\right] = \pi RH^2 - \frac{\pi H^3}{3}$$

б) Пусть $|OD| = x$, $S(x)$ – площадь сечения конуса,

$x \in \left[0; \frac{HR - r}{R}\right]$.



$S(x) = \pi y^2 = \pi\frac{R^2}{H^2}(H - x)^2$. При этом x меняется в пределах

$0 \le x \le \frac{H(R - r)}{R}$.

Т.о., $V = \int_0^{\frac{H(R-r)}{R}} \pi\frac{R^2}{H^2}(H - x)^2 dx = \int_0^{\frac{H(R-r)}{R}} \pi R^2 dx - \int_0^{\frac{H(R-r)}{R}} \frac{2\pi R^2}{H}\cdot x dx +$

$+ \int_0^{\frac{H(R-r)}{R}} \frac{R^2}{H^2}\cdot x^2 dx = \pi RH(R - r) - \frac{\pi R^2}{H}x^2\Big|_0^{\frac{H(R-r)}{R}} + \frac{\pi R^2}{H^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{H(R-r)}{R}} =$

$= \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.

373. $F = k\cdot x$, $k = \frac{F}{x}$; при $F = 2$Н, $x = 0{,}01$ м $\cdot$ $k = \frac{2}{0{,}01} = 200$;

$A = \int_0^{0,04} 200x dx = 100x^2\Big|_0^{0,04} = 0{,}16$ Дж.

374. $k = \frac{F}{x}$: при $F = 4$Н, $x = 0{,}08$ м $\cdot$ $k = \frac{4}{0{,}08} = 50$;

$A = \int_0^{0,08} 50x dx = 25x^2\Big|_0^{0,08} = 0{,}16$ Дж.

375. $F = -\frac{\gamma q}{r^2}$ (по закону Кулона). Т.к. работа равна $A = \int_a^b F(r)dr$, то

$A = \int_a^b -\frac{\gamma q}{r^2}dr = \gamma q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \gamma q\left(\frac{a - b}{ab}\right)$;

а) $a < b$, $q < 0$; $A = \gamma q\frac{(a - b)}{ab} = \frac{\gamma|q|}{ab}(b - a) > 0$;

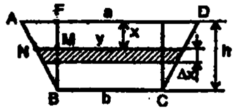
б) b < a, q > 0: $A = \gamma q \dfrac{(a-b)}{ab} > 0$.

376. Выделим на расстоянии x от верхнего основания плотины полоску толщиной Δx. Тогда сила давления воды на эту полоску равна $\Delta P = \rho g x y \Delta x$. Т.к. ΔABF подобен ΔNBM, то

$$\frac{|AF|}{|NM|} = \frac{|FB|}{|MB|} \text{ или } \frac{a-b}{y-b} = \frac{h}{h-x},\ y = b + (a-b)\left(1 - \frac{x}{h}\right),$$

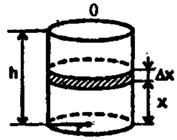
т.е. $P = \int\limits_0^h \rho g x\left(b + (a-b)\left(1 - \frac{x}{h}\right)\right)dx = \rho g\left[\frac{bx^2}{2} + \frac{(a-b)x^2}{2} - (a-b)\frac{x^3}{3h}\right]\Big|_0^h =$

$$= \rho g\left[\frac{h^2 a}{2} - \frac{h^2 a}{3} + \frac{h^2 b}{3}\right] = \frac{\rho g h^2 (a+2b)}{6}.$$



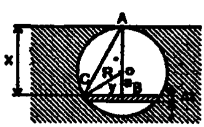
377. Пусть $\Delta x = \frac{h}{n}$ – толщина слоя воды, находящегося на расстоянии x от нижнего основания. Тогда работа, затрачиваемая на подъем этого слоя, равна $\Delta A = \rho g \Delta V \cdot x = \rho g \cdot \pi r^2 \Delta x \cdot x$. Полная работа равна

$A = \sum\limits_0^n \rho g \pi r^2 x \Delta x$. Если $n \to \infty$, то $A = \int\limits_0^h \rho g \pi r^2 x dx = \rho g \pi r^2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^h = \frac{\rho g \pi r^2 h^2}{2}$.



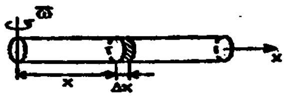
378. Разобьем шар на n слоев толщиной $\Delta x = \frac{2R}{n}$ каждый. Выделим один из таких слоев, находящийся на расстоянии x от точка A. Тогда работа против сил выталкивания при погружении этого слоя на глубину x есть $\Delta A = \rho g \Delta V \cdot x$. Пусть |OB| = a, тогда $y^2 = R^2 - a^2 = R^2 - (x-R)^2$ и $\Delta V \approx \pi y^2 \Delta x = \pi\left[R^2 - (x-R)^2\right]\Delta x = \pi \cdot x(2R - x)\Delta x$, тогда

$$A = \int\limits_0^{2R} \rho g \pi x^2 (2R - x)dx = \rho g \pi\left[\frac{2x^3 R}{3} - \frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^{2R} = \rho g \pi\left[\frac{2}{3} \cdot 8R^4 - \frac{16R^4}{4}\right] = \frac{3}{4}\rho g \pi R^4.$$



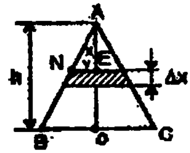
379. Разобьем стержень на n равных цилиндров, каждый из которых имеет высоту $\Delta x = \frac{l}{n}$.

$\Delta E = \frac{mv^2}{2}$, где $m = \rho\Delta V = \rho S\Delta x$ – масса цилиндра, $v = \varpi\cdot\left(\frac{x+\Delta x}{2}\right)$ – средняя линейная скорость точек цилиндра. Так как $\frac{\Delta x}{x} \to 0$, то $v \approx \omega x$. Т.о. $\Delta E \approx \rho S\Delta x\cdot\frac{\omega^2x^2}{2}$ и $E = \int\limits_0^l \rho Sdx\cdot\frac{\omega^2x^2}{2} = \frac{\rho S\omega^2}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^l = \frac{\rho S\omega^2 l^3}{6}$



380. Центр масс кругового конуса лежит на его оси (OA), объем ΔV находящийся на расстоянии x от вершины конуса, равен $\Delta V \approx \pi y^2\cdot\Delta x$. $\Delta ABO \sim \Delta ANE$; $\frac{x}{h} = \frac{y}{r}$, $y = \frac{r}{h}\cdot x$; тогда $\Delta V \approx \pi\frac{r^2}{h^2}x^2\Delta x$.

Координата ценра масс $x' = \frac{\int\limits_0^h \rho x dV}{\int\limits_0^h \rho dV} = \frac{\rho\int\limits_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^3dx}{\rho\int\limits_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}dx} = \frac{\int\limits_0^h x^3dx}{\int\limits_0^h x^2dx} = \frac{\frac{x^4}{4}\Big|_0^h}{\frac{x^3}{3}\Big|_0^h} = \frac{3}{4}h.$



ГЛАВА IV. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 9. Обобщение понятия степени

32. Корень n-й степени и его свойства

381. а) $\sqrt[4]{16} = 2$, $2^4 = 16$ и $2 > 0$; б) $\sqrt[7]{-1} = -1$, $(-1)^7 = -1$;
в) $\sqrt[10]{1024} = 2$, $2^{10} = 1024$ и $2 > 0$; г) $\sqrt[5]{243} = -3$, $(-3)^5 = -243$.

382. а) $\sqrt[17]{1} = 1$, $1^{17} = 1$; в) $\sqrt[3]{-343} = -7$, $(-7)^3 = -343$;
б) $\sqrt[6]{64} = 2$, $2^6 = 64$ и $2 > 0$; г) $\sqrt[19]{0} = 0$, $0^{19} = 0$.

383. а) $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$; б) $\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$;

в) $\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{(-2)^5}=-2$; г) $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$.

384. а) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5}=\frac{1}{2}$; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}=\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^4}=\frac{3}{5}$;

в) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2}\right)^3}=-\frac{3}{2}$; г) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}=\sqrt[4]{\left(\frac{3}{4}\right)^4}=\frac{3}{4}$.

385. а) $x^3+4=0$; $x=\sqrt[3]{-4}=-\sqrt[3]{4}$; б) $x^6=5$; $x=\pm\sqrt[6]{5}$;

в) $x^3=4$; $x=\sqrt[3]{4}$; г) $x^4=10$; $x=\pm\sqrt[4]{10}$.

386. а) $x^{10}-15=0$; $x^{10}=15$; $x=\pm\sqrt[10]{15}$;

б) $x^7+128=0$; $x^7=-128$; $x=\sqrt[7]{-128}=-2$;

в) $x^6-64=0$; $x^6=64$; $x=\pm2$; г) $x^5=3$; $x=\sqrt[5]{3}$.

387.

а) $16x^4-1=0$; $x^4=\frac{1}{16}$;

$x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{16}}=\pm\frac{1}{2}$;

б) $0{,}01x^3+10=0$; $x^3=-1000$;
$x=\sqrt[3]{-1000}=-10$;

в) $0{,}02x^6-1{,}28=0$; $x^6=64$;
$x=\pm\sqrt[6]{64}=-2$;

г) $12\frac{3}{4}-\frac{3}{4}x^2=0$; $x^2=17$;

$x=\pm\sqrt{17}$.

388.

а) $\sqrt[3]{x}=-0{,}6$; $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=(-0{,}6)^3$,
$x=-0{,}216$;

б) $\sqrt[4]{x}=3$; $\left(\sqrt[4]{x}\right)^4=3^4$; $x=81$;

в) $\sqrt{x}=5$; $\left(\sqrt{x}\right)^2=5^2$; $x=25$;

г) $\sqrt[7]{x}=-1$; $\left(\sqrt[7]{x}\right)^7=(-1)^7$; $x=-1$.

389. а) $\left(-\sqrt[4]{11}\right)^4=(-1)^4\ \left(\sqrt[4]{11}\right)^4=11$ б) $\left(2\sqrt[5]{-2}\right)^5=(-2)^5\cdot\left(\sqrt[5]{2}\right)^5=-32\cdot2=-64$;

в) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3=\sqrt[3]{7^3}=7$; г) $\left(-\sqrt[6]{2}\right)^6=(-1)^6\left(\sqrt[6]{2}\right)^6=2$.

390.

а) $\sqrt[4]{16\cdot625}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{625}=2\cdot5=10$; б) $\sqrt[5]{32\cdot243}=\sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{243}=2\cdot3=6$;

в) $\sqrt[3]{8\cdot343}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{343}=2\cdot7=14$; г) $\sqrt[4]{0{,}0001\cdot16}=\sqrt[4]{0{,}0001}\cdot\sqrt[4]{16}=0{,}1\cdot2=0{,}2$.

391. а) $\sqrt[5]{160\cdot625}=\sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{5^5}=2\cdot5=10$;

б) $\sqrt[3]{24\cdot9}=\sqrt[3]{8\cdot27}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}=2\cdot3=6$;

в) $\sqrt[4]{48\cdot 27}=\sqrt[4]{16\cdot 81}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{81}=2\cdot 3=6;$

г) $\sqrt[3]{75\cdot 45}=\sqrt[3]{125\cdot 27}=\sqrt[3]{125}\cdot\sqrt[3]{27}=5\cdot 3=15.$

392.

а) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}=\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{27}=3;$ б) $\sqrt[7]{16}\cdot\sqrt[7]{-8}=\sqrt[7]{-128}=-2;$

в) $\sqrt[5]{27}\cdot\sqrt[5]{9}=\sqrt[5]{243}=3;$ г) $\sqrt[3]{-25}\cdot\sqrt[6]{25}=\sqrt[3]{-25}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{-125}=-5.$

393. а) $\dfrac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{-5}}=\sqrt[3]{125}=5;$ б) $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}=\sqrt[4]{\dfrac{128}{8}}=\sqrt[4]{16}=2;$

в) $\dfrac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}=\sqrt[3]{-\dfrac{243}{9}}=\sqrt[3]{-27}=-3;$ г) $\dfrac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{2}}=\sqrt[6]{\dfrac{128}{2}}=\sqrt[6]{64}=2.$

394.

а) $\sqrt[6]{\dfrac{64}{100000000}}\cdot\sqrt[4]{39\dfrac{1}{16}}:\sqrt[3]{-3\dfrac{19}{27}}=\dfrac{\sqrt[6]{64}}{\sqrt[6]{100000000}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}}:\dfrac{\sqrt[3]{-100}}{\sqrt[3]{27}}=$

$=\dfrac{2}{\sqrt[3]{10000}}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{3}{\sqrt[3]{-100}}=\dfrac{15}{\sqrt[3]{-1000000}}=-\dfrac{15}{100}=-0{,}15;$

б) $\sqrt[5]{1\dfrac{11}{16}\cdot 4{,}5}-\dfrac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{288}}=\sqrt[5]{\dfrac{27}{16}\cdot\dfrac{9}{2}}-\sqrt[5]{\dfrac{1}{32}}=\dfrac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=1;$

в) $\sqrt[5]{-\dfrac{243}{1024}}\cdot\sqrt[3]{-4\dfrac{17}{27}}=\dfrac{\sqrt[5]{-243}}{\sqrt[5]{1024}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{-125}}{\sqrt[3]{27}}=\dfrac{-3}{4}\cdot\dfrac{(-5)}{3}=\dfrac{5}{4}=1\dfrac{1}{4};$

г) $\sqrt[4]{3\dfrac{3}{8}\cdot 1\dfrac{1}{2}}+\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}}=\sqrt[4]{\dfrac{27\cdot 3}{8\cdot 2}}+\sqrt[4]{\dfrac{5}{80}}=\dfrac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}+\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=2;$

395.

а) $1<\sqrt[4]{2}<2$, т.к. $1^4<2<2^4$; $1{,}1<\sqrt[4]{2}<1{,}2$, т.к. $1{,}1^4<2<1{,}2^4$;

$1{,}18<\sqrt[4]{2}<1{,}19$, т.к. $1{,}18^4<2<1{,}19^4$; $\sqrt[4]{2}=1{,}18...$;

б) $1<\sqrt[3]{5}<2$, т.к. $1^3<5<2^3$; $1{,}7<\sqrt[3]{5}<1{,}8$, т.к. $1{,}7^3<5<1{,}8^3$;

$1{,}70<\sqrt[3]{5}<1{,}71$, т.к. $1{,}7^3<5<1{,}71^3$; $\sqrt[3]{5}=1{,}70...$;

в) $2<\sqrt{7}<3$, т.к. $2^2<7<3^2$; $2{,}6<\sqrt{7}<2{,}7$, т.к. $2{,}6^2<7<2{,}7^2$;

$2{,}64<\sqrt{7}<2{,}65$, т.к. $2{,}64^2<7<2{,}65^2$; $\sqrt{7}=2{,}64...$;

г) $1<\sqrt[3]{3}<2$, т.к. $1^3<3<2^3$; $1{,}4<\sqrt[3]{3}<1{,}5$, т.к. $1{,}4^3<3<1{,}5^3$;

$1{,}44<\sqrt[3]{3}<1{,}45$, т.к. $1{,}44^3\le 3<1{,}45^3$; $\sqrt[3]{3}=1{,}44....$

396.

а) $\sqrt[3]{10{,}17}\approx 2{,}17;$ б) $\sqrt{71}\approx 8{,}43;$ в) $\sqrt{13{,}21}\approx 3{,}63;$ г) $\sqrt[3]{11}\approx 2{,}22.$

397.

а) $\sqrt[9]{13{,}7}\approx 1{,}34;$ б) $\sqrt[6]{10}\approx 1{,}47;$ в) $\sqrt[4]{2{,}8}\approx 1{,}29;$ г) $\sqrt[8]{13}\approx 1{,}38.$

398.

а) $\sqrt[5]{0{,}2} > 0$, т.к. $0{,}2>0$ и $\sqrt[5]{0}=0$; б) $\sqrt[12]{0{,}4} < \sqrt[12]{\frac{5}{12}}$, т.к. $0{,}4 = \frac{24}{60} < \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$;

в) $\sqrt[7]{1{,}8} > 1$, т.к. $1{,}8 > 1$ и $\sqrt[7]{1} = 1$; г) $\sqrt[8]{0{,}2} < \sqrt[8]{0{,}3}$, т.к. $0{,}2 < 0{,}3$.

399. а) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$; $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, т.о. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} < \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)^2$;

б) $\sqrt[18]{\frac{3}{7}} < \sqrt[18]{0{,}43}$, т.к. $\frac{3}{7} = \frac{300}{700} < \frac{301}{700} = 0{,}43$;

в) $\sqrt[5]{2} < \sqrt[5]{3}$, т.к. $2 < 3$; г) $\sqrt[8]{0{,}8} < 1$, т.к. $0{,}8 < 1$ и $1 = \sqrt[8]{1}$.

400. а) $\sqrt{0{,}3} = \sqrt[10]{0{,}3^5} = \sqrt[10]{0{,}00243}$; $\sqrt[5]{0{,}05} = \sqrt[10]{0{,}05^2} = \sqrt[10]{0{,}0025}$,

$\sqrt[10]{0{,}0025} > \sqrt[10]{0{,}00243}$, т.о. $\sqrt{0{,}3} < \sqrt[5]{0{,}05}$;

б) $\sqrt[3]{4} = \sqrt[15]{4^5} = \sqrt[15]{1024}$, $\sqrt[5]{8} = \sqrt[15]{8^3} = \sqrt[15]{512}$; $\sqrt[15]{1024} > \sqrt[15]{512}$, т.о. $\sqrt[3]{4} > \sqrt[5]{8}$

в) $\sqrt[3]{7} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6]{49}$; $\sqrt[6]{49} > \sqrt[6]{40}$, т.о. $\sqrt[3]{7} > \sqrt[6]{40}$;

г) $\sqrt{5} = \sqrt[8]{5^4} = \sqrt[8]{625}$; $\sqrt[8]{625} > \sqrt[8]{500}$, т.о. $\sqrt{5} > \sqrt[8]{500}$.

401.

а) $\sqrt[3]{-0{,}4} = -\sqrt[15]{0{,}4^5} = -\sqrt[15]{0{,}01024}$; $\sqrt[5]{-0{,}3} = -\sqrt[15]{0{,}3^3} = -\sqrt[15]{0{,}009}$;

$\sqrt[15]{0{,}01024} < \sqrt[15]{0{,}009}, -\sqrt[15]{0{,}01024} > -\sqrt[15]{0{,}009}$; т.о. $\sqrt[3]{-0{,}4} > \sqrt[5]{-0{,}3}$;

б) $\sqrt[5]{-5} = -\sqrt[5]{5} = -\sqrt[15]{5^3} = -\sqrt[15]{125}$; $\sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3} = -\sqrt[15]{3^5} = -\sqrt[15]{243}$;

$-\sqrt[15]{125} > \sqrt[15]{243}$, т.о. $\sqrt[5]{-5} > \sqrt[3]{-3}$;

в) $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} > -\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{-4}$;

г) $\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[15]{5^5} = -\sqrt[15]{3125}$; $\sqrt[5]{-3} = -\sqrt[15]{3^3} = -\sqrt[15]{27}$;

$\sqrt[15]{3125} > \sqrt[15]{27}$, $-\sqrt[15]{3125} < -\sqrt[15]{27}$, $\sqrt[3]{-5} < \sqrt[5]{-3}$.

402.

а) $\sqrt[6]{64a^8b^{11}} = \sqrt[6]{(2ab)^6} \cdot \sqrt[6]{a^2b^5} = 2ab\sqrt[6]{a^2b^5}$;

б) $\sqrt[5]{-128a^7} = -\sqrt[5]{(2a)^5} \cdot \sqrt[5]{4a^2} = -2a\sqrt[5]{4a^2}$;

в) $\sqrt[4]{6a^{12}b^6} = \sqrt[4]{(a^3b)^4}\ \sqrt[4]{6b^2} = a^3b\sqrt[4]{6b^2}$;

г) $\sqrt[3]{54a^{10}} = \sqrt[3]{(3a^3)^3}\ \sqrt[3]{2a} = 3a^3\sqrt[3]{2a}$.

403. а) $-b\sqrt[4]{3}=-\sqrt[4]{b^4}\cdot\sqrt[4]{3}=-\sqrt[4]{3b^4}$; б) $ab\sqrt[8]{\frac{5b^3}{a^7}}=\sqrt[8]{a^8b^8}\ \sqrt[8]{\frac{5b^3}{a^7}}=\sqrt[8]{5ab^{11}}$;

в) $a\sqrt[4]{7}=\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{7}=\sqrt[4]{7a^4}$; г) $-ab\sqrt[3]{-4}=\sqrt[3]{-a^3b^3}\ \sqrt[3]{-4}=\sqrt[3]{4a^3b^3}$.

404.

а) $\sqrt{a^2}=|a|$, $|a|=-a$ справедливо только при $a\le0$, т.о. $\sqrt{a^2}=-a$ при $a\le0$;

б) $\sqrt[3]{a^3}=a$ при любом а;

в) $\sqrt[5]{a^5}=a$, $a=|a|$ справедливо только при $a\ge0$, т.о. $\sqrt[5]{a^5}=|a|$ при $a\ge0$;

г) $\sqrt[4]{a^4}=|a|$, $|a|=a$ справедливо только при $a\ge0$, т.о. $\sqrt[4]{a^4}=a$ при $a\ge0$.

405.

а) $\sqrt[3]{a^3}=a$ прилюбом а, а = -а при а = 0, значит $\sqrt[3]{a^3}=-a$ при а = 0;

б) $\sqrt[6]{a^6}=|a|$, $|a|=-a$ при $a\le0$, значит $\sqrt[6]{a^6}=-a$ при $a\le0$;

в) $\sqrt[4]{a^4}=|a|$ при любом а; г) $\sqrt[7]{a^7}=a$ при любом а.

406. а) $\frac{3}{\sqrt7-\sqrt5}=\frac{3(\sqrt7+\sqrt5)}{(\sqrt7)^2-(\sqrt5)^2}=\frac{3(\sqrt7+\sqrt5)}{2}$;

б) $\frac{a-\sqrt2}{a\cdot\sqrt2}=\frac{(a-\sqrt2)^2}{a^2-(\sqrt2)^2}=\frac{a^2-2\sqrt2+2}{a^2-2}$;

в) $\frac{1}{\sqrt5+\sqrt2}=\frac{\sqrt5-\sqrt2}{(\sqrt5)^2-(\sqrt2)^3}=\frac{\sqrt5-\sqrt2}{3}$;

г) $\frac{\sqrt6+1}{\sqrt6-1}=\frac{(\sqrt6+1)^2}{5}=\frac{6+1+2\sqrt6}{5}=\frac{7+2\sqrt6}{5}$.

407. а) $\frac{a}{\sqrt[3]{2}}=\frac{a\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{a\sqrt[3]{2}}{2}$; б) $\frac{x-\sqrt x}{2\sqrt x}=\frac{\sqrt x(\sqrt x-1)}{2\sqrt x}=\frac{\sqrt x-1}{2}$;

в) $\frac{4}{x\sqrt[4]{4}}=\frac{4\sqrt[4]{4^3}}{x\sqrt[4]{4^4}}=\frac{\sqrt[4]{64}}{x}=\frac{2\sqrt2}{x}$; г) $\frac{5}{3\sqrt[5]{5}}=\frac{5\sqrt[5]{5^4}}{3\sqrt[5]{5^5}}=\frac{\sqrt[5]{625}}{3}$.

408. а) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}=\frac{2\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^3}}=\frac12\sqrt[3]{16}$; б) $\frac{6}{\sqrt[5]{27\cdot25}}=\frac{6\cdot\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{5^3}}{\sqrt[5]{3^5}\cdot\sqrt[5]{5^5}}=\frac{6}{15}\sqrt[5]{9\cdot125}$;

в) $\frac{3}{\sqrt[4]{12}}=\frac{3\cdot\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{3^4}}=\frac36\sqrt[4]{4\cdot27}=\frac12\sqrt[4]{108}$; г) $\frac{10}{\sqrt[5]{8}}=\frac{10\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}}=\frac{10}{2}\sqrt[5]{4}=5\sqrt[5]{4}$.

409.

а) $\sqrt[12]{25^3}=\sqrt[12]{5^6}=\sqrt{5}$; б) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{1}{8}}}=\sqrt[4]{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt[4]{2^3}=0,5\sqrt[4]{8}$;

в) $\sqrt[8]{\frac{16^3}{81}}=\sqrt[8]{\frac{2^{12}\ 3^4}{3^8}}=\frac{2}{3}\sqrt[8]{2^4\ 3^4}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$;

г) $\sqrt[4]{\frac{1}{4}\sqrt[3]{5}}=\sqrt[12]{\frac{5}{4^3}}=\frac{1}{4}\sqrt[12]{5\cdot 4^9}=\frac{1}{4}\sqrt[12]{5\cdot 2^6}\cdot\sqrt[12]{2^{12}}=\frac{1}{2}\sqrt[12]{320}$.

410.

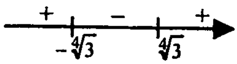
а) $\sqrt[3]{x}-5\sqrt[6]{x}+6=0$; $\sqrt[6]{x}=t$; $t\geq 0$;
$t^2-5t+6=0$; $t_1=2$, $t_2=3$;
$\sqrt[6]{x}=2$, $x=2^6=64$;
$\sqrt[6]{x}=3$, $x=3^6=729$;

б) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=2$; $\sqrt[4]{x}=t$; $t\geq 0$;
$t^2+t-2=0$; $t_1=-2$, $t_2=1$;
$\sqrt[4]{x}=-2$ - не имеет решений;
$\sqrt[4]{x}=1$, $x=1$;

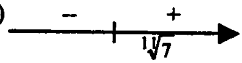
в) $\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}+2=0$; $\sqrt[4]{x}=t$; $t\geq 0$;
$t^2-3t+2=0$; $t_1=1$, $t_2=2$;
$\sqrt[4]{x}=1$, $x=1$; $\sqrt[4]{x}=2$, $x=2^4=16$;

г) $\sqrt[3]{x}-5\sqrt[6]{x}=6$; $\sqrt[6]{x}=t$; $t\geq 0$;
$t^2-5t-6=0$; $t_1=-1$, $t_2=6$;
$\sqrt[6]{x}=-1$ - не имеет решений;
$\sqrt[6]{x}=6$, $x=6^6=46656$.

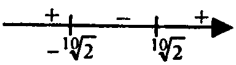
411.

а) 

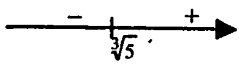
$x^4<3$; $x_1=-\sqrt[4]{3}$, $x_2=\sqrt[4]{3}$.
Ответ: $\left(-\sqrt[4]{3};\sqrt[4]{3}\right)$.

б) 

$x^{11}\geq 7$; $x=\sqrt[11]{7}$;
Ответ: $\left[\sqrt[11]{7};\infty\right)$

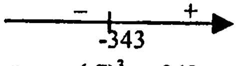
в) 

$x^{10}>2$; $x_1=-\sqrt[10]{2}$, $x_2=\sqrt[10]{2}$.
Ответ: $\left(-\infty;-\sqrt[10]{2}\right)\cup\left(\sqrt[10]{2};\infty\right)$

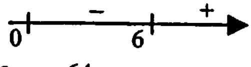
г) 

$x^3\leq 5$; $x=\sqrt[3]{5}$.
Ответ: $\left(-\infty;-\sqrt[3]{5}\right]$

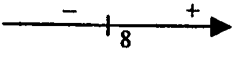
412.

а) 

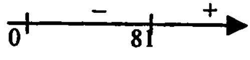
$\sqrt[3]{x}<-7$; $x=(-7)^3=-343$;
Ответ: $(-\infty;-343)$.

б) 

$\sqrt[6]{x}\geq 2$; $x=64$;
Ответ: $[64;\infty)$.

в) 

$\sqrt[3]{x}>2$; $x=8$; Ответ: $(8;\infty)$.

г) 

$\sqrt[4]{x}\leq 3$; $x=81$. Ответ: $[0;81]$.

413.

а) $\sqrt[6]{a^6}=|a|=-a$, где $a\le 0$;

б) $\sqrt[4]{a^4}=|a|=a$, где $a\ge 0$;

в) $\sqrt[5]{a^5}=a$;

414. а) $\sqrt[3]{a^3}-\sqrt{a^2}=a-|a|=a+a=2a$, где $a\le 0$;

б) $\sqrt[4]{a^4}+2\sqrt[7]{a^7}=|a|+2a=a+2a=3a$, где $a\ge 0$;

в) $\sqrt[5]{a^5}-\sqrt[6]{a^6}=a-|a|=a-a=0$, где $a\ge 0$;

г) $\sqrt[3]{a^3}+3\sqrt[8]{a^8}=a+3|a|=a-3a=-2a$, где $a\le 0$.

415. а) $\sqrt[3]{10+\sqrt{73}}\cdot\sqrt[3]{10-\sqrt{73}}=\sqrt[3]{10^2-(\sqrt{73})^2}=\sqrt[3]{27}=3$;

б) $\dfrac{\sqrt[3]{(4+\sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{4-\sqrt{17}}}+\sqrt{17}=\dfrac{\sqrt[3]{(4+\sqrt{17})^3}}{\sqrt[3]{4^2-(\sqrt{17})^2}}+\sqrt{17}=-\left(4+\sqrt{17}\right)+\sqrt{17}=-4$;

в) $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}}\cdot\sqrt[4]{9+\sqrt{65}}=\sqrt[4]{9^2-(\sqrt{65})^2}=\sqrt[4]{16}=2$;

г) $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{4}=2$.

416. а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot3}+\sqrt[3]{3^2}}{\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}=-\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{9}$;

б) $\dfrac{2}{a-\sqrt[3]{b}}=\dfrac{2\left(a^2+a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(a-\sqrt[3]{b}\right)\left(a^2+a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\dfrac{2\left(a^2+a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a^3-b}$;

в) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}}=\dfrac{2\left(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5\cdot7}+\sqrt[3]{7^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}\right)\left(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5\cdot7}+\sqrt[3]{7^2}\right)}=\dfrac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{49}}{6}$;

г) $\dfrac{3a}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{3a\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}=\dfrac{3a\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{a+b}$.

33. Иррациональные уравнения

417.

а) $\sqrt{x^4+19}=10\Leftrightarrow x^4+19=100\Leftrightarrow x^4=81\Leftrightarrow x\pm3$;

б) $\sqrt[3]{x^2-28}=2\Leftrightarrow x^2-28=8\Leftrightarrow x^2=36\Leftrightarrow x=\pm6$;

в) $\sqrt{61-x^2}=5 \Leftrightarrow \begin{cases} 61-x^2 \ge 0, \\ 61-x^2=25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le 61, \\ x^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow x=\pm 6;$

г) $\sqrt[3]{x-9}=-3 \Leftrightarrow x-9=-27 \Leftrightarrow x=-18.$

418.

а) $\sqrt{x+1}=x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=(x-5)^2, \\ x-5 \ge 0, \\ x+1 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-11x+24=0, \\ x \ge 5, \\ x \ge -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=8; \end{array}\right. \\ x \ge 5; \end{cases} \Leftrightarrow x=8;$

б) $x+\sqrt{2x+3}=6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3=(6-x)^2, \\ 6-x \ge 0, \\ 2x+3 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-14x+33=0, \\ x \le 6, \\ x \ge -\frac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=11; \end{array}\right. \\ x \le 6; \end{cases} \Leftrightarrow x=3;$

в) $\sqrt{2x-1}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=(x-2)^2, \\ x-2 \ge 0; \\ 2x-1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+5=0, \\ x \ge 2; \\ x \ge \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=5; \end{array}\right. \\ x \ge 2; \end{cases} \Leftrightarrow x=5$

г) $3+\sqrt{3x+1}=x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1=(x-3)^2, \\ x-3 \ge 0, \\ 3x+1 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9x+8=0, \\ x \ge 3, \\ x \ge -\frac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=8; \end{array}\right. \\ x \ge 3; \end{cases} \Leftrightarrow x=8$

419.

а) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x^2-2x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=x^2-2x+4, \\ 2x+1 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0, \\ x \ge -0{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=3; \end{array}\right. \\ x \ge -0{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1=1, \\ x_2=3; \end{array}$ см.

б) $\sqrt{x}=\sqrt{x^2-x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x^2-x-3, \\ x \ge 0, \\ x^2-x-3 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3=0, \\ x \ge \frac{1+\sqrt{13}}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=3; \end{array}\right. \\ x \ge \frac{1+\sqrt{13}}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$

в) $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=2x-3, \\ x+2 \ge 0, \\ 2x-3 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ x \ge 1{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow x=5;$

г) $\sqrt{9-x^2}=\sqrt{x+9} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-x^2=9+x, \\ 9-x^2 \ge 0, \\ x+9 \ge 0: \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)=0, \\ x \ge -3, \\ x \le 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=0; \end{array}\right. \\ x \ge -3, \\ x \le 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1=-1. \\ x_2=0; \end{array}$

420.

а) $x=\sqrt[3]{x^3+x^2-6x+8} \Leftrightarrow x^3+x^2-6x+8=x^3 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=4, \end{array}\right.$

б) $x-2=\sqrt[3]{x^2-8} \Leftrightarrow (x-2)^3=x^2-8 \Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8=x^2-8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x^2-7x+12)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=3, \\ x_3=4; \end{array}\right.$

в) $x=\sqrt[3]{x^3-x^2-8x+20} \Leftrightarrow x^3=x^3-x^2-8x+20 \Leftrightarrow x^2+8x-20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-10, \\ x_2=2; \end{array}\right.$

г) $x+1=\sqrt[3]{x^3+2x^2+x} \Leftrightarrow (x+1)^3=x^3+2x^2+2 \Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1=$

$=x^3+2x^2+x \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

421.

а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=1, \\ 3\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=1, \\ 6\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y}=20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=1, \\ 7\sqrt[3]{x}=21; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{y}=\frac{1}{2}(1-\sqrt[3]{x}), \\ \sqrt[3]{x}=3; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{y}=-1. \\ \sqrt[3]{x}=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=27 \end{cases};$

б) $\begin{cases} 4\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=2\sqrt{2}, \\ 2\sqrt[4]{x}+3\sqrt[4]{y}=8\sqrt{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\sqrt[4]{x}-3\sqrt[4]{y}=6\sqrt{2}, \\ 2\sqrt[4]{x}+3\sqrt[4]{y}=8\sqrt{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{y}=4\sqrt[4]{x}-2\sqrt{2}, \\ 14\sqrt[4]{x}=14\sqrt{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{y}=4\sqrt[4]{x}-2\sqrt{2}, \\ \sqrt[4]{x}=\sqrt{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=64 \\ x=4 \end{cases};$

в) $\begin{cases} 2\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=7, \\ 4\sqrt[4]{y}-3\sqrt[4]{x}=6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8\sqrt[4]{x}-4\sqrt[4]{y}=-28, \\ -3\sqrt[4]{x}+4\sqrt[4]{y}=6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{y}=7-2\sqrt[4]{x}, \\ -11\sqrt[4]{x}=-22; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{y}=7-2\cdot 2. \\ \sqrt[4]{x}=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=81 \\ x=16 \end{cases};$

г) $\begin{cases} \sqrt{x}+3\sqrt{y}=5\sqrt{5}, \\ 5\sqrt{y}-2\sqrt{x}=\sqrt{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x}+6\sqrt{y}=10\sqrt{5}, \\ -2\sqrt{x}+5\sqrt{y}=\sqrt{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=5\sqrt{5}-3\sqrt{y}, \\ 11\sqrt{y}=11\sqrt{5}; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}, \\ \sqrt{y}=\sqrt{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=5 \end{cases}.$

422

а) $\sqrt{x+1}\ \sqrt{x+6}=6 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+6)=36, \\ x+1\geq 0, \\ x+6\geq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2+7x-30=0, \\ x\geq -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-10, \\ x=3; \end{array}\right. \\ x\geq -1; \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$

б) $\frac{x+1}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)}\cdot\sqrt{(2x-1)}=x+1, \\ x-1\geq 0, \\ 2x-1>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x-1)=(x+1)^2, \\ x-1\geq 0, \\ 2x-1>0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x+1=x^2+2x+1, \\ x\geq 1, \\ x>0.5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x=0, \\ x\geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=5; \end{array}\right. \\ x\geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow x=5;$

в) $\frac{x+6}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{3x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+2}\cdot\sqrt{x-2}=x+6, \\ x-2>0; \\ 3x+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+2)(x-2)=(x+6)^2, \\ 3x+2\geq 0, \\ x-2>0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-4x-4=x^2+12x+36, \\ x>2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-16x-40=0, \\ x>2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-2, \\ x_2=10; \end{array}\right. \\ x>2; \end{cases} \Leftrightarrow x=10;$

г) $\sqrt{x}\sqrt{2-x}=2x \Leftrightarrow \begin{cases} x(2-x)=4x^2, \\ x\geq 0, \\ 2-x\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-x^2=4x^2, \\ x\geq 0, \\ x\leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x(x-0,4)=0, \\ x\geq 0, \\ x\leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=0,4; \end{array}\right. \\ x\geq 0, \\ x\leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=0,4; \end{array}$

423. а) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}}=3,\ 5+\sqrt[3]{x+3}=9$, x + 3 = 64, x = 61

Проверка: $\sqrt{5+\sqrt[3]{61+3}}=3$. Итого: x = 61.

б) $\sqrt{\sqrt{x^2-16}+x}=2,\ \sqrt{x^2-16}+x=4$, $x^2-16=(4-x)^2$, $x^2-16=x^2-8x+16$, $-8x+32=0$, x = 4.

Проверка: $\sqrt{\sqrt{4^2-16}+4}=2$. Итого: x = 4.

в) $\sqrt{18-\sqrt[3]{x+10}}=4,\ 18-\sqrt[3]{x+10}=16$, x + 10 = 8, x = -2.

Проверка: $\sqrt{18-\sqrt[3]{-2+10}}=4$. Итого: x = -2.

г) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-5}}=1,\ x-\sqrt{x^2-5}=1$, $x^2-5=(x-1)^2$, $2x-6=0$, x = 3

Проверка: $\sqrt{3-\sqrt{3^2-5}}=1$. Итого: x = 3.

424. а) $\sqrt{x-3}=1+\sqrt{x-4},\ x-3=1+2\sqrt{x-4}+x-4,\ \sqrt{x-4}=0$. x = 4

Проверка: $\sqrt{4-3}=1+\sqrt{4-4}$. Итого: x = 4.

б) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$, $x+2=4+4\sqrt{x-6}+x-6$, $\sqrt{x-6}=1$, x = 7

Проверка: $\sqrt{7+2}-\sqrt{7-6}=2$. Итого: x = 7.

в) $2+\sqrt{10-x}=\sqrt{22-x}$, $4+4\sqrt{10-x}+10-x=22-x$, $\sqrt{10-x}=2$, x = 6

Проверка: $2+\sqrt{10-6}=\sqrt{22-6}$. Итого: x = 6.

г) $\sqrt{1-2x}-3=\sqrt{16+x}$, $1-2x-6\sqrt{1-2x}+9=16+x$, $-6\sqrt{1-2x}=6+3x$

$1-2x=0{,}25x^2+x+1$, $x(x+12)=0$, $\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-12. \end{array}\right.$

Проверка: $\sqrt{1-2\cdot 0}-3\neq\sqrt{16+0}$; При x = -12: $\sqrt{1+2\cdot 12}-3=\sqrt{16-12}$

Итого: x = -12.

425.

а) $\sqrt{x-3}-6=\sqrt[4]{x-3}$, $\sqrt[4]{x-3}=t$; $t^2-t-6=0$; $t_1=-2$, $t_2=3$;

при t= -2: $\sqrt[4]{x-3}=-2$ - нет решений; при t = 3: $\sqrt[4]{x-3}=3$;

x – 3 = 81; x = 84. Итого: x = 84.

б) $\sqrt[3]{x+1}+2\sqrt[6]{x+1}=3$; $\sqrt[6]{x+1}=t$; $t^2+2t-3=0$; $t_1=-3$; $t_2=1$;

при t = -3: $\sqrt[6]{x+1}=-3$ - нет решений;

при t = 1: $\sqrt[6]{x+1}=1$; x + 1 = 1; x = 0. Итого: x = 0.

в) $\sqrt[4]{x-5}=30-\sqrt{x-5}$; $\sqrt[4]{x-5}=t$; $t^2+t-30=0$; $t_1=-6$, $t_2=5$;

при t = -6: $\sqrt[4]{x-5}=-6$ - нет решений; при t = 5: $\sqrt[4]{x-5}=5$,

x – 5 = 625; x = 630. Итого: x = 630.

г) $3\sqrt[10]{x^2-3}+\sqrt[5]{x^2-3}=4$; $\sqrt[10]{x^2-3}=t$;

$t^2+3t-4=0$; $t_1=-4$, $t_2=1$;

при t = -4: $\sqrt[10]{x^2-3}=-4$ - нет решений,

при t = 1: $\sqrt[10]{x^2-3}=1$; $x^2-3=1$; x=±2

Итого: x = ±2

426.

а) $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{x}\ \sqrt{y}=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y}=2\sqrt{x}-5, \\ \sqrt{x}(2\sqrt{x}-5)=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y}=2\sqrt{x}-5, \\ 2(\sqrt{x})^2-5\sqrt{x}-3=0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y}=2\sqrt{x}-5, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=-\dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{x}=3, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{y}=-6, \\ \sqrt{x}=-\dfrac{1}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{y}=1, \\ \sqrt{x}=3; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=9, \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{6+x}-3\sqrt{3y+4}=-10,\\ 4\sqrt{3y+4}-5\sqrt{6+x}=6;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\sqrt{6+x}-15\sqrt{3y+4}=-50,\\ -5\sqrt{6+x}+4\sqrt{3y+4}=6;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{6+x}=-10+3\sqrt{3y+4},\\ \sqrt{3y+4}=4,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{6+x}=2,\\ \sqrt{3y+4}=4;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2,\\ y=4.\end{cases}$$

в) $$\begin{cases}\sqrt{x}+3\sqrt{y}=10\\ \sqrt{x}\sqrt{y}=8;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=10-3\sqrt{y},\\ \sqrt{y}(10-3\sqrt{y})=8;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=10-3\sqrt{y},\\ 3(\sqrt{y})^2-10\sqrt{y}+8=0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=10-3\sqrt{y},\\ \left[\begin{array}{l}\sqrt{y}=\frac{4}{3},\\ \sqrt{y}=2;\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x}=6,\\ \sqrt{y}=\frac{4}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x}=4,\\ \sqrt{y}=2;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=36,\\ y=1\frac{7}{9};\end{cases}\\ \begin{cases}x=16,\\ y=4\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}2\sqrt{x-2}+\sqrt{5y+1}=8,\\ 3\sqrt{x-2}-2\sqrt{5y+1}=-2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\sqrt{x-2}+2\sqrt{5y+1}=16,\\ 3\sqrt{x-2}-2\sqrt{5y+1}=-2;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{5y+1}=4,\\ \sqrt{x-2}=2.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3,\\ x=6\end{cases}$$

427.

а) $$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8,\\ x-y=16;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8,\\ (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=16;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=5,\\ \sqrt{y}=3;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=25,\\ y=9\end{cases}$$

б) $$\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5,\\ xy=216;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{y}=5-\sqrt[3]{x},\\ \left(\sqrt[3]{xy}\right)^3=6^3;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{y}=5-\sqrt[3]{x},\\ \sqrt[3]{x}\left(5-\sqrt[3]{x}\right)=6;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{y}=5-\sqrt[3]{x},\\ \sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}+6=0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{y}=5-\sqrt[3]{x},\\ \left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x}=2,\\ \sqrt[3]{x}=3;\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[3]{y}=3,\\ \sqrt[3]{x}=2;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{y}=2,\\ \sqrt[3]{x}=3,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=27,\\ x=8;\end{cases}\\ \begin{cases}y=8,\\ x=27\end{cases}\end{array}\right.$$

в) $$\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=4,\\ x-y=32;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=4,\\ \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=32;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=4,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=6,\\ \sqrt{y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=36,\\ y=4\end{cases}$$

г) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2,\\ xy=27;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x}=2+\sqrt[3]{y},\\ \left(\sqrt[3]{xy}\right)^3=3^3;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x}=2+\sqrt[3]{y},\\ \sqrt[3]{y}\left(2+\sqrt[3]{y}\right)=3;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x}=2+\sqrt[3]{y},\\ \sqrt[3]{y^2}+2\sqrt[3]{y}-3=0;\end{cases}\Rightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x}=2+\sqrt[3]{y},\\ \left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{y}=-3,\\ \sqrt[3]{y}=1;\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[3]{x}=-1,\\ \sqrt[3]{y}=-3;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{x}=3,\\ \sqrt[3]{y}=1.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1,\\ y=-27;\end{cases}\\ \begin{cases}x=27,\\ y=1;\end{cases}\end{array}\right.$$

34. Степень с рациональным показателем

428.

а) $3^{1,2}=3^{\frac{6}{5}}=\sqrt[5]{3^6}=\sqrt[5]{729}$; б) $5^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^{-2}}=\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$,

в) $4^{1,25}=4^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{4^5}=\sqrt[4]{1024}$, г) $6^{-1\frac{1}{2}}=6^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{6^{-3}}=\sqrt{\frac{1}{216}}$

429.

а) $\sqrt[3]{a^{-2}}=a^{-\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt[7]{3b}=(3b)^{\frac{1}{7}}$; в) $\sqrt[13]{b^{-7}}=b^{-\frac{7}{13}}$; г) $\sqrt[8]{4^5}=4^{\frac{5}{8}}$

430.

а) $243^{0,4}=\left(3^5\right)^{0,4}=3^2=9$; б) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}=\left(\left(\frac{8}{3}\right)^8\right)^{-\frac{1}{8}}=\left(\frac{8}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{8}$,

в) $16^{\frac{5}{4}}=\left(2^4\right)^{\frac{5}{4}}=2^5=32$; г) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}=\left(\left(\frac{3}{5^2}\right)^9\right)^{\frac{2}{9}}=\left(\frac{3}{25}\right)^2=\frac{9}{625}$

431. а) $8^{\frac{1}{2}}:\left(8^{\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{3}{2}}\right)=8^{\frac{1}{2}}\cdot 8^{-\frac{1}{6}}\cdot 9^{-\frac{3}{2}}=8^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{-\frac{3}{2}}=\frac{2}{27}$;

б) $\sqrt[3]{100}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{8}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{2^2\cdot 5^2}\cdot 2^{\frac{4}{3}}\cdot 5^{-\frac{5}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{-\frac{5}{3}}=2^2\cdot 5^{-1}=\frac{4}{5}$

в) $8^{2\frac{1}{3}}:81^{0,75}=8^{\frac{7}{3}}:81^{\frac{3}{4}}=2^7\cdot 3^{-3}=\frac{128}{27}=4\frac{20}{27}$;

г) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,5}\cdot\left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-0,5}\cdot\left(\left(\frac{5}{3}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$

432 а) $(ax)^{\frac{1}{3}}+(ay)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)$; б) $a-a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)$;

в) $3+3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}}\left(3^{\frac{1}{2}}+1\right)$; г) $(3x)^{\frac{1}{2}}-(5x)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}\left(3^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}}\right)$.

433. а) $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}+1=x^{\frac{1}{3}}\left(y^{\frac{1}{3}}-1\right)-\left(y^{\frac{1}{3}}-1\right)=\left(y^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)$;

б) $c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}=c^{\frac{1}{4}}\left(c^{\frac{1}{4}}+1\right)$;

в) $4-4^{\frac{1}{3}}=\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{3}-4^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{3}}\left(4^{\frac{2}{3}}-1\right)=4^{\frac{1}{3}}\left(4^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(4^{\frac{1}{3}}+1\right)$;

г) $a+b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)+b^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)=\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$.

434. а) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$;

б) $\dfrac{z-8}{z^{\frac{2}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}+4}=\dfrac{\left(z^{\frac{1}{3}}-2\right)\left(z^{\frac{2}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}+4\right)}{z^{\frac{2}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}+4}=z^{\frac{1}{3}}-2$;

в) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x-16}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-4}{\left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+4\right)}=\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}+4}$;

г) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$.

435.

а) $\frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\cdot x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}=$

$=\frac{y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{4}}};$

б) $\frac{a-1}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{3}{2}}-1}+2a^{\frac{1}{2}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}\cdot\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}+1}+2a^{\frac{1}{2}}=$

$=\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)^2+2a^{\frac{1}{2}}=a-2a^{\frac{1}{2}}+1+2a^{\frac{1}{2}}=a+1;$

в) $\left(\frac{1}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}(a-b)}\cdot\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=$

$=\frac{2a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}(a-b)}\cdot\frac{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}{a^2+ab+b^2}=\frac{2a(a-b)}{a(a-b)}=2;$

г) $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)}\cdot\frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}{1}=\frac{x^2-\sqrt{x}+x\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1}=$

$=\frac{(x-1)(x+1)+\sqrt{x}(x-1)}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{(x-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1}=x-1$

436. а) $\sqrt[7]{3^3}=3^{\frac{3}{7}}<3^{\frac{19}{8}}$, т.к. $\frac{3}{7}<\frac{19}{8}$; а $3>1$;

б) $0{,}4^{-2{,}7}=\left(\frac{5}{2}\right)^{2{,}7}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{189}{70}}>\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{15}{7}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{150}{70}}$, т.к. $\frac{189}{70}>\frac{150}{70}$; а $\frac{5}{2}>1$,

в) $\sqrt[3]{6^5}=6^{\frac{5}{3}}=6^{\frac{50}{30}}<6^{1{,}7}=6^{\frac{51}{30}}$, т.к. $\frac{50}{30}<\frac{51}{30}$, а $6>1$;

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{35}{21}}<\sqrt[7]{\frac{1}{32}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{7}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{21}}$, т.к. $\frac{35}{21}>\frac{15}{21}$, а $\frac{1}{2}<1$

437. а) $81^{-0,75}+\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}=\left(3^4\right)^{-0,75}+\left(5^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(2^{-5}\right)^{-\frac{3}{5}}=\frac{1}{2^7}\quad 3=-2\frac{26}{27}$,

б) $0,001^{-\frac{1}{3}}-(-2)^{-2}\cdot 64^{\frac{2}{3}}-8^{-1\frac{1}{3}}+\left(9^0\right)^2=\left(10^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}-2^{-2}\cdot 2^4-\left(2^3\right)^{-\frac{4}{3}}+1=$

$=10-2^2-2^{-4}+1=7-\frac{1}{16}=6\frac{15}{16}$.

в) $27^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}-25^{0,5}=\left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}+\left(2^{-4}\right)^{-0,75}-\left(5^2\right)^{0,5}=3^2+2^3-5=12;$

г) $(-0,5)^{-4}-625^{0,25}-\left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}+19(-3)^{-3}=\left(2^1\right)^4-\left(5^4\right)^{0,25}-$

$\left(3^2\right)^{-\frac{3}{2}}\ \left(2^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}}-19\cdot 3^{-3}=2^4-5-3^{-3}\cdot 2^3-\frac{19}{2^7}=11-\frac{8}{27}-\frac{19}{27}=11-1=10.$

438.

а) $\frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}+1=\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\ \frac{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}+1}+1=\sqrt{a}-1+1=\sqrt{a};$

б)

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{x-\sqrt{x}+1-x}{\left(1-\sqrt{x}\right)\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\left(\frac{x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\left(\left(\sqrt{x}+1\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}\ x^{-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{x}+1};$$

в) $\frac{a^{\frac{4}{3}}-27a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+9b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-3\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)-\sqrt[3]{a^2}=\frac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}-3b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+9b^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+9b^{\frac{2}{3}}}\cdot$

$\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-3b^{\frac{1}{3}}}\right)-\sqrt[3]{a^2}=\frac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}-3b^{\frac{1}{3}}\right)\ a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-3b^{\frac{1}{3}}}-a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=0;$

г) $\left(\frac{1}{m+\sqrt{2}}-\frac{m^2+4}{m^3+2\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{m}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{m}\right)=\left(\frac{m^2-m\sqrt{2}+2-m^2-4}{(m+\sqrt{2})(m^2-m\sqrt{2}+2)}\right)\times$

$\times\left(\frac{m^2-\sqrt{2}m+2}{2m}\right)=-\frac{\sqrt{2}(m+\sqrt{2})\cdot(m^2-m\sqrt{2}+2)}{(m+\sqrt{2})(m^2-m\sqrt{2}+2)\cdot 2m}=-\frac{\sqrt{2}}{2m}$

439. а) $\frac{1}{8}\sqrt[7]{2^5ax^3}=2^{-3}\cdot 2^{\frac{5}{7}}\cdot a^{\frac{1}{7}}\cdot x^{\frac{3}{7}}=2^{-2\frac{2}{7}}a^{\frac{1}{7}}x^{\frac{3}{7}}$;

б) $\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a}}=a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{12}}=a^{\frac{3}{4}}$; в) $\sqrt[7]{b^3}\cdot\sqrt[4]{b}=b^{\frac{3}{7}}\cdot b^{\frac{1}{4}}=b^{\frac{19}{28}}$;

г) $\frac{1}{3}\cdot\sqrt[4]{27\sqrt[3]{x}}=3^{-1}\cdot 3^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{1}{12}}=3^{-\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{12}}$.

440. а) $3\cdot 5^{-\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{3^5}\cdot\sqrt[5]{2^{-3}}=\sqrt[5]{\frac{243}{8}}=\sqrt[5]{30\frac{3}{8}}$, б) $a^{\frac{3}{4}}:b^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{15}{20}}\cdot b^{-\frac{8}{20}}=\sqrt[20]{\frac{a^{15}}{b^8}}$

в) $2b^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{b^{-2}}=\sqrt[3]{\frac{8}{b^2}}$, г) $b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{7}}=b^{\frac{7}{21}}\cdot c^{\frac{6}{21}}=\sqrt[21]{b^7c^6}$

441. а) $(\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}}=3^{-\frac{5}{12}}$, $\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}=3^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{12}}=3^{-\frac{5}{12}}$; $(\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}}=\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$.

б) $3^{600}=(3^6)^{100}=729^{100}$, $5^{400}=(5^4)^{100}=625^{100}$.

$729^{100}>625^{100}$, т.о. $3^{600}>5^{400}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}=2^{\frac{5}{7}}$, $\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{3}{14}}=2^{\frac{5}{7}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}=\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{3}{14}}$;

г) $7^{30}=(7^3)^{10}=343^{10}$, $4^{40}=(4^4)^{10}=256^{10}$; $343^{10}>256^{10}$, т.о. $7^{30} > 4^{40}$

442. а) не имеет смысла, т.к. a < 0;

б) $(-2)^{-4}=\frac{1}{(-2)^4}=\frac{1}{16}$ – выражение имеет смысл;

в) $5^{\frac{2}{3}}=\sqrt{5^3}=\sqrt{125}$ – выражение имеет смысл;

г) не имеет смысл, т.к. x < 0.

443. а) x + 1 > 0 при x > -1, $D\left(y=(x+1)^{-\frac{3}{x}}\right)=(-1;\infty)$;

б) $x^{\frac{3}{5}}$ имеет смысл только при x ≥ 0, $D\left(y=x^{\frac{3}{5}}\right)=[0;\infty)$;

в) $x^{-\frac{3}{4}}$ имеет смысл при x > 0, $D\left(y = x^{-\frac{3}{4}}\right) = (0;\infty)$;

г) x – 5 ≥ 0 при x ≥ 5, $D\left(y = (x-5)^{\frac{2}{3}}\right) = [5;\infty)$.

444.

а) $\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^6 = a$ при a ≥ 0;

б) $\left(a^4\right)^{\frac{1}{4}} = |a| = -a$ при a ≤ 0;

в) $\left(a^8\right)^{\frac{1}{8}} = |a| = \frac{1}{|a|}$ при a = ±1;

г) $\left(a^{0,7}\right)^{\frac{3}{7}} = \left(a^{\frac{7}{10}}\right)^{\frac{10}{7}} = a = -a$

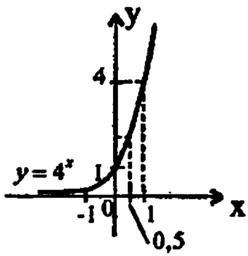
при a = 0.

§ 10. Показательная и логарифмическая функции

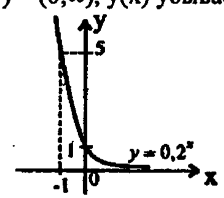
35. Показательная функция

445.

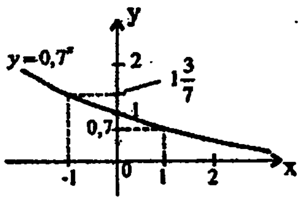
а) $y = 4^x$; D(y) = R, E(y) = (0;∞), y(x) возрастает на R;
y(0) = 1, y(1) = 4;



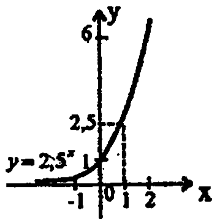
б) $y = 0{,}2^x$; D(y) = R, E(y) = (0;∞), y(x) убывает на R; y(-1)=5, y(0)= 1;



в) $y = 0{,}7^x$; D(y) = R, E(y) = (0;∞), y(x) убывает на R;
y(0) = 1, y(1) = 0.7:



г) $y = 2{,}5^x$; $D(y) = R$, $E(y) = (0;\infty)$, $y(x)$ возрастает на R;
$y(0) = 1$, $y(1) = 2{,}5$.



446. а) $-2^x < 0$ при $x \in R$: $E(y = -2^x) = (-\infty;0)$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1 > 1$ при $x \in R$: $E\left(y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1\right) = (1;\infty)$;

в) $-\left(\frac{1}{4}\right)^x < 0$ при $x \in R$: $E\left(y = -\left(\frac{1}{4}\right)^x\right) = (-\infty;0)$;

г) $5^x - 2 > -2$ при $x \in R$: $E(y = 5^x - 2) = (-2;\infty)$.

447. а) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} = \left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{2}} > 1$ т.к. $\frac{\sqrt{5}}{2} > 0$ и $\left(\frac{7}{4}\right) > 1$;

б) $3^{-\sqrt{12}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{12}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2{,}8}$, т.к. $\sqrt{12} > 2{,}8$ и $\left(\frac{1}{3}\right) < 1$;

в) $2{,}5^{-\sqrt{2}} = 0{,}4^{\sqrt{2}} < 1$, т.к. $\sqrt{2} > 0$ и $0{,}4 < 1$;

г) $0{,}3^{\frac{\sqrt{5}}{6}} < 0{,}3^{\frac{1}{3}} = 0{,}3^{\frac{2}{6}}$, т.к. $\sqrt{5} > 2$ и $0{,}3 < 1$.

448.

а) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$; б) $3^{1-2\sqrt{3}} \cdot 9^{1+\sqrt{3}} = 3^{1-2\sqrt{3}}\ 3^{2+2\sqrt{3}} = 3^3 = 27$;

в) $8^{\sqrt{2}} \,.\, 2^{3\sqrt{2}} = 2^{3\sqrt{2}} : 2^{3\sqrt{2}} = 1$; г) $\left(3^{\sqrt[5]{8}}\right)^{\sqrt[5]{4}} = 3^{\sqrt[5]{32}} = 3^2 = 9$.

449. а) $a^{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}=a^{\sqrt{2}}\cdot a^{1-\sqrt{2}}=a$; б) $x^{\pi}\cdot\sqrt[4]{x^2:x^{4\pi}}=x^{\pi}\cdot x^{\frac{2-4\pi}{4}}=x^{\frac{1}{2}}$;

в) $\left(a^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}=a^5$; г) $y^{\sqrt{2}}\cdot y^{1,3}:\sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}}=y^{\sqrt{2}+1,3-\sqrt{2}}=y^{1,3}$

450.

а) $$\frac{a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}\right)^2}+1=\frac{\left(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}\right)\left(a^{\sqrt{2}}+b^{\sqrt{3}}\right)}{\left(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}\right)^2}+1=\frac{a^{\sqrt{2}}+b^{\sqrt{3}}+a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}};$$

б)

$$\frac{\left(a^{2\sqrt{3}}-1\right)\left(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+a^{3\sqrt{3}}\right)}{a^{4\sqrt{3}}-a^{\sqrt{3}}}=\frac{a^{\sqrt{3}}\left(a^{\sqrt{3}}-1\right)\left(a^{\sqrt{3}}+1\right)\left(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+1\right)}{a^{\sqrt{3}}\left(a^{3\sqrt{3}}-1\right)}=$$

$$=\frac{\left(a^{\sqrt{3}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{3}}-1\right)}{a^{3\sqrt{3}}-1}=a^{\sqrt{3}}+1;$$

в) $$\frac{a^{\sqrt{5}}-b^{\sqrt{7}}}{a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}+a^{\frac{\sqrt{5}}{3}}b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}+b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}=\frac{\left(a^{\frac{\sqrt{5}}{3}}-b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}\right)\left(a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}+a^{\frac{\sqrt{5}}{3}}b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}+b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}\right)}{a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}+a^{\frac{\sqrt{5}}{3}}b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}+b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}=$$

$$=a^{\frac{\sqrt{5}}{3}}-b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}.$$

г) $$\sqrt{\left(x^{\pi}+y^{\pi}\right)^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}xy\right)^{\pi}}=\sqrt{x^{2\pi}+2x^{\pi}y^{\pi}+y^{2\pi}-4x^{\pi}y^{\pi}}=$$

$$=\sqrt{x^{2\pi}-2x^{\pi}y^{\pi}+y^{2\pi}}=\sqrt{\left(x^{\pi}-y^{\pi}\right)^2}=\left|x^{\pi}-y^{\pi}\right|.$$

451.

а) $10^{1.41}\approx 25{,}7$; $10^{1.42}\approx 26{,}3$; б) $10^{1.414}\approx 25{,}9$; $10^{1.415}\approx 26{,}0$;

в) $10^{2.23}\approx 169{,}8$; $10^{2.24}\approx 173{,}8$; г) $10^{2.236}\approx 172{,}2$; $10^{2.237}\approx 172{,}6$.

452. $1<\sqrt{2}<2\Rightarrow 10<10^{\sqrt{2}}<10^2$;

$1.41<\sqrt{2}<1.42\Rightarrow 10^{1.41}<10^{\sqrt{2}}<10^{1.42}$; $10^{1.41}\approx 25{,}7$ и $10^{1.42}\approx 26{,}3$;

$1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415 \Rightarrow 10^{1{,}414}<10^{\sqrt{2}}<10^{1{,}415}$; $10^{1{,}414}\approx 25{,}9$ и $10^{1{,}415}\approx 26{,}0$;

$10^{\sqrt{2}}\approx 25{,}9$; $2<\sqrt{5}<3 \Rightarrow 10^2<10^{\sqrt{5}}<10^3$;

$2{,}23<\sqrt{5}<2{,}24 \Rightarrow 10^{2{,}23}<10^{\sqrt{5}}<10^{2{,}24}$; $10^{2{,}23}\approx 169{,}8$ и $10^{2{,}24}\approx 173{,}8$;

$2{,}236<\sqrt{5}<2{,}237 \Rightarrow 10^{2{,}236}<10^{\sqrt{5}}<10^{2{,}237}$; $10^{2{,}236}\approx 172{,}2$ и

$10^{2{,}237}\approx 172{,}6$; $10^{\sqrt{5}}\approx 172{,}4$.

453.

а) $\sqrt{2}>1 \Rightarrow y=\left(\sqrt{2}\right)^x$ возрастает на R; $0<\frac{1}{\sqrt{2}}<1 \Rightarrow y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ убывает на R,

б) $0<\sqrt{5}-2<1 \Rightarrow y=\left(\sqrt{5}-2\right)^x$ убывает на R;

$\frac{1}{\sqrt{5}-2}>1 \Rightarrow y=\frac{1}{\left(\sqrt{5}-2\right)^x}$ возрастает на R;

в) $\frac{\pi}{3}>1 \Rightarrow y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ возрастает на R; $0<\frac{3}{\pi}<1 \Rightarrow y=\left(\frac{3}{\pi}\right)^x$ убывает на R,

г) $0<3-\sqrt{7}<1 \Rightarrow y=\left(3-\sqrt{7}\right)^x$ убывает на R;

$\frac{1}{3-\sqrt{7}}>1 \Rightarrow y=\frac{1}{\left(3-\sqrt{7}\right)^x}$ возрастает на R.

454. а) $3^{x+1}-3=3(3^x-1)$, $3^x>0$ при $x\in R \Rightarrow 3(3^x-1)>-3$ при $x\in R$,

$E(y=3^{x+1}-3)=(-3;\infty)$; б) $y=\left|2^x-2\right|=\begin{cases}2^x-2, x\ge 1,\\ 2-2^x, x<1.\end{cases}$ $y(1)=0$.

$y(x)$ возрастает на $[1;\infty)$ и убывает на $(-\infty;1]$; $E(y=|2^x-2|)=[0;\infty)$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2=2\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)>0$ при $x\in R \Rightarrow 2\left(1+\frac{1}{2^x}\right)>2$ при $x\in R$,

$E\left(y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}+2\right)=(2;\infty)$; г) $y=4^{|x|}=\begin{cases}4^x, x\ge 0,\\ \left(\frac{1}{4}\right)^x, x<0;\end{cases}$ $y(0)=1$. $y(x)$ возрастает на $[0;\infty)$ и убывает на $(-\infty;0]$; $E\left(y=4^{|x|}\right)=[1;\infty)$.

455. а) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$; $-1\le \sin x\le 1$, откуда $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}\in\left[\frac{1}{2};2\right]$;

$\Rightarrow \min\limits_R y(x)=\frac{1}{2}$, $\max\limits_R v(x)=2$;

б) $y=5+3^{|\cos x|}$; $0\le|\cos x|\le1\Rightarrow1\le3^{|\cos x|}\le3\Rightarrow6\le5+3^{|\cos x|}\le8$;

$\min\limits_R y(x)=6$, $\max\limits_R y(x)=8$;

в) $y=4^{\cos x}$;$-1\le\cos x\le1\Rightarrow\frac{1}{4}\le4^{\cos x}\le4\Rightarrow\min\limits_R y(x)=\frac{1}{4},\max\limits_R y(x)=4$;

г) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|\sin x|}-2$; $0\le|\sin x|\le1\Rightarrow\frac{1}{3}\le\left(\frac{1}{3}\right)^{|\sin x|}\le1\Rightarrow-1\frac{2}{3}\le\left(\frac{1}{3}\right)^{|\sin x|}-2\le-1$;

$\min\limits_R y(x)=-1\frac{2}{3},\max\limits_R y(x)=-1$.

456. а) Т.к. $y=\left(\frac{1}{6}\right)^x$ убывает и $y(x)>1$ при $x<0\Rightarrow\left(\frac{1}{6}\right)^x=10$ при $x<0$;

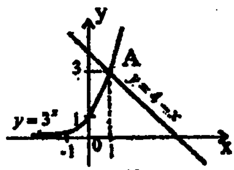
б) т.к. $y=0{,}3^x$ убывает и $y(x)<1$ при $x>0\Rightarrow0{,}3^x=0{,}1$ при $x>0$;

в) т.к. $y=10^x$ возрастает и $y(x)>1$ при $x>0\Rightarrow10^x=4$ при $x>0$;

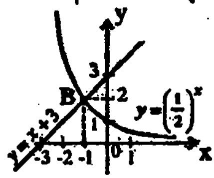
г) $y=0{,}7^x$ убывает на R и $y(x)>1$ при $x<0\Rightarrow0{,}7^x=5$ при $x<0$.

457.

а) $y=3^x$ возрастает на R, $y=4-x$ убывает на R $\Rightarrow$ у них не более одной точки пересечения. Очевидно, это точка A(1;3) $\Rightarrow x=1$.

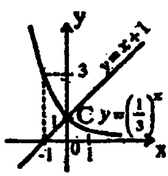


б) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывает на R,

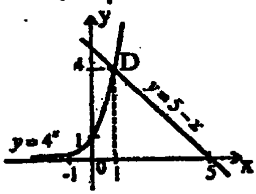


$y=x+3$ возрастает на R, графики этих функций могут иметь не более одной точки пересечения. Из рисунка видно, что это точка B(-1;2), значит $x=-1$.

в) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ убывает на R, $y=x+1$ возрастает на R, графики этих функций могут иметь не более одной точки пересечения. Это точка C(0;1), значит $x=0$.

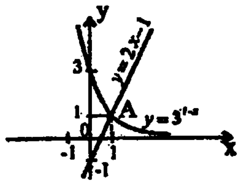


г) $y=4^x$ возрастает на R, $y=5-x$ убывает на R, графики этих функций могут иметь не более одной точки пересечения. Это точка D(1;4), значит $x=1$ единственное решение уравнения $4^x=5-x$.

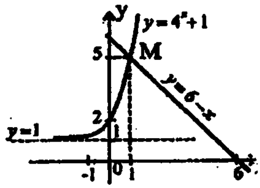


458.

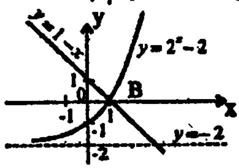
а) $y = 3^{1-x}$ убывает на R, $y = 2x - 1$ возрастает на R, графики этих функций могут иметь не более одной точки пересечения. Это точка A(1;1), значит $x = 1$.



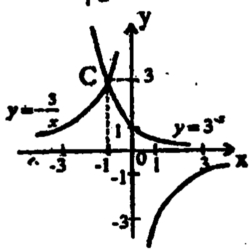
б) $y = 4^x + 1$ возрастает на R, $y = 6 - x$ убывает на R, графики этих функций могут иметь не более одной точки пересечения. Это точка M(1;5), значит $x = 1$.



в) $y = 2^x - 2$ возрастает на R, $y = 1 - x$ убывает на R, графики этих функций могут иметь не более одной точки пересечения. Это точка B(1;0), значит $x = 1$.



г) при $x \in (-\infty;0)$ $3^{-x} > 0, -\frac{3}{x} > 0$ и $y = 3^{-x}$ убывает, $y = -\frac{3}{x}$ возрастает; при $x \in (0;\infty)$ $3^{-x} > 0$, $-\frac{3}{x} < 0$; следовательно, графики функций $y = 3^{-x}$ и $y = -\frac{3}{x}$ могут иметь не более одной точки пересечения одной точки пересечения на $(-\infty;0)$. Это точка C(-1;3), значит $x = -1$.



459.

а) нет; б) нет; в) нет; г) нет.

36. Решение показательных уравнений и неравенств

460. а) $4^x = 64 \Leftrightarrow 4^x = 4^3 \Leftrightarrow x = 3$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27 \Leftrightarrow 3^{-x} = 3^3 \Leftrightarrow x = -3$;

в) $3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Leftrightarrow x = 6.$

461. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \Leftrightarrow x = 3$;

б) $\sqrt{8^{x-3}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$; $2^{\frac{3}{2}(x-3)} = 2^{\frac{2}{3}(2-x)}$; $9x - 27 = 8 - 4x$;

$13x = 35$: $\quad x = \frac{35}{13} = 2\frac{9}{13}$;

в) $\sqrt{2^x}\ \sqrt{3^x} = 36 \Leftrightarrow \sqrt{6^x} = 36 \Leftrightarrow 6^{\frac{x}{2}} = 6^2 \Leftrightarrow x = 4$;

г) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{3}\right)^{-3x-1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3} \Leftrightarrow -3x - 1 = 5x - 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$

462. а) $3^{6-x} = 3^{3x-2} \Leftrightarrow 6-x = 3x - 2 \Leftrightarrow x = 2$;

б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{\sqrt{7}}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x^2 + x - 0,5 = 0,5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_2 = 0,5; \end{array}\right.$

в) $\sqrt{3^x} = 9 \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 4$;

г) $2^{x^2+2x-0,5} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{x^2+2x-0,5} = 2^{2,5} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 0,5 = 2,5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 1. \end{array}\right.$

463. а) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539 \Leftrightarrow 11 \cdot 7^{x+1} = 539 \Leftrightarrow 7^{x+1} = 7^2 \Leftrightarrow x = 1.$

б) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 15 \Leftrightarrow 6 \cdot 3^x - 3^x = 15 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1.$

в) $4^{x+1} + 4^x = 320 \Leftrightarrow 5 \cdot 4^x = 320 \Leftrightarrow 4^x = 4^3 \Leftrightarrow x = 3.$

г) $3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77 \Leftrightarrow 75 \cdot 5^{x+1} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77 \Leftrightarrow 5^{x+1} = 5^0 \Leftrightarrow x = -1.$

464. а) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 8t - 9 = 0$

$(t = 3^x)$ $t > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -1, \\ t_2 = 9; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = -1 - \text{не подходит}, \\ 3^x = 9; \end{array}\right. \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$;

б) $100^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0 \Leftrightarrow 10^{2x} - 11 \cdot 10^x + 10 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 11t + 10 = 0$

$(t = 10^x)$ $t > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1, \\ t_2 = 10; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10^x = 1, \\ 10^x = 10; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = 1. \end{array}\right.$

в) $36^x - 4\cdot6^x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6^{2x} - 4\cdot6^x - 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4^t - 12 = 0$

$(t = 6^x)\ t > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -2, \\ t_2 = 6; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6^x = -2 - \text{не подходит}, \\ 6^x = 6; \end{array}\right. \Leftrightarrow 6^x = 6 \Leftrightarrow x = 1;$

г) $49^x - 8\cdot7^x + 7 = 0 \Leftrightarrow 7^{2x} - 8\cdot7^x + 7 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 7 = 0$

$(t = 7^x)\ t > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1, \\ t_2 = 7; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7^x = 1, \\ 7^x = 7; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = 1. \end{array}\right.$

465. а) $\begin{cases} 4^{x+y} = 16, \\ 4^{x+2y-1} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x+y} = 4^2, \\ 4^{x+2y-1} = 4^0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2, \\ x + 2y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y, \\ y = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = -1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6^{3x-y} = \sqrt{6}, \\ 2^{y-2x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^{3x-y} = 6^{0,5}, \\ 2^{y-2x} = 2^{-0,5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 0,5, \\ y - 2x = -0,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 0,5, \\ x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = -0,5 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^{2y-x} = \dfrac{1}{81}, \\ 3^{x-y+2} = 27; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2y-x} = 3^{-4}, \\ 3^{x-y+2} = 3^3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - x = -4, \\ x - y + 2 = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3, \\ x = y + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = -3 \end{cases}$

г) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{4x-y} = 25, \\ 7^{9x-y} = \sqrt{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{y-4x} = 5^2, \\ 7^{9x-y} = 7^{0,5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 4x = 2, \\ 9x - y = 0,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 2,5, \\ y = 4x + 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 4 \end{cases}$

466. а) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \geq 27 \Leftrightarrow 3^{-x} \geq 3^3 \Leftrightarrow -x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3;$

б) $\left(\sqrt{6}\right)^x \leq \dfrac{1}{36} \Leftrightarrow 6^{\frac{x}{2}} \leq 6^{-2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -4;$

в) $0,2^x \leq \dfrac{1}{25} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{5}\right)^x \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 \Leftrightarrow x \geq 2;$

г) $(1,5)^x < 2,25 \Leftrightarrow (1,5)^x < 1,5^2 \Leftrightarrow x < 2.$

467. а) $4^{5-2x} \leq 0,25 \Leftrightarrow 4^{5-2x} \leq 4^{-1} \Leftrightarrow 5 - 2x \leq -1 \Leftrightarrow x \geq 3;$
б) $0,3^{7+4x} > 0,027 \Leftrightarrow 0,3^{7+4x} > 0,3^3 \Leftrightarrow 7 + 4x < 3 \Leftrightarrow x < -1;$
в) $0,4^{2x+1} > 0,16 \Leftrightarrow 0,4^{2x+1} > 0,4^2 \Leftrightarrow 2x + 1 < 2 \Leftrightarrow x < 0,5:$
г) $3^{2-x} < 27 \Leftrightarrow 3^{2-x} < 3^3 \Leftrightarrow 2 - x < 3 \Leftrightarrow x > -1.$

468.

а) $3^{x+1} - 2\cdot3^{x-2} = 75 \Leftrightarrow 3\cdot3^x - \dfrac{2}{9}\cdot3^x = 75 \Leftrightarrow 2\dfrac{7}{9}\cdot3^x = 75 \Leftrightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow x = 3\cdot$

б) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x-1} - \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+1} = 4{,}8 \Leftrightarrow 5\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^x - \dfrac{1}{5}\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^x = 4{,}8\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\cdot4\dfrac{4}{5} = 4{,}8 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{5}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$

в) $5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=162\Leftrightarrow 40\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+0{,}5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=162\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\cdot 40{,}5=162\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=4\Leftrightarrow x=-2;$

г) $5\cdot 9^{x}+9^{x-2}=406\Leftrightarrow 5\cdot 9^{x}+\frac{1}{81}\cdot 9^{x}=406\Leftrightarrow 9^{x}\cdot 5\frac{1}{81}=406\Leftrightarrow 9^{x}=81\Leftrightarrow x=2.$

469. Т.к. функция $a^x>0$, то мы имеем право делить уравнение на нее.

а) $2^{x-2}=3^{x-2}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}=1\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2;$

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{1-x}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}=4^{x-1}\Leftrightarrow 12^{x-1}=1\Leftrightarrow x=1;$

в) $5^{x+1}=8^{x+1}\Leftrightarrow\left(\frac{8}{5}\right)^{x+1}=1\Leftrightarrow x=-1;$

г) $7^{x-2}=4^{2-x}\Leftrightarrow(28)^{x-2}=1\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2.$

470. а) $3^{x}+3^{3-x}=12\Leftrightarrow 3^{x}+27\cdot 3^{-x}=12\Leftrightarrow t^{2}-12t+27=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3,\\ t=9.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^{x}=3,\\ 3^{x}=9;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1,\\ x_2=2.\end{array}\right.$

б) $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}\Leftrightarrow 2^{2\sqrt{x-2}}-10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}+16=0\Leftrightarrow t^{2}-10t+16=0$

$\left(t=2^{\sqrt{x-2}}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2,\\ t=8;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{\sqrt{x-2}}=2,\\ 2^{\sqrt{x-2}}=8;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=1,\\ \sqrt{x-2}=3;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=11.\end{array}\right.$

в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x}-\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=4{,}96\Leftrightarrow 0{,}2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}-\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=4{,}96$

$\left(t=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\right)t>0\Leftrightarrow t^{2}+4{,}96t-0{,}2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-5-\text{неподходит}\\ t=0{,}04\end{array}\right.\Leftrightarrow\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\Leftrightarrow x=2.$

г) $4^{x}-0{,}25^{x-2}=15\Leftrightarrow 4^{x}-16\cdot 4^{-x}=15t\ \left(t=4^{x}\right)\Leftrightarrow t>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^{2}-15t-16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1-\text{не подходит},\\ t=16;\end{array}\right.\Leftrightarrow 4^{x}=4^{2}\Leftrightarrow x=2.$

471.

а) $\left\{\begin{array}{l}5^{x+y}=125,\\ 4^{(x-y)^2-1}=1;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+y=3,\\ (x-y)^{2}-1=0;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=3-x,\\ (2x-3)^{2}-1=0;\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ 2x - 3 = \pm 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = 2; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

б) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 4^x + 4^y = 80; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x, \\ 4^x + 4^{5-x} = 80; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x, \\ 4^{2x} - 80 \cdot 4^x + 1024 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x, \\ \left[\begin{array}{l} 4^x = 64, \\ 4^x = 16; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 3, \\ x_2 = 2; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

в) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ 6^{x+y} = 216; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ 3^x + 27 \cdot 3^{-x} = 12; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ 3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ \left[\begin{array}{l} 3^x = 3, \\ 3^x = 9; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = 2; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

г) $\begin{cases} 4^{x+y} = 128, \\ 5^{3x-2y-3} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2(x+y)} = 2^7, \\ 3x - 2y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 7, \\ 3x - 2y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 7, \\ 5x = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1{,}5. \end{cases}$

472. а) $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} \Leftrightarrow 2^{x^2} > 2^{3-2x} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3, \\ x > 1 \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; \infty)$.

б) $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < \left(\sqrt{5}\right)^{x^2+3{,}75} \Leftrightarrow 5^{-4x} < 5^{\frac{x^2+3{,}75}{2}} \Leftrightarrow -4x < \frac{x^2+3{,}75}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 3{,}75 > 0$. $x \in (-\infty; -7{,}5) \cup (-0{,}5; +\infty)$.

Ответ: $[-3; -1]$.

в) $3^{4x+3} \le \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow 3^{4x+3} \le 3^{-x^2} \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3, \\ x \le -1 \end{cases}$

г) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10x} < 64^{2\frac{2}{3} - x^2} \Leftrightarrow 4^{-10x} > 4^{8-3x^2} \Leftrightarrow 3x^2 - 10x - 8 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\frac{2}{3}, \\ x > 4 \end{array}\right.$ Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (4; \infty)$

473.

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}>2{,}5 \Leftrightarrow 2{,}5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x>2{,}5 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x>1 \Leftrightarrow x<0;$

б) $2^{2x-1}+2^{2x-2}+2^{2x-3}<448 \Leftrightarrow \frac{7}{8}\cdot 2^{2x}<448 \Leftrightarrow 4^x<64\cdot 8 \Leftrightarrow 4^x<4^{4,5} \Leftrightarrow x<4{,}5.$

в) $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1}-\left(\frac{4}{3}\right)^x>\frac{3}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^x>\frac{3}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x>\frac{9}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x>\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow X>-2.$

г) $3^{x+2}+3^{x-1}<28 \Leftrightarrow \frac{28}{3}\cdot 3^x<28 \Leftrightarrow 3^x<3 \Leftrightarrow x<1.$

474. а) $\pi^x-\pi^{2x}\geq 0 \Leftrightarrow \pi^x(1-\pi^x)\geq 0$, т.к. $\pi^x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\pi^x\geq 0,\\ 1-\pi^x\geq 0;\end{cases} \Leftrightarrow \pi^x\leq 1 \Leftrightarrow x\leq 0;$

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}-10\cdot 3^{-x}+3<0 \Leftrightarrow 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-10\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+3<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^x>\frac{1}{3},\\ \left(\frac{1}{3}\right)^x<3;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<1,\\ x>-1;\end{cases}$ x∈(–1; 1);

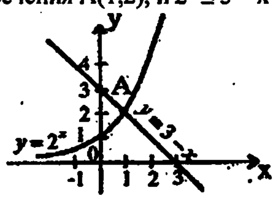
в) $4^x-2^{x+1}-8>0 \Leftrightarrow 2^{2x}-2\cdot 2^x-8>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x>4,\\ 2^x<-2;\end{array}\right. \Leftrightarrow x>2.$

г) $\left(\frac{1}{36}\right)^x-5\cdot 6^{-x}-6\leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^x-6\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{1}{6}\right)^x\geq -1,\\ \left(\frac{1}{6}\right)^x\leq 6;\end{cases} \Leftrightarrow$

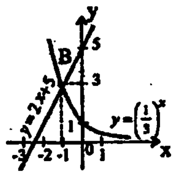
$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^x\leq\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} \Leftrightarrow x\geq -1.$

475.

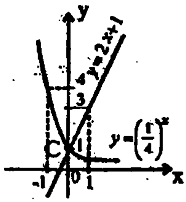
а) $2^x \leq 3 - x$; т.к. $y = 2^x$ возрастает, а $y = 3 - x$ убывает, следовательно, у них одна точка пересечения A(1;2), и $2^x \leq 3 - x$ при $x \leq 1$;



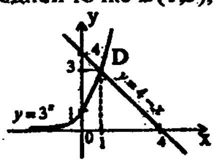
б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le 2x+5$: т.к. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ – убывает, а y=2x+5 – возрастает, то они пересекаются только в одной точке B(-1;3), и $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le 2x+5$ при x ≥ -1



в) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \ge 2x+1$: т.к. $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ – убывает, а y=2x+1 – возрастает, то они пересекаются только в одной точке C(0;1), и $\left(\frac{1}{4}\right)^x \ge 2x+1$ при x≤0;



г) $3^x \ge 4-x$; т.к. $y=3^x$ – возрастает, а $y=4-x$ – убывает, то они пересекаются тоьлько в одной точке D(1;3), $3^x \ge 4-x$ при x ≥ 1.



37. Логарифмы и их свойства

476.

а) $\log_3 9 = 2$; б) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; в) $\log_4 16 = 2$; г) $\log_5 \frac{1}{25} = -2$.

477.

а) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$. б) $\log_7 1 = 0$; в) $\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$; г) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$.

478.

а) $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$. б) $\log_{32} 8 = \frac{3}{5}$; в) $\log_{81} 27 = \frac{3}{4}$. г) $\log_{125} 25 = \frac{2}{3}$

479.

а) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$, $3^{-4} = \frac{1}{81}$;

б) $\log_{16} 1 = 0$, $16^0 = 1$;

в) $\log_4 16 = 2$, $4^2 = 16$;

г) $\log_5 125 = 3$, $5^3 = 125$.

480.

а) $\log_5 0{,}04 = -2$, $5^{-2} = 0{,}04$;

б) $\log_7 343 = 3$, $7^3 = 343$;

в) $\lg 0{,}01 = -2$, $10^{-2} = 0{,}01$;

г) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$, $3^{-5} = \frac{1}{243}$

481.

а) $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$, $\left(\sqrt{2}\right)^6 = 8$;

б) $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27 = -6$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-6} = 27$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$;

г) $\log_{0,5} 4 = -2$, $0{,}5^{-2} = 4$.

482. а) $\log_{2\sqrt{2}} 128 = \frac{14}{3}$, $\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{14}{3}} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{14}{3}} = 128$;

б) $\log_{0,2} 0{,}008 = 3$, $0{,}2^3 = 0{,}008$;

в) $\log_{\sqrt{5}} 0{,}2 = -2$, $\left(\sqrt{5}\right)^{-2} = 0{,}2$; г) $\log_{0,2} 125 = -3$, $0{,}2^{-3} = 5^3 = 125$.

483.

а) $\log_5 25 = 2$, $\log_5 \frac{1}{5} = -1$, $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$; б) $\log_8 64 = 2$, $\log_8 \frac{1}{8} = -1$, $\log_8 2 = \frac{1}{3}$;

в) $\log_2 16 = 4$, $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$;

г) $\log_3 27 = 3$, $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$.

484.

а) $\log_3 x = -1$, $x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$;

б) $\log_{\frac{1}{6}} x = -3$, $x = \left(\frac{1}{6}\right)^{-3} = 6^3 = 216$;

в) $\log_5 x = 2$, $x = 5^2 = 125$;

г) $\log_7 x = -2$, $x = 7^{-2} = \frac{1}{49}$.

485.

а) $\log_4 x = -3$, $x = 4^{-3} = \frac{1}{64}$;

б) $\log_{\sqrt{5}} x = 0$, $x = \left(\sqrt{5}\right)^0 = 1$;

в) $\log_{\frac{1}{7}} x = 1$, $x = \left(\frac{1}{7}\right)^1 = \frac{1}{7}$;

г) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$, $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$.

486. а) $\log_x 81 = 4$, $x^4 = 3^4$, $x = 3$; б) $\log_x \frac{1}{16} = 2$, $x^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$, $x = \frac{1}{4}$;

в) $\log_x \frac{1}{4} = -2$, $x^{-2} = 2^{-2}$, $x = 2$; г) $\log_x 27 = 3$, $x^3 = 3^3$, $x = 3$.

487. а) $\log_4 x=2$, $x=4^2=16$; $\log_4 16 = 2$; $\log_4 x = \frac{1}{2}$, $x = 4^{\frac{1}{2}} = 2$: $\log_4 2 = \frac{1}{2}$;
$\log_4 x = 1$, $x = 4^1 = 4$; $\log_4 4 = 1$; $\log_4 x = 0$, $x = 4^0 = 1$: $\log_4 1 = 0$;
б) $\log_3 x = 3$, $x = 3^3 = 27$; $\log_3 27 = 3$; $\log_3 x = -1$, $x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$: $\log_3 \frac{1}{3} = -1$;
$\log_3 x = -3$, $x = 3^{-3} = \frac{1}{27}$; $\log_3 \frac{1}{27} = -3$; $\log_3 x = 1$, $x = 3^1 = 3$; $\log_3 3 = 1$;
в) $\log_2 x = 3$, $x = 2^3 = 8$; $\log_2 8 = 3$; $\log_2 x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{2}$; $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$;
$\log_2 x = 0$, $x = 2^0 = 1$; $\log_2 1 = 0$; $\log_2 x = -1$, $x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$; $\log_2 \frac{1}{2} = -1$;
г) $\log_5 x = 1$, $x = 5^1 = 5$; $\log_5 5 = 1$; $\log_5 x = -2$, $x = 5^{-2} = \frac{1}{25}$; $\log_5 \frac{1}{25} = -2$;
$\log_5 x = 0$, $x = 5^0 = 1$: $\log_5 1 = 0$; $\log_5 x = 3$, $x = 5^3 = 125$: $\log_5 125 = 3$.

488.
а) $1{,}7^{\log_{1,7} 2} = 2$; б) $\pi^{\log_\pi 5,2} = 5{,}2$; в) $2^{\log_2 5} = 5$; г) $3{,}8^{\log_{3,8} 11} = 11$.

489.
а) $5^{1+\log_5 3} = 5 \cdot 5^{\log_5 3} = 5 \cdot 3 = 15$ б) $10^{1-\lg 2} = \frac{10}{10^{\lg 2}} = \frac{10}{2} = 5$;

в) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+\log_{\frac{1}{7}} 2} = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\frac{1}{7}} 2} = \frac{1}{7} \cdot 2 = \frac{2}{7}$; г) $3^{2-\log_3 18} = \frac{9}{3^{\log_3 18}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.

490.
а) $4^{2\log_4 3} = \left(4^{\log_4 3}\right)^2 = 3^2 = 9$; б) $5^{-3\log_5 \frac{1}{2}} = 5^{\log_5 \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4\log_{\frac{1}{2}} 3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3^4} = 3^4 = 81$; г) $6^{-2\log_6 5} = 6^{\log_6 5^{-2}} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$.

491. а) $\log_3\left(\sqrt[5]{a^3 b}\right)^{\frac{2}{3}} = \log_3\left(a^{\frac{2}{5}} b^{\frac{2}{15}}\right) = \log_3 a^{\frac{2}{5}} + \log_3 b^{\frac{2}{15}} = \frac{2}{5}\log_3 a + \frac{2}{15}\log_3 b =$
$= \frac{2}{5}\left(\log_3 a + \frac{\log_3 b}{3}\right)$;

б) $\log_3\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}}\right)^{-0,2} = \log_3\left(a^{-2}\cdot b^{\frac{1}{6}}\right) = \log_3 a^{-2} + \log_3 b^{\frac{1}{6}} = -2\log_3 a + \frac{1}{6}\log_3 b;$

в) $\log_3\left(9a^4\sqrt[5]{b}\right) = \log_3 9 + \log_3 a^4 + \log_3 b^{\frac{1}{5}} = 2 + 4\log_3 a + \frac{1}{5}\log_3 b;$

г) $\log_3\frac{b^2}{27a^7} = \log_3 b^2 - \log_3 27 - \log_3 a^7 = 2\log_3 b - 3 - 7\log_3 a.$

492. а) $\lg\left(100\sqrt{ab^3c}\right) = \lg 100 + \lg a^{\frac{1}{2}} + \lg b^{\frac{3}{2}} + \lg c^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{2}\lg a + \frac{3}{2}\lg b + \frac{1}{2}\lg c =$

$= 2 + \frac{1}{2}\lg(ac) + \frac{3}{2}\lg b;$

б) $\lg\left(\frac{a^5}{0,1c^2\sqrt{b}}\right) = \lg a^5 - \lg 0,1 - \lg c^2 - \lg b^{\frac{1}{2}} = 5\lg a + 1 - 2\lg c - \frac{1}{2}\lg b;$

в) $\lg\left(\sqrt[3]{10}a^{\frac{1}{3}}b^4c^{-\frac{1}{2}}\right) = \lg 10^{\frac{1}{3}} + \lg a^{\frac{1}{3}} + \lg b^4 + \lg c^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lg a + 4\lg b - \frac{1}{2}\lg c;$

г) $\lg\frac{0,01c^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}b^3} = \lg 0,01 + \lg c^{\frac{2}{3}} - \lg a^{\frac{1}{2}} - \lg b^3 = -2 + \frac{2}{3}\lg c - \frac{1}{2}\lg a - 3\lg b.$

493. а) $\lg\left(10^3a^4b^{\frac{1}{2}}c^{-3}\right) = \lg 10^3 + \lg a^4 + \lg b^{\frac{1}{2}} + \lg c^{-3} = 3 + 4\lg a + \frac{1}{2}\lg b - 3\lg c;$

б) $\lg\frac{b^{\frac{2}{3}}}{10^5a^6c^5} = \lg b^{\frac{2}{3}} - \lg 10^5 - \lg a^6 - \lg c^5 = \frac{2}{3}\lg b - 5 - 6\lg a - 5\lg c;$

в) $\lg\left(10^{-4}a^2b^5c^{\frac{2}{3}}\right) = \lg 10^{-4} + \lg a^2 + \lg b^5 + \lg c^{\frac{2}{3}} = -4 + 2\lg a + 5\lg b + \frac{2}{3}\lg c;$

г) $\lg\left(\frac{c^{\frac{7}{4}}}{10^7a^{\frac{2}{3}}b^8}\right) = \lg c^{\frac{7}{4}} - \lg 10^7 - \lg a^{\frac{2}{3}} - \lg b^8 = \frac{7}{4}\lg c - 7 - \frac{2}{3}\lg a - 8\lg b.$

494. а) $\log_5 72 = \log_5 8 + \log_5 9 = 3\log_5 2 + 2\log_5 3 = 3a + 2b;$
б) $\log_5 15 = \log_5 5 + \log_5 3 = 1 + b;$
в) $\log_5 12 = \log_5 2^2 + \log_5 3 = 2\log_5 2 + \log_5 3 = 2a + b;$
г) $\log_5 30 = \log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 5 = a + b + 1.$

495. а) $\lg 8+\lg 125=\lg(8\cdot 125)=\lg 10^3=3$; б) $\log_2 7-\log_2\frac{7}{16}=\log_2 2^4=4$;

в) $\log_{12}4+\log_{12}36=\log_{12}12^2=2$; г) $\lg 13-\lg 130=\lg 10^{-1}=-1$.

496. а) $\frac{\lg 8+\lg 18}{2\lg 2+\lg 3}=\frac{\lg 144}{\lg 12}=\frac{2\lg 12}{\lg 12}=2$; б) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4}=\frac{2\log_3 4}{\log_3 4}=2$;

в) $\log_2 11-\log_2 44=\log_2\frac{1}{4}=-2$;

г) $\log_{0,3}9-2\log_{0,3}10=\log_{0,3}\frac{9}{100}=\log_{0,3}0,3^2=2$.

497. а) $3\log_6 2+0,5\log_6 25-2\log_6 3=\log_6 8+\log_6 5-\log_6 9=\log_6\frac{40}{9}$;

$\log_6 x=\log_6\frac{40}{9}$, $x=4\frac{4}{9}$;

б) $\frac{1}{2}\lg 5a-3\lg b+4\lg c=\lg(5a)^{\frac{1}{2}}-\lg b^3+\lg c^4=\lg\left(\frac{(5a)^{\frac{1}{2}}\cdot c^4}{b^3}\right)$;

$\lg x=\lg\left(\frac{(5a)^{\frac{1}{2}}\ c^4}{b^3}\right)$, $x=\frac{(5a)^{\frac{1}{2}}\cdot c^4}{b^3}$;

в) $5\lg m+\frac{2}{3}\lg n-\frac{1}{4}\lg p=\lg m^5+\lg n^{\frac{2}{3}}-\lg p^{\frac{1}{4}}=\lg\left(\frac{m^5\cdot n^{\frac{2}{3}}}{p^{\frac{1}{4}}}\right)$;

$\lg x=\lg\left(\frac{m^5 n^{\frac{2}{3}}}{p^{\frac{1}{4}}}\right)$, $x=\frac{m^5 n^{\frac{2}{3}}}{p^{\frac{1}{4}}}$

г) $\frac{1}{4}\log_4 216-2\log_4 10+4\log_4 3=\log_4 6-\log_4 100+\log_4 81=$

$=\log_4\left(\frac{6\cdot 81}{100}\right)=\log_4 4.86$; $\log_4 x=\log_4 4,86$, $x=4,86$

498

а) $\log_{\frac{1}{2}}3+\log_3\frac{1}{2}+2=\frac{\log_3 3}{\log_3\frac{1}{2}}+\log_3\frac{1}{2}+2=\frac{\left(\log_3\frac{1}{2}\right)^2+2\log_3\frac{1}{2}+1}{\log_3\frac{1}{2}}=$

$$= -\frac{\left(\log_3 \frac{1}{2} + 1\right)^2}{\log_3 2} < 0\text{, откуда } \log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2;$$

б) $4^{\log_5 7} = \left(5^{\log_5 4}\right)^{\log_5 7} = \left(5^{\log_5 7}\right)^{\log_5 4} = 7^{\log_5 4}$;

в) $\log_3 7 + \log_7 3 - 2 = \log_3 7 + \frac{\log_3 3}{\log_3 7} - 2 = \frac{(\log_3 7)^2 - 2\log_3 7 + 1}{\log_3 7} =$

$= \frac{(\log_3 7 - 1)^2}{\log_3 7} > 0$, откуда $\log_3 7 + \log_7 3 > 2$;

г) $3^{\log_2 5} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{\log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^{\log_2 3} = 5^{\log_2 3}$.

38. Логарифмическая функция

499. а) $10 - 5x > 0 \Leftrightarrow x < 2$; $D(y) = (-\infty;2)$;

б) $9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ x < 3; \end{cases}$ $D(y) = (-3;3)$;

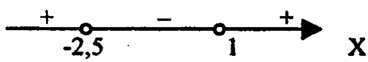
в) $x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$; $D(y) = (4;\infty)$;

г) $x^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4, \\ x < -4; \end{array}\right.$ $D(y) = (-\infty;-4)\cup(4;\infty)$.

500.

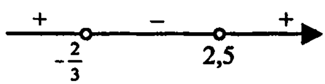
а) $6 + x - x^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x < 3; \end{cases}$ $D(y) = (-2; 3)$;

б)



$\frac{2x+5}{x-1} > 0$; $D(y) = (-\infty;-2{,}5)\cup(1;\infty)$;

в)



$\frac{2+3x}{5-2x} > 0 \Leftrightarrow \frac{2+3x}{2x-5} < 0$; $D(y) = \left(-\frac{2}{3};2{,}5\right)$;

г) $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 3. \end{array}\right.$ $D(y) = (-\infty;-1)\cup(3;\infty)$.

501. а) $\log_2 3{,}8 < \log_2 4{,}7$, т.к. $3{,}8 < 4{,}7$ и $2 > 1$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}15 > \log_{\frac{1}{3}} 0{,}2$, т.к. $0{,}15 < 0{,}2$ и $\frac{1}{3} < 1$;

в) $\log_3 5{,}1 > \log_3 4{,}9$, т.к. $5{,}1 > 4{,}9$ и $3 > 1$;

г) $\log_{0,2} 1{,}8 > \log_{0,2} 2{,}1$, т.к. $1{,}8 < 2{,}1$ и $0{,}2 < 1$.

502. а) $\log_{\sqrt{2}} 3 > 1 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$ т.к. $3 > \sqrt{2}$ и $\sqrt{2} > 1$;

б) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 1,9 > \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2,5$, т.к. $1,9 < 2,5$ и $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$;

в) $\log_{\pi} 2,9 < 1 = \log_{\pi} \pi$, т.к. $2,9 < \pi$ и $\pi > 1$;

г) $\log_{0,7} \sqrt{2} < \log_{0,7} 0,3$, т.к. $\sqrt{2} > 0,3$ и $0,7 < 1$.

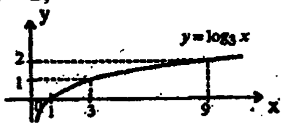
503. а) $\log_2 10 > \log_2 8 = 3$, $\log_5 30 < \log_5 125 = 3 \Rightarrow \log_2 10 > \log_5 30$;

б) $\log_{0,3} 2 < \log_{0,3} \sqrt{0,3} = \frac{1}{2}$, $\log_5 3 > \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_{0,3} 2 < \log_5 3$;

в) $\log_3 5 > \log_3 3 = 1$, $\log_7 4 < \log_7 7 = 1 \Rightarrow \log_3 5 > \log_7 4$;

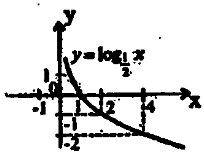
г) $\log_3 10 > \log_3 9 = 2$, $\log_8 57 < \log_8 64 = 2 \Rightarrow \log_3 10 > \log_8 57$.

504. а) $y = \log_3 x$; $D(y) = (0;\infty)$, $E(y) = R$, $y(x)$ возрастает на $(0;\infty)$;
$y(1) = 0$, $y(3) = 1$, $y(9) = 2$;

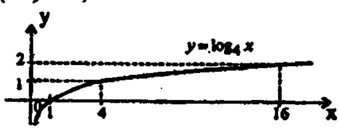


б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; $D(y) = (0;\infty)$, $E(y) = R$, $y(x)$ убывает на $(0;\infty)$;

$y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $y(1) = 0$, $y(2) = -1$;

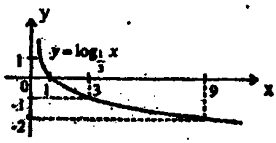


в) $y = \log_4 x$; $D(y) = (0;\infty)$, $E(y) = R$, $y(x)$ возрастает на $(0;\infty)$;
$y(1) = 0$, $y(4) = 1$, $y(16) = 2$;



г) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; $D(y) = (0;\infty)$, $E(y) = R$, $y(x)$ убывает на $(0;\infty)$;

$y\left(\frac{1}{3}\right) = 1$, $y(1) = 0$, $y(3) = -1$, $y(9) = -2$.



505. а) $\sin x>0$ при $2\pi k<x<\pi + 2\pi k,\ k \in Z$; $D(y) = (2\pi k;\pi + 2\pi k / k \in Z)$;

б) $2^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2^x > 2^0 \Leftrightarrow x > 0$; $D(y) = (0;\infty)$;

в) $\cos x > 0$ при $-\frac{\pi}{2}+2\pi n < x < \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z$;

$$D(y)=\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n \Big/_{n\in Z}\right);$$

г) $1 - 3^x > 0 \Leftrightarrow 3^x < 3^0 \Leftrightarrow x < 0$; $D(y) = (-\infty;0)$.

506. а) $\log_2 2\sin\frac{\pi}{15} + \log_2\cos\frac{\pi}{15} = \log_2 \sin\frac{2\pi}{15}$;

б)

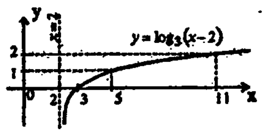
$$\log_4\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}\right)+\log_4\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9}\right)=\log_4\left(\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot 3}+\sqrt[3]{3}\right)\right)=$$

$= \log_4 4 = 1$;

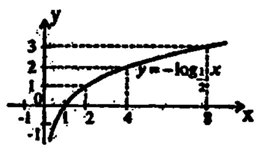
в) $\lg \mathrm{tg}4 + \lg \mathrm{ctg}4 = \lg(\mathrm{tg}4\,\mathrm{ctg}4) = \lg 1 = 0$;

г) $\log_\pi\left(5+2\sqrt{6}\right)+\log_\pi\left(5-2\sqrt{6}\right)=\log_\pi(25-24)=\log_\pi 1=0$;

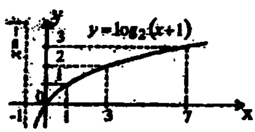
507. а) $y = \log_3(x - 2)$;



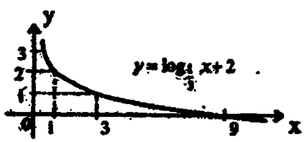
б) $y=-\log_{\frac{1}{2}} x$;



в) $y = \log_2(x + 1)$;



г) $y=\log_{\frac{1}{3}} x+2$.



508. а) $\log_3 x=2\log_9 6-\log_9 12 \Leftrightarrow \log_3 x=\log_9 3 \Leftrightarrow \log_3 x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x=\log_{0,2} 35-2\log_{0,2} 25\sqrt{7} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x=\log_{0,2}\frac{35}{625\cdot 7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x=\log_{0,2} 0{,}008 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x=3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{8}$;

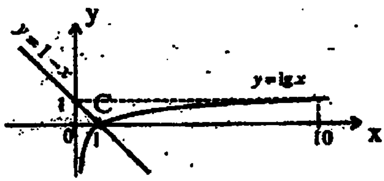
в)

$\log_5 x=\frac{1}{2}\log_3 144+\log_3 0{,}75 \Leftrightarrow \log_5 x=\log_3(12\cdot 0{,}75) \Leftrightarrow \log_5 x=2 \Leftrightarrow x=25$;

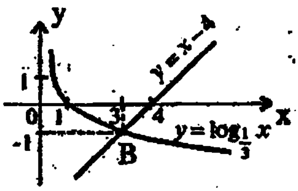
г) $\log_\pi x=3\log_{0,1} 4+2\log_{0,1} 1\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_\pi x=\log_{0,1}\frac{64\cdot 25}{16} \Leftrightarrow \log_\pi x=-2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\pi^2}$.

509. В этом номере всегда одна функция возрастает, авторая убывает, вследствии чего они могут пересекаться лишь в одной точке.

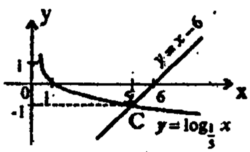
а) $\lg x = 1 - x$; графики функций $y = \lg x$ и $y = 1 - x$ пересекаются в т.A(1;0), т.о. $x = 1$.



б) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$; Графики функций $y = x - 4$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ пересекаются в т.B(3,-1), т.о. $x = 3$.

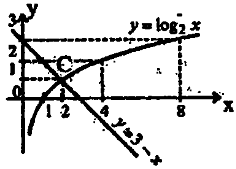


в) $\log_{\frac{1}{5}} x = x - 6$;



Графики функций $y=x-6$ и $y=\log_{\frac{1}{5}} x$ пересекаются в т.C(5,-1), т.о. $x=5$.

г) $\log_2 x = 3 - x$; графики функций $y = \log_2 x$ и $y = 3 - x$ пересекаются в т.D(2;1), т.о. $x = 2$.



510. а) нет; б) нет; в) нет; г) нет.

511.

а) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ убывает на D(f), поэтому $\max\limits_{[1;4]} f(x) = f(1) = 0$ $\min\limits_{[1;4]} f(x) = f(4) = -1$;

б) $f(x) = \log_9 x$ возрастает на D(f) поэтому

$\min\limits_{\left[\frac{1}{9};9\right]} f(x) = f\left(\frac{1}{9}\right) = -1$, $\max\limits_{\left[\frac{1}{9};9\right]} f(x) = f(9) = 1$;

в) $f(x) = \log_5 x$ возрастает на D(f) поэтому

$\min\limits_{\left[\frac{1}{5};1\right]} f(x) = f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$, $\max\limits_{\left[\frac{1}{5};1\right]} f(x) = f(x) = 0$;

г) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ убывает на D(f) поэтому

$\max\limits_{\left[\frac{1}{2};4\right]} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};4\right]} f(x) = f(4) = -2$.

39. Решение логарифмических уравнений и неравенств

512. а) $9^x = 0,7 \Leftrightarrow \log_9 9^x = \log_9 0,7 \Leftrightarrow x = \log_9 0,7$;

б) $(0,3)^x = 7 \Leftrightarrow \log_{0,3} (0,3)^x = \log_{0,3} 7 \Leftrightarrow x = \log_{0,3} 7$;

в) $2^x = 10 \Leftrightarrow \log_2 2^x = \log_2 10 \Leftrightarrow x = \log_2 10$;

г) $10^x = \pi \Leftrightarrow \lg 10^x = \lg\pi \Leftrightarrow x = \lg\pi$.

513. а) $\log_5 x=2 \Leftrightarrow x=5^2 \Leftrightarrow x = 25$; б) $\log_{0,4} x = -1 \Leftrightarrow x=(0,4)^{-1} \Leftrightarrow x = 2,5$;

в) $\log_9 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 9^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.; г) $\lg x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 \Leftrightarrow x = 100$.

514. а) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4) = -2 \Leftrightarrow 2x-4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow 2x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 4$;

б) $\log_\pi(x^2+2x+3)=\log_\pi 6 \Leftrightarrow x^2+2x+3=6 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=1. \end{array}\right.$

в) $\log_{0,3}(5+2x)=1 \Leftrightarrow 5+2x=0,3 \Leftrightarrow x=-2,35.$

г) $\log_2(3-x)=0 \Leftrightarrow 3-x=1 \Leftrightarrow x=2.$

515. а) $(0,2)^{4-x}=3 \Leftrightarrow 4-x=\log_{0,2}3 \Leftrightarrow x=4-\log_{0,2}3.$

б) $5^{x^2}=7 \Leftrightarrow x^2=\log_5 7 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\log_5 7}.$

в) $3^{2-3x}=8 \Leftrightarrow 2-3x=\log_3 8 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}(2-\log_3 8).$

г) $7^{2x}=4 \Leftrightarrow 2x=\log_7 4 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\log_7 4.$

516. а) $\log_3 x>2 \Leftrightarrow \log_3 x>\log_3 9 \Leftrightarrow x>9.$

б) $\log_{0,5} x>-2 \Leftrightarrow \log_{0,5} x>\log_{0,5} 25 \Leftrightarrow \begin{cases} x<25, \\ x>0. \end{cases}$ Итого: (0;25).

в) $\log_{0,7} x<1 \Leftrightarrow \log_{0,7} x<\log_{0,7} 0,7 \Leftrightarrow x>0,7.$

г) $\log_{2,5} x<2 \Leftrightarrow \log_{2,5} x<\log_{2,5} 6,25 \Leftrightarrow \begin{cases} x<6,25, \\ x>0. \end{cases}$ Итого: (0;6,25).

517. а) $\log_4(x-2)<2 \Leftrightarrow \log_4(x-2)<\log_4 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2<16, \\ x-2>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<18, \\ x>2. \end{cases}$

б) $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x)>-1;\ \log_{\frac{1}{3}}(3-2x)>\log_{\frac{1}{3}}3 \Leftrightarrow 3-2x<3 \Leftrightarrow x>0.$

в) $\log_5(3x+1)>2 \Leftrightarrow \log_5(3x+1)>\log_5 25 \Leftrightarrow 3x+1>25 \Leftrightarrow x>8.$

г) $\log_{\frac{1}{7}}(4x+1)<-2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{7}}(4x+1)<\log_{\frac{1}{7}}49 \Leftrightarrow 4x+1>49 \Leftrightarrow x>12.$

518. а) $\log_a x=2\log_a 3+\log_a 5 \Leftrightarrow \log_a x=\log_a 45 \Leftrightarrow x=45$ при $a>0$ и $a\neq$.

б) $\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2$

$$\begin{cases} (x-9)(2x-1)=100, \\ x-9>0, \\ 2x-1>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-19x-91=0, \\ x>9, \\ x>0,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-3,5 - \text{не подходит;} \\ x=13; \end{array}\right. \\ x>9. \end{cases} \Leftrightarrow x=13.$$

в) $\log_a x=\log_a 10-\log_a 2 \Leftrightarrow \log_a x=\log_a 5 \Leftrightarrow x=5$ при $a>0$ и $a\neq 1.$

г) $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$

$$\begin{cases} (x+1)(x+3)=3, \\ x+1>0, \\ x+3>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+3=3, \\ x>-1, \\ x>-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+4)=0; \\ x>-1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-4 - \text{не подходит;} \\ x=0; \end{array}\right. \\ x>-1. \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

519. а) $\frac{1}{2}\log_2(x-4)+\frac{1}{2}\log_2(2x-1)=\log_2 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-4)(2x-1)=9,\\ x-4>0,\\ 2x-1>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-9x-5=0,\\ x>4;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-0{,}5 - \text{не подходит},\\ x=5;\end{array}\right.\\ x>4;\end{cases}\Leftrightarrow x=5$$

б) $\lg(3x^2+12x+19)-\lg(3x+4)=1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3x^2+12x+19}{3x+4}=10,\\ 3x^2+12x+19>0,\\ 3x+4>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+12x+19=30x+40,\\ x>-\frac{4}{3};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-18x-21=0,\\ x>-\frac{4}{3};\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=7,\\ x=-1;\end{array}\right.\\ x>-\frac{4}{3};\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7,\\ x=-1\end{array}\right.$$

в) $\lg(x^2+2x-7)-\lg(x-1)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x-7=x-1,\\ x^2+2x-7>0,\\ x-1>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-6=0,\\ \left[\begin{array}{l}x<-1-2\sqrt{2},\\ x>-1+2\sqrt{2};\end{array}\right.\\ x>1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=2;\end{array}\right.\\ x>-1+2\sqrt{2};\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

г) $\log_5(x^2+8)-\log_5(x+1)=3\log_5 2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2+8}{x+1}=8,\\ x+1>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-8x=0,\\ x>-1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=8;\end{array}\right.\\ x>-1;\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=8.\end{array}\right.$$

520.

а) $\log_4^2 x+\log_4\sqrt{x}-1{,}5=0\Leftrightarrow\log_4^2 x+0{,}5\log_4 x-1{,}5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_4 x=-1{,}5,\\ \log_4 x=1;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{8},\\ x=4.\end{array}\right.$

б) $\lg^2 x-\lg x^2+1=0\Leftrightarrow\lg^2 x-2\lg x+1=0\Leftrightarrow(\lg x-1)^2=0\Leftrightarrow\lg x=1$, $x=10$.

в) $\log_5^2 x-\log_5 x=2\Leftrightarrow\log_5^2 x-\log_5 x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_5 x=-1,\\ \log_5 x=2;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{5},\\ x=25\end{array}\right.$

г) $\log_3^2 x-2\log_3 x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=-1,\\ \log_3 x=3;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3},\\ x=27.\end{array}\right.$

521.

а) $\begin{cases}x+y=7,\\ \lg x+\lg y=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=7-x,\\ \lg x+\lg(7-x)=\lg 10;\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x, \\ x(7-x)=10, \\ x>0, \\ 7-x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x, \\ x^2-7x+10=0, \\ x>0, \\ x<7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=5; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=2, \\ y_1=5; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=5, \\ y_2=2; \end{cases} \end{array}\right.$$

б) $\begin{cases} \log_4(x+y)=2, \\ \log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4(x+y)=\log_4 16, \\ \log_3(xy)=\log_3 63, \\ x>0, \\ y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=16, \\ xy=63, \\ x>0, \\ y>0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=16-x, \\ x(16-x)=63, \\ x>0, \\ y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=16-x, \\ x^2-16x+63=0, \\ x>0, \\ y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=16-x, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=7, \\ x_2=9; \end{array}\right. \\ x>0, \\ y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=7, \\ y_1=9; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=9, \\ y_2=7. \end{cases} \end{array}\right.$$

в) $\begin{cases} x+y=34, \\ \log_2 x+\log_2 y=6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=34-x, \\ \log_2 xy=\log_2 64, \\ x>0, \\ y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=34-x, \\ \log_2(x)(34-x)=\log_2 64, \\ x>0, \\ y>0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=34-x, \\ x^2-34x+64=0, \\ x>0, \\ y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=34-x, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=32; \end{array}\right. \\ x>0, y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=2, \\ y_1=32; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=32, \\ y_2=2. \end{cases} \end{array}\right.$$

г) $\begin{cases} \log_4 x-\log_4 y=0, \\ x^2-5y^2+4=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y, \\ x^2-5y^2+4=0, \\ x>0, y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x, \\ 4-4x^2=0, \\ x>0, y>0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \text{ – не подходит}, \\ x_2=1; \end{array}\right. \\ x>0, y>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$$

522. а) $\dfrac{1}{\lg x+1}+\dfrac{6}{\lg x+5}=1 \Leftrightarrow \dfrac{\lg x+5+6\lg x+6-(\lg x+1)(\lg x+5)}{(\lg x+1)(\lg x+5)}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg^2 x-\lg x-6}{(\lg x+1)(\lg x+5)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg^2 x-\lg x-6=0, \\ \lg x\neq -1, \\ \lg x\neq -5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg x=-2, \\ \lg x=3; \end{array}\right. \\ \lg x\neq -1, \\ \lg x\neq -5. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0{,}01, \\ x_2=1000. \end{array}\right.$$

б) $\log_2 \dfrac{x}{4}=\dfrac{15}{\log_2 \dfrac{x}{8}-1} \Leftrightarrow \log_2 x-2=\dfrac{15}{\log_2 x-4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_2 x-2)(\log_2 x-4)-15}{\log_2 x-4}=0 \Leftrightarrow \frac{\log_2^2 x-6\log_2 x-7}{\log_2 x-4}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_2^2 x-6\log_2 x-7=0,\\ \log_2 x\neq 4;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_2 x=-1,\\ \log_2 x=7;\end{array}\right.\\ \log_2 x\neq 4;\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=0{,}5,\\ x_2=128.\end{array}\right.$$

в) $$\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1 \Leftrightarrow \frac{2\lg x-\lg(5x-4)}{\lg(5x-4)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lg\dfrac{x^2}{5x-4}=0,\\ \lg(5x-4)\neq 0,\\ x>0,\\ 5x-4>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2}{5x-4}=1,\\ x>0{,}8;\\ 5x-4\neq 1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-5x+4=0,\\ x>0{,}8;\\ x\neq 1;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=1 - \text{не подходит},\\ x_2=4;\end{array}\right.\\ x>0{,}8,\\ x\neq 1;\end{cases} \Leftrightarrow x=4,$$

г) $$\frac{1}{\lg x-6}+\frac{5}{\lg x+2}=1 \Leftrightarrow \frac{\lg x+2+5\lg x-30-(\lg x-6)(\lg x+2)}{(\lg x-6)(\lg x+2)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg^2 x-10\lg x+16}{(\lg x-6)(\lg x+2)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lg^2 x-10\lg x+16=0,\\ \lg x\neq 6,\\ \lg x\neq -2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\lg x=2,\\ \lg x=8;\end{array}\right.\\ \lg x\neq 6,\\ \lg x\neq -2;\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=100,\\ x_2=10^8.\end{array}\right.$$

523.

а) $\log_a x=\log_{\sqrt{a}} 2+\log_{\frac{1}{a}} 3 \Leftrightarrow \log_a x=\log_a 4-\log_a 3$,

$\log_a x=\log_a \frac{4}{3} \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$ при а > 0, а ≠ 1,

б) $$\log_x 2-\log_4 x+\frac{7}{6}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\log_4 2}{\log_4 x}-\log_4 x+\dfrac{7}{6}=0,\\ x\neq 1, x>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3-6\log_4^2 x+7\log_4 x}{6\log_4 x}=0,\\ x\neq 1, x>0;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}6\log_4^2 x-7\log_4 x-3=0,\\ x\neq 1, x>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_4 x=-\dfrac{1}{3},\\ \log_4 x=\dfrac{3}{2};\end{array}\right.\\ x\neq 1, x>0;\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}},\\ x_2=8;\end{array}\right.$$

в) $\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 6 \Leftrightarrow \log_3 x - 2\log_3 x = 6$; $\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 9$;

г) $\log_{25} x + \log_5 x = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{8} \Leftrightarrow \log_5 x + 2\log_5 x + 2\log_5 \sqrt{8}$;

$\log_5 x = \log_5 \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

524. а) $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x \Leftrightarrow 2^{3-x} = 9 - 2^x \Leftrightarrow 2^x + 8 \cdot 2^{-x} - 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1, \\ 2^x = 8; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 3; \end{array}\right.$

б) $\log_2(25^{x+3} - 1) = 2 + \log_2(5^{x+3} + 1) \Leftrightarrow \log_2(5^{2x} \cdot 5^6 - 1) = \log_2(4 \cdot 5^{x+3} + 4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 15625 \cdot 5^{2x} = 500 \cdot 5^x + 5, \\ 15625 \cdot 5^{2x} > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3125 \cdot 5^{2x} - 100 \cdot 5^x - 1 = 0, \\ 25^x > 25^{-3}; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 5^x = -0{,}008 - \text{не подходит}, \\ 5^x = 0{,}04; \end{array}\right. \\ x > -3; \end{cases} \Leftrightarrow x = -2;$

в) $\log_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) = 2x - 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \cdot 4^{x-2} - 1 = 4^{2x-4}, \\ 2 \cdot 4^{x-2} - 1 > 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{256} \cdot 4^{2x} - \frac{1}{8} \cdot 4^x + 1 = 0, \\ 2^{2(x-2)} > 2^{-1}, \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (4^x - 16)^2 = 0, \\ 2x - 4 > -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x = 4^2, \\ x > 1{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

г) $\log_2(4^x + 4) = \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow \log_2(4^x + 4) = \log_2(2 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^x + 4 = 2 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^x, \\ 2^{x+1} - 3 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0, \\ 2^x > \frac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2^x = -1 - \text{не подходит}, \\ 2^x = 4; \end{array}\right. \\ 2^x > \frac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$

525.

а) $\lg(2x - 3) > \lg(x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 > x + 1, \\ 2x - 3 > 0, \\ x + 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x > 1{,}5, \\ x > -1; \end{cases}$ Итого: $(4;\infty)$

б) $\log_{0,3}(2x - 4) > \log_{0,3}(x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 < x + 1, \\ 2x - 4 > 0, \\ x + 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5, \\ x > 2, \\ x > -1 \end{cases}$

Итого: $(2;5)$.

в) $\lg(3x-7) \le \lg(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-7>0, \\ x+1>0, \\ 3x-7 \le x+1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2\frac{1}{3}, \\ x>-1, \\ x \le 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2\frac{1}{2}, \\ x \le 4. \end{cases}$

г) $\log_{0,5}(4x-7) < \log_{0,5}(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-7>x+2, \\ 4x-7>0, \\ x+2>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x>1\frac{3}{4}, \\ x>-2; \end{cases} \Leftrightarrow x>3.$

526. а) $\log_{0,5} x > \log_2(3-2x) \Leftrightarrow \log_2\frac{1}{x} > \log_2(3-2x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}>3-2x, \\ x>0, \\ 3-2x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-3x+2x^2}{x}>0, \\ x>0, \\ x<1{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(x-0{,}5)(x-1)}{x}>0, \\ x>0, \\ x<1{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0<x<0{,}5, \\ x>1; \end{array}\right. \\ x>0, \\ x<1{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<0{,}5, \\ 1<x<1{,}5. \end{array}\right.$ Итого: $(0;0{,}5)\cup(1;1{,}5)$.

б) $\log_\pi(x+1) + \log_\pi x < \log_\pi 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_\pi x(x+1) < \log_\pi 2, \\ x+1>0, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2<0, \\ x>-1, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x<1, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1, \\ x>0. \end{cases}$ Итого: $(0;1)$.

в) $\lg x + \lg(x-1) < \lg 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x(x-1) < \lg 6, \\ x>0, \\ x-1>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6<0, \\ x>0, \\ x>1; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x<3, \\ x>1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ x>1. \end{cases}$ Итого: $(1;3)$.

г) $\log_2(x^2-x-12) < 3 \Leftrightarrow \log_2(x^2-x-12) < \log_2 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-12<8, \\ x^2-x-12>0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-20<0, \\ \left[\begin{array}{l} x<-3, \\ x>4; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>-4, \\ x<5; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<-3, \\ x>4; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4<x<-3, \\ 4<x<5. \end{array}\right.$ Итого: $(-4;-3)\cup(4;5)$.

527. а) $\log_2^2 x - \log_2 x \le 6 \Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x - 6 \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \ge -2, \\ \log_2 x \le 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{4}, \\ x \le 8. \end{cases}$ Итого: $\left[\frac{1}{4};8\right]$.

б) $\log^2_{\frac{1}{3}} x - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{3}} x > 2, \\ \log_{\frac{1}{3}} x < -2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}, \\ \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 9; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < \frac{1}{9}, \\ x > 9; \end{array}\right. \\ x > 0 \end{array}\right.$

Итого: $\left(0; \frac{1}{9}\right) \cup (9; \infty)$.

в) $\lg^2 x + 2\lg x > 3 \Leftrightarrow \lg^2 x + 2\lg x - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x > 1, \\ \lg x < -3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x > 10, \\ x < 0{,}001; \end{array}\right. \\ x > 0 \end{array}\right.$

Итого: $(0; 0{,}001) \cup (10; \infty)$.

г) $\log^2_3 x - 9 \le 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \log_3 x \le 3, \\ \log_3 x \ge -3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x \le \log_3 27, \\ \log_3 x \ge \log_3 \frac{1}{27}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \le 27, \\ x \ge \frac{1}{27}, \\ x > 0 \end{array}\right.$

Итого: $\left[\frac{1}{27}; 27\right]$.

528. а) $\log_2\left(\sin\frac{x}{2}\right) < -1 \Leftrightarrow \log_2\left(\sin\frac{x}{2}\right) < \log_2 \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2} < \frac{1}{2}, \\ \sin\frac{x}{2} > 0; \end{array}\right.$

$\frac{x}{2} \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$;

$x \in \left(4\pi n; \frac{\pi}{3} + 4\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3} + 4\pi n; 2\pi + 4\pi n\right)$,

б) $|3 - \log_2 x| < 2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3 - \log_2 x < 2, \\ 3 - \log_2 x > -2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \log_2 x > \log_2 2, \\ \log_2 x < \log_2 32; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > 2, \\ x < 32 \end{array}\right.$

Итого: (2;32).

в) $\log_{\frac{1}{2}} \cos 2x > 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \cos 2x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos 2x < \frac{1}{2}, \\ \cos 2x > 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k < 2x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{4} + \pi k < x < -\frac{\pi}{6} + \pi k, \\ \frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$

Итого: $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right), k \in Z$

1) $|3\lg x-1| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lg x-1<2, \\ 3\lg x-1>-2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x<1, \\ \lg x>-\frac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<10, \\ x>10^{-\frac{1}{3}}, \\ x>0. \end{cases}$

Итого: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{10}};10\right)$.

529.

а) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+y)=2, \\ \log_3(x-y)=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+y)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}, \\ \log_3(x-y)=\log_3 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{1}{9}, \\ x-y=9, \\ x+y>0, \\ x-y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=9\frac{1}{9}, \\ 2y=-8\frac{8}{9}, \\ x+y>0, \\ x-y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4\frac{5}{9}, \\ y=-4\frac{4}{9}, \end{cases}$

б) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=2, \\ \log_{48}x+\log_{48}y=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x^2+y^2)=\lg 100, \\ \log_{48}xy=\log_{48}48, \\ x>0, y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=100, \\ xy=48, \\ x>0, y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=6, \\ y_1=8; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=8, \\ y_2=6. \end{cases} \end{array}\right.$

в) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}y=2, \\ \log_{\frac{1}{3}}x-\log_{\frac{1}{3}}y=4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}x=3, \\ \log_{\frac{1}{3}}y=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{27}, \\ y=3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=1+\lg 13, \\ \lg(x+y)=\lg(x-y)+\lg 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x^2+y^2)=\lg 130, \\ \lg\frac{x+y}{x-y}=\lg 8, \\ x+y>0, x-y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=130, \\ x+y=8x-8y, \\ x+y>0, \\ x-y>0, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\frac{49}{81}x^2=130, \\ y=\frac{7}{9}x, \\ x+y>0, \\ x-y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=81, \\ y=\frac{7}{9}x, \\ x+y>0, \\ x-y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-9, \\ y_1=-7; \text{ — не подходит} \\ x_2=9, \\ y_2=7 \end{cases}$

530.

а) $\begin{cases} 3^y\cdot 9^x=81, \\ \lg(x+y)^2-\lg x=2\lg 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x+y}=3^4, \\ \lg\frac{(x+y)^2}{x}=\lg 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=4, \\ (x+y)^2=9x, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x, \\ (4-x)^2=9x, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x, \\ x^2-17x+16=0, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=1, \\ x_2=16; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=1, \\ y_1=2; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=16, \\ y_2=-28. \end{cases} \end{array}\right.$

б) $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = 2 - \lg 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ \lg(x^2-y^2) = \lg 20, \\ x+y>0, \\ x-y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ x^2-y^2=20, \\ x+y>0, \\ x-y>0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ x-y=4, \\ x+y>0, \\ x-y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=9, \\ 2y=1, \\ x+y>0, \\ x-y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4{,}5, \\ y=0{,}5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = \log_{\sqrt{2}} 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ y-x=4, \\ y-x>0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 2^{x+4} = 576, \\ y = 4+x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^x = 36, \\ y = 4+x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \lg x - \lg y = \lg 15 - 1, \\ 10^{\lg(3x+2y)} = 39; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg\frac{x}{y} = \lg\frac{3}{2}, \\ 3x+2y=39, \\ x>0, y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=0, \\ 3x+2y=39, \\ x>0, \\ y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x=117, \\ 13y=78, \\ x>0, \\ y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9, \\ y=6 \end{cases}$

40. Понятие об обратной функции

531. а) $f(x) = 2x + 1$; $D(f) = E(f) = R$; $y = 2x + 1$, $x = \frac{y-1}{2}$;

$g(x) = \frac{x-1}{2}$ обратная для $f(x)$; $D(g) = E(g) = R$;

б) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$; $D(f) = E(f) = R$; $y = \frac{1}{2}x - 1$, $x = 2y + 2$;

$g(x) = 2x + 2$ – обратная для $f(x)$; $D(g) = E(g) = R$;

в) $f(x) = -2x + 1$; $D(f) = E(f) = R$; $y = -2x + 1$, $x = \frac{1-y}{2}$,

$g(x) = \frac{1-x}{2}$ – обратная для $f(x)$; $D(g) = E(g) = R$;

г) $f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$; $D(f) = E(f) = R$; $y = -\frac{1}{2}x - 1$, $x = -2y - 2$;

$g(x) = -2x - 2$ – обратная для $f(x)$; $D(g) = E(g) = R$.

532. а) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $D(f) = E(f) = (-\infty;0)\cup(0;\infty)$; $y = -\frac{1}{x}$, $x = -\frac{1}{y}$,

$g(x) = -\frac{1}{x}$ – обратная для $f(x)$; $D(g) = E(g) = (-\infty;0)\cup(0;\infty)$;

б) $f(x) = 2x^2 (x \geq 0)$; $D(f) = E(f) = [0;\infty)$; $y = 2x^2$, $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$,

$g(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$ – обратная для f(x); D(g) = E(g) = [0;∞);

в) $f(x) = \frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$; D(f) = (-∞;-2)∪(-2;∞), E(f) = (-∞;1)∪(1;∞);

$y = \frac{x}{x+2}$, $x = \frac{2y}{1-y}$; $g(x) = \frac{2x}{1-x}$ – обратная для f(x);

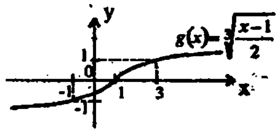
D(g) = E(f) = (-∞;1)∪(1;∞), E(g) = D(f) = (-∞;-2)∪(-2;∞);

г) $f(x) = \sqrt{x+1}$; D(f) = [-1;∞), E(f) = [0;∞); $y = \sqrt{x+1}$, $x = y^2 - 1$;

$g(x) = x^2 - 1$ – обратная для f(x); D(g)=E(f)=[0;∞), E(g)=D(f) = [-1;∞).

533.

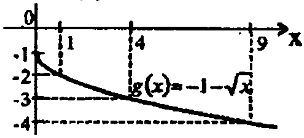
а) $f(x) = 2x^3 + 1$; $y = 2x^3 + 1$, $x = \sqrt[3]{\frac{y-1}{2}}$;



$g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$ – обратная к f(x);

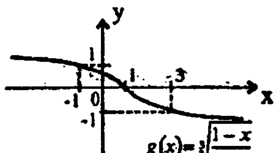
б) $f(x) = (x + 1)^2$, $x \in (-\infty;-1]$; $y = (x + 1)^2$, $x = -1 - \sqrt{y}$,

$g(x) = \ 1 - \sqrt{x}$ – обратная к f(x);



в) $f(x) = -2x^3 + 1$; $y = -2x^3 + 1$,

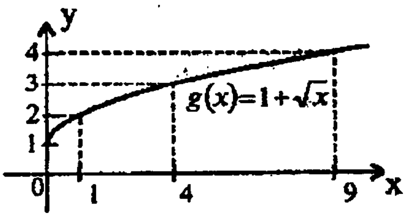
$x = \sqrt[3]{\frac{1-y}{2}}$.



$g(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x}{2}}$ – обратная к f(x);

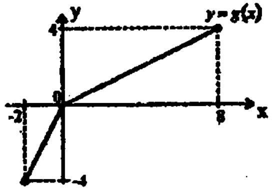
г) $f(x) = (x - 1)^2$, $x \in [1;\infty)$; $y = (x - 1)^2$, $x = 1 + \sqrt{y}$;

$g(x) = 1 + \sqrt{x}$ – обратная к f(x).

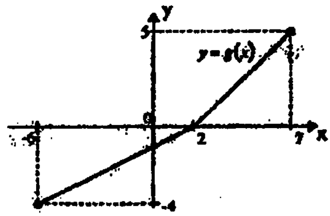


534.

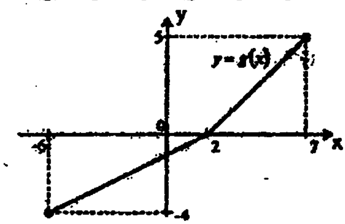
а) $g(-2) = -4$, $g(1) = 0{,}5$, $g(3) = 1{,}5$;
$D(g) = [-2;8]$, $E(g) = [-4;4]$;



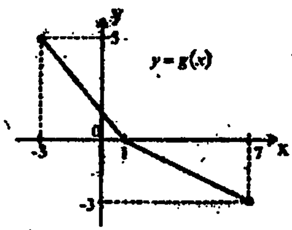
б) $g(-2) = 1$, $g(1) = -1$, $g(3) = -3$;
$D(g) = [-6;4]$, $E(g) = [-4;3]$;



) $g(-2) = -2$, $g(1) = -0{,}5$, $g(3) = 1$;
$D(g) = [-6;7]$, $E(g) = [-4;5]$;

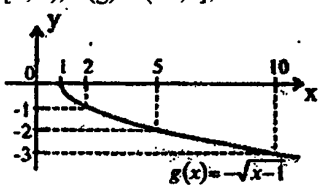


г) $g(-2) = 4$, $g(1) = 0$, $g(3) = -1$;
$D(g) = [-3;7]$, $E(g) = [-3;5]$.



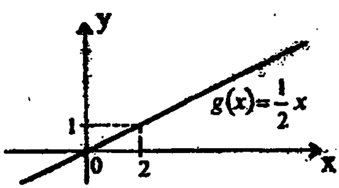
535. а) $f(x) = x^2 + 1$, $x \le 0$; т.к. $f(x)$ убывает на $(-\infty;0]$, то на $(-\infty;0]$ существует $g(x)$, обратная к $f(x)$; $y = x^2 + 1$, $x = -\sqrt{y-1}$,

$g(x) = -\sqrt{x-1}$, $D(g) = [1;\infty)$, $E(g) = (-\infty;0]$;

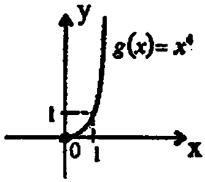


б) $f(x) = 2x$, $(-\infty;\infty)$; т.к. $f(x)$ возрастает на R, то на R существует $g(x)$, обратная к $f(x)$; $y = 2x$, $x = \frac{1}{2}y$,

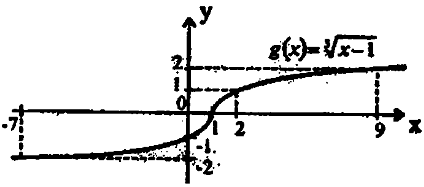
$g(x) = \frac{1}{2}x$, $D(g) = E(g) = R$;



в) $f(x)=\sqrt[4]{x}$, $x \geq 0$ т.к. $f(x)$ возрастает на $[0;\infty)$, то на $[0;+\infty)$ существует $g(x)$, обратная к $f(x)$; $y=\sqrt[4]{x}$, $x=y^4$.
$g(x)=x^4$, $D(g)=[0;\infty)$; $E(g)=[0;\infty)$;



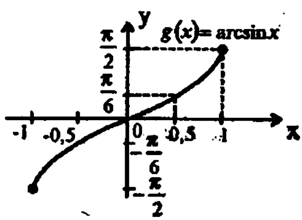
г) $f(x)=x^3+1$, $(-\infty;\infty)$: т.к. $f(x)$ возрастает на R, то на R существует $g(x)$, обратная к $f(x)$: $y=x^3+1$, $x=\sqrt[3]{y-1}$, $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$, $D(g)=E(g)=R$.



536.

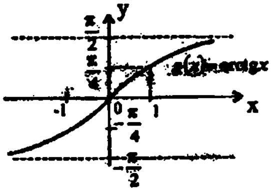
а) $f(x)=\sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; т.к. $f(x)$ возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ существует $g(x)$, обратная к $f(x)$.

$y=\sin x$, $x=\arcsin y$, $g(x)=\arcsin x$, $D(g)=[-1;1]$, $E(g)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

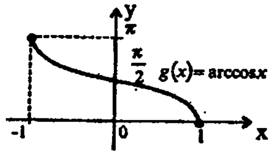


б) $f(x)=\operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; т.к. $f(x)$ возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, то на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ существует $g(x)$, обратная к $f(x)$;

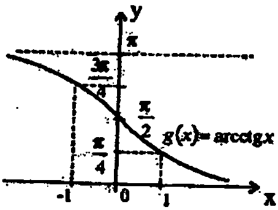
$y = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} y$; $g(x) = \operatorname{arctg} x$, $D(g) = R$, $E(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.



в) $f(x) = \cos x$; т.к. $f(x)$ убывает при $x \in [0;\pi]$, то на $[0;\pi]$ существует $g(x)$, обратная к $f(x)$;
$y = \cos x$, $x = \arccos y$; $g(x) = \arccos x$, $D(g) = [-1;1]$, $E(g) = [0;\pi]$.



г) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0;\pi)$;
т.к. $f(x)$ убывает на $(0;\pi)$, то на $(0;\pi)$ существует $g(x)$, обратная к $f(x)$;
$y = \operatorname{ctg} x$, $x = \operatorname{arcctg} y$; $g(x) = \operatorname{arcctg} x$, $D(g) = R$, $E(g) = (0;\pi)$.



§ 11. Производная показательной и логарифмической функции

41. Производная показательной и логарифмической функции

537. а) $\ln 3 \approx 1{,}0986$, $\ln 5{,}6 \approx 1{,}7228$, $\ln 1{,}7 \approx 0{,}5306$;
б) $\ln 8 \approx 2{,}0794$, $\ln 17 \approx 2{,}8332$, $\ln 1{,}3 \approx 0{,}2624$;
в) $\ln 2 \approx 0{,}6931$, $\ln 35 \approx 3{,}3551$, $\ln 1{,}4 \approx 0{,}3365$;
г) $\ln 7 \approx 1{,}9459$, $\ln 23 \approx 3{,}1355$, $\ln 1{,}5 \approx 0{,}4055$.

538.

а) $y' = (4e^x + 5)' = 4e^x$; б) $y' = (2x + 3e^{-x})' = 2 - 3e^{-x}$;

в) $y = \left(3 - \frac{1}{2}e^x\right) = -\frac{1}{2}e^x$, г) $y' = (5e^{-x} - x^2)' = -5e^{-x} - 2x$

539. а) $y = (e^x \cos x)' = e^x(\cos x - \sin x)$; б) $y' = (3e^x + 2^x)' = 3e^x + 2^x \ln 2$;

в) $y = (3^x - 3x^2)' = 3^x \ln 3 - 6x$; г) $y' = (x^2 e^x)' = xe^x(2 + x)$.

540. а) $f'(x) = (e^{-x})' = -e^{-x}$, $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$; $y = 1 - x$;

б) $f'(x) = (3^x)' = 3^x \ln 3$, $f(1) = 3$, $f'(1) = 3\ln 3$;

$y = 3 + 3\ln 3(x - 1) = 3\ln 3 \cdot x + 3(1 - \ln 3)$;

в) $f'(x) = (e^x)' = e^x$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$; $y = 1 + x$;

г) $f'(x) = (2^{-x})' = -2^{-x}\ln 2$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f'(1) = -\frac{\ln 2}{2}$;

$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2(x - 1) = -\frac{1}{2}\ln 2 \cdot x + \frac{1}{2}(1 + \ln 2)$.

541.

а) $f(x) = 5e^x$, $F(x) = 5e^x + C$; б) $f(x) = 2 \cdot 3^x$, $F(x) = 2 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$;

в) $f(x) = 4^x$, $F(x) = \frac{4^x}{\ln 4} + C$; г) $f(x) = \frac{1}{2}e^x + 1$, $F(x) = \frac{1}{2}e^x + x + C$

542. а) $\int\limits_0^1 0.5^x dx = \frac{0.5^x}{\ln 0.5}\Big|_0^1 = \frac{0{,}5}{\ln 0{,}5} - \frac{1}{\ln 0{,}5} = -\frac{0{,}5}{\ln 0{,}5} = \frac{1}{2\ln 2}$;

б) $\int\limits_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; в) $\int\limits_{-2}^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_{-2}^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{4\ln 2} = \frac{7}{4\ln 2}$,

г) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{2} 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{2} = \frac{9}{\ln 3} - \frac{1}{\sqrt{3}\ln 3} = \frac{9\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}\ln 3}$.

543.

а) $y' = \left(e^{x^2} \sin\frac{x}{2}\right)' = e^{x^2} \sin\frac{x}{2}\left(x^2\right)' + e^{x^2}\cos\frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = 2xe^{x^2}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}e^{x^2}\cos\frac{x}{2} =$

$= e^{x^2}\left(2x\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)$,

б) $y' = \left(7^{\frac{x}{2}} tg3x\right)' = 7^{\frac{x}{2}} \ln 7 \left(\frac{x}{2}\right)' tg3x + 7^{\frac{x}{2}} \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot (3x)' =$

$= \left(\frac{\ln 7}{2} 7^{\frac{x}{2}} tg3x + \frac{3}{\cos^2 3x} 7^{\frac{x}{2}}\right) = 7^{\frac{x}{2}}\left(\frac{\ln 7}{2} tg3x + \frac{3}{\cos^2 3x}\right)$;

в) $y'=\left(e^{\sqrt{x}}\cos 2x\right)'=e^{\sqrt{x}}\cos 2x\cdot\left(\sqrt{x}\right)'-e^{\sqrt{x}}\sin 2x\cdot(2x)'=$

$=\frac{e^{\sqrt{x}}\cos 2x}{2\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}\sin 2x=e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}\sin 2x\right);$

г) $y'=\left(2^{-x}ctg\frac{x}{3}\right)'=2^{-x}\ln 2ctg\frac{x}{3}\cdot(-x)'-2^{-x}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{3}}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)'=$

$=-2^{-x}\ln 2ctg\frac{x}{3}-\frac{2^{-x}}{3\sin^2\frac{x}{3}}=-2^{-x}\left(\ln 2ctg\frac{x}{3}-\frac{1}{3\sin^2\frac{x}{3}}\right).$

544. а) $y'=\left(\frac{x^6}{4^x+5}\right)'=\frac{6x^5\cdot\left(4^x+5\right)-x^6\cdot 4^x\ln 4}{\left(4^x+5\right)^2}=\frac{4^x\cdot x^5(6-x\ln 4)+30x^5}{\left(4^x+5\right)^2}$

б) $y'=\left(\frac{e^{-x}}{x^2+2}\right)'=\frac{-e^{-x}\left(x^2+2\right)-e^{-x}\cdot 2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)}{\left(x^2+2\right)^2};$

в) $y'=\left(\frac{3^x}{2^x+5^x}\right)'=\frac{3^x\ln 3\left(2^x+5^x\right)-3^x(2^x\ln 2+5^x\ln 5)}{\left(2^x+5^x\right)^2}=$

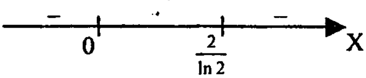
$=\frac{3^x\cdot 2^x(\ln 3-\ln 2)+3^x\cdot 5^x(\ln 3-\ln 5)}{\left(2^x+5^x\right)^2}=\frac{3^x(2^x\ln 1{,}5+5^x\ln 0{,}6)}{(2^x+5^x)^2},$

г) $y'=\left(\frac{0{,}3^{-x}}{\sqrt{x}+0{,}5}\right)'=\frac{-0{,}3^{-x}\ln 0{,}3\cdot\left(\sqrt{x}+0{,}5\right)-0{,}3^{-x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+0{,}5\right)^2}.$

545. а) $f(x)=xe^{5x}$; $D(f)=R$; $f'(x)=e^{5x}+5xe^{5x}=5e^{5x}(x+0{,}2)$;
$f'(x)=0$ при $x=-0{,}2$, $f'(x)<0$ при $x\in(-\infty;-0{,}2)$, $f'(x)>0$
при $x\in(-0{,}2;\infty)$; $f(x)$ убывает на $(-\infty;-0{,}2]$, $f(x)$ возрастает на $[-0{,}2;\infty)$,

$\min\limits_R f(x)=f(-0{,}2)=-\frac{1}{5e};$

б) $f(x)=x^2 2^{-x}$; $D(f)=R$; $f'(x)=2x\cdot 2^{-x}+x^2\ln 2\cdot(-x)'=2^{-x}\cdot x(2-x\ln 2)$,
$f'(x)=0$ при $x=0;\ \frac{2}{\ln 2}$.



f(x) убывает на $(-\infty;0]$ и на $\left[\frac{2}{\ln 2};\infty\right)$. f(x) возрастает на $\left[0;\frac{2}{\ln 2}\right]$;

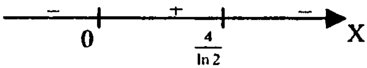
$x = 0$ – $\min f(x)$, $f(0) = 0$;

$x=\frac{2}{\ln 2}$ – $\max f(x)$, $f\left(\frac{2}{\ln 2}\right)=\frac{4}{\ln^2 2}2^{\frac{2}{\ln 2}}$.

в. $f(x) = xe^{-x}$. $D(f) = R$; $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$; $f'(x) = 0$ при $x = 1$,
f(x) возрастает на $(-\infty;1]$, f(x) убывает на $[1;\infty)$,

$x = 1 - \max\limits_{R} f(x) = f(1) = \frac{1}{e}$.

г) $f(x) = x^4\cdot 0,5^x$; $D(f) = R$; $f'(x) = 4x^3\cdot 0,5^x+x^4\cdot 0,5^x\ln 0,5=0,5^x\cdot x^3(4 - x\ln 2)$;
$f'(x) = 0$ при $x = 0$; $\frac{4}{\ln 2}$.



f(x) убывает на $(-\infty;0]$ и на $\left[\frac{4}{\ln 2};\infty\right)$, f(x) возрастает на $\left[0;\frac{4}{\ln 2}\right]$;

$x = 0$ – $\min f(x)$, $f(0) = 0$; $x=\frac{4}{\ln 2}$ – $\max f(x)$; $f\left(\frac{4}{\ln 2}\right)=\frac{256}{\ln^4 2}0,5^{\frac{4}{\ln 2}}$.

546. а) $f(x) = e^{3-2x}$, $F(x) = -\frac{1}{2}e^{3-2x}+C$;

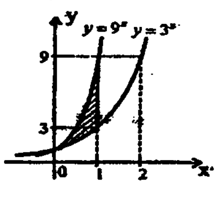
б) $f(x) = 2\cdot 0,9^x - 5,6^{-x}$, $F(x) = \frac{2\cdot 0,9^x}{\ln 0,9}+\frac{5,6^{-x}}{\ln 5,6}+C$;

в) $f(x) = 2^{-10x}$, $F(x) = -0,1\cdot\frac{2^{-10x}}{\ln 2}+C$;

г) $f(x)=e^{3x}+2,3^{1+x}=e^{3x}+2,3\cdot 2,3^x$, $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+2,3\frac{2,3^x}{\ln 2,3}+C=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{2,3^{1+x}}{\ln 2,3}+C$

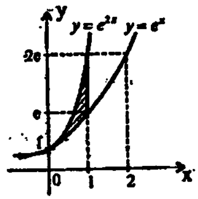
547. а) $S=\int\limits_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e-1$;

б) $S=\int\limits_0^1 9^x dx-\int\limits_0^1 3^x dx=\left(\frac{9^x}{\ln 9}-\frac{3^x}{\ln 3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{9}{\ln 9}-\frac{3}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 9}+\frac{1}{\ln 3}=\frac{8}{2\ln 3}-\frac{2}{\ln 3}=\frac{2}{\ln 3}$;



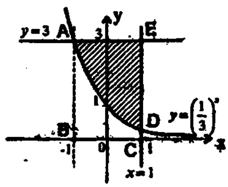
в) $S=\int\limits_{-1}^{2} 2^x\,dx=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_{-1}^{2}=\frac{4}{\ln 2}-\frac{1}{2\ln 2}=\frac{7}{2\ln 2}$;

г) $S=\int\limits_{0}^{1} e^{2x}dx-\int\limits_{0}^{1} e^{x}dx=\left(\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{2}e^{2}-e-\frac{1}{2}+1=e\left(\frac{e}{2}-1\right)+\frac{1}{2}$



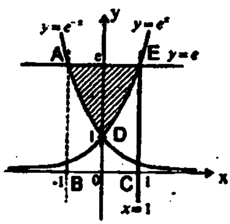
548. а) $S_{ADE}=S_{ABCE}-S_{ABCD}=2\cdot 3-\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}dx=6+\frac{3^{-x}}{\ln 3}\Big|_{-1}^{1}=6+\frac{1}{3\ln 3}-\frac{3}{\ln 3}=$

$=6-\frac{8}{3\ln 3}$,



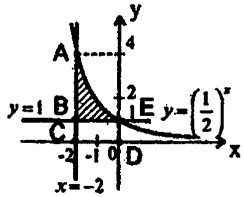
б) $S_{ADE}=S_{ABCE}-S_{ABOD}-S_{DOCK}=S_{ABCE}-2S_{DOCK}=2\cdot e-2\int\limits_{0}^{1}e^{x}dx=$

$=2e-2e^{x}\Big|_{0}^{1}=2e-2e+2=2$,



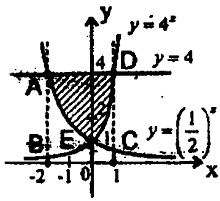
в) $S_{ABE}=S_{ACDE}-S_{BCDF}=\int\limits_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}dx-2\cdot 1=-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\Big|_{-2}^{0}-2=-\frac{1}{\ln 2}+\frac{4}{\ln 2}\cdot 2=$

$=\frac{3}{\ln 2}-2$;



г) $S_{AED} = S_{ABCD} - S_{ABOE} - S_{OCDE} = 3\cdot 4 - \int\limits_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^x dx - \int\limits_{0}^{1} 4^x dx = 12 + \frac{2^{-x}}{\ln 2}\Big|_{-2}^{0} -$

$- \frac{4^x}{\ln 4}\Big|_{0}^{1} = 12 + \frac{1}{\ln 2} - \frac{4}{\ln 2} - \frac{4}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 4} = 12 - \frac{3}{\ln 2} - \frac{3}{2\ln 2} = 12 - \frac{9}{\ln 2}.$



42. Производная логарифмической функции

549. а) $y' = ((\ln(2+3x))' = \frac{1}{2+3x}\cdot(2+3x)' = \frac{3}{2+3x}$;

б) $y' = (\log_{0,3} x + \sin x)' = \frac{1}{x\ln 0,3} + \cos x$;

в) $y' = (\ln(1+5x))' = \frac{1}{1+5x}\cdot(1+5x)' = \frac{5}{1+5x}$;

г) $y' = (\lg x - \cos x)' = \frac{1}{x\ln 10} + \sin x$.

550. а) $y' = (x^2\log_2 x)' = \frac{1}{\ln 2}\left(2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{\ln 2}(2\ln x + 1)$;

б) $y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x\cdot x'}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$;

в) $y' = (x\ln x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$; г) $y' = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{\ln x - x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

551. а) $f(x) = \frac{3}{7x+1}$, $F(x) = \frac{3}{7}\ln|7x+1| + C$, $x \neq -\frac{1}{7}$;

б) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x+5}$, $F(x)=\ln|x|-2\ln|x+5|+C$, $x\neq-5$, $x\neq0$;

в) $f(x)=\frac{1}{x+2}$, $F(x)=\ln|x+2|+C$, $x\neq-2$; г) $f(x)=\frac{4}{x}$, $F(x)=4\ln|x|+C$, $x\neq0$

552. а) $f'(x)=\frac{1}{x+1}$, $f(0)=\ln1=0$, $f'(0)=1$; $y=x$;

б) $f'(x)=(\lg x+2)'=\frac{1}{x\ln10}$, $f(1)=\lg1+2=2$, $f'(1)=\frac{1}{\ln10}$;

$y=2+\frac{1}{\ln10}(x-1)=\frac{x}{\ln10}+2-\frac{1}{\ln10}$;

в) $f'(x)=(2\ln x)'=\frac{2}{x}$, $f(e)=2\ln e=2$, $f'(e)=\frac{2}{e}$; $y=2+\frac{2}{e}(x-e)=\frac{2}{e}x$;

г) $f'(x)=(\log_2(x-1))'=\frac{1}{\ln2(x-1)}$, $f(2)=\log_2 1=0$, $f'(2)=\frac{1}{\ln2}$,

$y=\frac{1}{\ln2}(x-2)=\frac{x}{\ln2}-\frac{2}{\ln2}$.

553. а) $\int\limits_1^7\frac{2dx}{x}=2\ln|x|\Big|_1^7=2\ln7-2\ln1=2\ln7$; б) $\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{3-2x}=-\frac{1}{2}\ln|3-2x|\Big|_{-1}^1=\frac{1}{2}\ln5$,

в) $\int\limits_1^e\frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_1^e=\ln e-\ln1=1$; г) $\int\limits_0^3\frac{dx}{3x+1}=\frac{1}{3}\ln|3x+1|\Big|_0^3=\frac{1}{3}\ln10-\frac{1}{3}\ln1=\frac{1}{3}\ln10$

554.

а) $y'=\left(\frac{\ln(5+3x)}{x^2+1}\right)'=\frac{\frac{1}{5+3x}\cdot(x^2+1)\cdot3-\ln(5+3x)\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{3(x^2+1)-2x(5+3x)\ln(5+3x)}{(x^2+1)^2(5+3x)}$,

б) $y'=\left(\frac{\sqrt{x}}{\lg(1-2x)}\right)'=\left(\frac{\sqrt{x}\ln10}{\ln(1-2x)}\right)'=\frac{\frac{\ln10\cdot\ln(1-2x)}{2\sqrt{x}}+\frac{2\ln10\sqrt{x}}{1-2x}}{\ln^2(1-2x)}=$

$=\frac{\ln10((1-2x)\ln(1-2x)+4x)}{2\sqrt{x}(1-2x)\ln^2(1-2x)}$;

в) $y'=\left(\frac{x^2}{\ln5x}\right)'=\frac{2x\ln5x-x^2\cdot\frac{1}{5x}\cdot5}{\ln^2 5x}=\frac{x(2\ln5x-1)}{\ln^2 5x}$;

г) $y'=\left(\frac{\log_3 x^2}{x+1}\right)'=\left(\frac{2\ln x}{(\ln3)(x+1)}\right)'=\frac{2}{\ln3}\cdot\frac{\frac{1}{x}(x+1)-\ln x}{(x+1)^2}=\frac{2}{\ln3}\cdot\frac{x(1-\ln x)+1}{x(x+1)^2}$

555. а) f(x)= $\sqrt{x}\ln x$, D(f)=(0;∞); $f'(x)=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$, D(f')=(0;∞);

f'(x) = 0 при $x=\frac{1}{e^2}$. f(x) убывает на $\left(0;\frac{1}{e^2}\right]$, f(x) возрастает на $\left[\frac{1}{e^2};\infty\right)$,

$x=\frac{1}{e^2}$ – min f(x) и $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{2}{e}$;

б) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, D(f) = (0;∞); $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$, D(f') = (0;∞);

f'(x)=0 при x=e, f(x) возрастает на (0;e], f(x) убывает на [e;∞); x = e – точка max f(x) и $f(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$;

в) y=2x–lnx; D(f)=(0;∞); $f'(x)=2-\frac{1}{x}=\frac{2(x-0,5)}{x}$, D(f') = (-∞;0)∪(0;∞);

f'(x)=0 при x = 0,5; f(x) убывает на (0;0,5], f(x) возрастает на [0,5;∞), т. x = 0,5 – min f(x) и f(0,5) = 1 + ln2;

г) f(x) = xln x; D(f) = (0;∞); $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$; D(f') = (0;∞);

f'(x) = 0 при $x=\frac{1}{e}$, f(x) убывает на $\left(0;\frac{1}{e}\right]$, f(x) возрастает на $\left[\frac{1}{e};\infty\right)$,

$x=\frac{1}{e}$ – min f(x) и $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$

556. а) f(x) = xln²x; D(f) = (0;∞); $f'(x)=\ln^2 x+2x\ln x\cdot\frac{1}{x}=\ln x(\ln x+2)$,

f'(x) = 0 при x = 1 и $x=\frac{1}{e^2}$,

f(x) возрастает на $\left(0;\frac{1}{e^2}\right]$ и на [1;∞), f(x) убывает на $\left[\frac{1}{e^2};1\right]$;

$x=\frac{1}{e^2}$ – max f(x) и $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{4}{e^2}$, x = 1 – min f(x) и f(1) = 0;

б) $f(x)=\frac{2x}{\lg x}$. D(f) = (0;1)∪(1;∞); $f'(x)=\left(\frac{2x}{\lg x}\right)'=2\ln 10\cdot\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$,

D(f')=(0;1)∪(1;∞); f'(x) = 0 при x = e; f(x) убывает на (0,1) и на (1;e], f(x) возрастает на [e;∞), x = e – min f(x) и f(e) = 2eln10;

в) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ D(f) = (0;∞); $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2-\ln x)}{x}=\frac{2-\ln x}{2\sqrt{x^3}}$,

$D(f') = (0;\infty); f'(x) = 0$ при $x = e^2$;

$f(x)$ возрастает на $(0;e^2]$, $f(x)$ убывает на $[e^2;\infty)$, $x = e^2$–min $f(x)$ и $f(e^2) = \frac{2}{e}$,

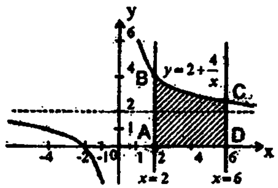
г) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, $D(f)=(0;\infty)$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$, $D(f') = (-\infty;0)\cup(0;\infty)$;

$f'(x) = 0$ при $x = 1$;

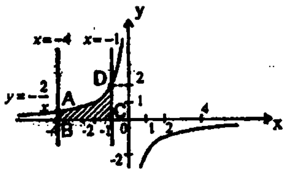
$f(x)$ убывает на $(0;1]$, $f(x)$ возрастает на $[1;\infty)$, $x=1$–min $f(x)$ и $f(1) = 1$.

557.

а) $S_{ABCD} = \int_2^6 \left(2 + \frac{4}{x}\right)dx = \left(2x + 4\ln|x|\right)\Big|_2^6 = 12 + 4\ln 6 - 4 - 4\ln 2 = 8 + 4\ln 3$;



б) $S_{ABCD} = \int_{-4}^{-1} -\frac{2}{x}dx = -2\ln|x|\Big|_{-4}^{-1} = -2(\ln 1 - \ln 4) = 4\ln 2$;

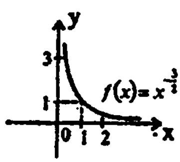


в) $S = \int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\ln|x|\Big|_{\frac{1}{4}}^{2} = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}\ln 2$;

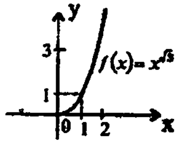
г) $S = \int_{-6}^{-3}\left(3 - \frac{1}{x}\right)dx = \left(3x - \ln(-x)\right)\Big|_{-6}^{-3} = -9 - \ln 3 + 18 + \ln 6 = 9 + \ln 2$.

43. Степенная функция

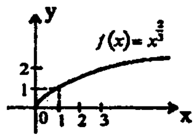
558. а) $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$; $D(f) = (0;\infty)$; $f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$;



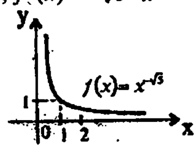
б) $f(x)=x^{\sqrt{3}}$; $D(f)=[0;\infty)$; $f'(x)=\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$;



в) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$; $D(f)=[0;\infty)$; $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$;

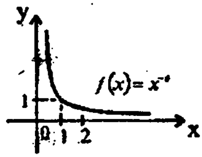


г) $f(x)=x^{-\sqrt{5}}$; $D(f)=(0;\infty)$; $f'(x)=-\sqrt{5}\cdot x^{-\sqrt{5}-1}$

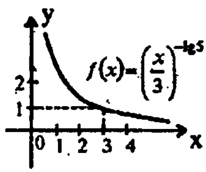


559.

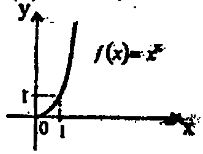
а) $f(x)=x^{-e}$; $D(f)=(0;\infty)$; $f'(x)=-ex^{-e-1}$;



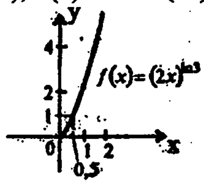
б) $f(x)=\left(\frac{x}{3}\right)^{-\lg 5}$. $D(f)=(0;\infty)$; $f'(x)=-\frac{1}{3}\lg 5\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^{-\lg 5-1}$;



в) $f(x)=x^{\pi}$; $D(f)=[0;\infty)$; $f'(x)=\pi x^{\pi-1}$;



г) $f(x)=(2x)^{\ln 3}$; $D(f)=[0;\infty)$; $f'(x)=2\cdot\ln 3\cdot(2x)^{\ln 3-1}$



560. а) $24^{\frac{1}{3}}=(27-3)^{\frac{1}{3}}=3\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}\approx 3\left(1-\frac{1}{9\cdot 3}\right)=\frac{3\cdot 26}{27}=2\frac{8}{9}\approx 2{,}89;$

б) $\sqrt[4]{625\ 3}=5\sqrt[4]{3}=5\ \sqrt[4]{1{,}3^4+0{,}14}\approx 5\cdot 1{,}3\cdot\left(1+\frac{0{,}14}{2{,}85}\cdot\frac{1}{4}\right)\approx 6{,}5\cdot 1{,}01\approx 6{,}57;$

в) $\sqrt[3]{81}=3\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{1{,}4^3+0{,}25}\approx 3\cdot 1{,}4\cdot\left(1+\frac{0{,}25}{3\cdot 1{,}4^3}\right)\approx 4{,}2\cdot 1{,}03\approx 4{,}33;$

г) $\sqrt[4]{48}=2\sqrt[4]{3}=2\ \sqrt[4]{1{,}3^4+0{,}14}\approx 2\cdot 1{,}3\left(1+\frac{0{,}14}{2{,}85\cdot 4}\right)\approx 2{,}6\cdot 1{,}01\approx 2{,}63$

561. а) $\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{27+3}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{9}\right)}\approx 3\cdot\left(1+\frac{1}{3\cdot 9}\right)\approx 3{,}11;$

б) $\sqrt[4]{90}=\sqrt[4]{81+9}=\sqrt[4]{81}\ \sqrt[4]{1+\frac{1}{9}}\approx 3\cdot\left(1+\frac{1}{4\cdot 9}\right)\approx 3{,}08;$

в) $\sqrt{9{,}02}=\sqrt{9}\ \sqrt{1+\frac{2}{900}}\approx 3\cdot\left(1+\frac{1}{900}\right)\approx 3{,}003;$

г) $\sqrt[5]{33}=\sqrt[5]{32+1}=\sqrt[5]{32}\ \sqrt[5]{1+\frac{1}{32}}\approx 2\cdot\left(1+\frac{1}{5\cdot 32}\right)\approx 2{,}01.$

562.

а) Т.к. $f(x)=x^{\frac{2}{5}}$ возрастает на R, то $\min\limits_{[1;32]} f(x)=f(1)=1, \max\limits_{[1;32]} f(x)=f(32)=4.$

б) т.к. $f(x)=x^{-\frac{4}{3}}$ убывает на R, то

$\max\limits_{\left[\frac{1}{8};27\right]} f(x)=f\left(\frac{1}{8}\right)=16,\ \min\limits_{\left[\frac{1}{8};27\right]} f(x)=f(27)=\frac{1}{81};$

в) т.к. $f(x)=x^{-4}$ убывает на R, то $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=16,\ \min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} f(x)=f(1)=1;$

г) т.к. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ возрастает на R, то

$$\min_{\left[\frac{1}{16};81\right]} f(x) = f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{8}, \quad \max_{\left[\frac{1}{16};81\right]} f(x) = f(81) = 27.$$

563. а) $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-\sqrt{2}}$, $F(x) = -\dfrac{x^{-\sqrt{2}+1}}{2\left(-\sqrt{2}+1\right)} + C = \dfrac{x^{1-\sqrt{2}}}{2(1-\sqrt{2})} + C;$

б) $f(x) = x^{2\sqrt{3}}$, $F(x) = \dfrac{x^{2\sqrt{3}+1}}{2\sqrt{3}+1} + C;$

в) $f(x) = 3x^{-1}$, $F(x) = 3\ln|x| + C$; г) $f(x) = x^{e}$, $F(x) = \dfrac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

564. а) $\int\limits_1^4 x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{2}{7}\cdot x^{\frac{7}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{7}\left(2^{2\frac{7}{2}} - 1^{\frac{7}{2}}\right) = \frac{2}{7}\cdot\left(2^7 - 1\right) = 36\frac{2}{7};$

б) $\int\limits_1^8 \dfrac{4dx}{x^{\frac{2}{3}}} = 4\cdot\dfrac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\Big|_1^8 = 12\left(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1}\right) = 12;$

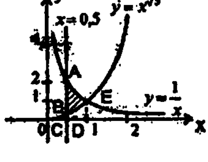
в) $\int\limits_e^{e^2} 2x^{-1}dx = 2\ln x\Big|_e^{e^2} = 2\left(\ln e^2 - \ln e\right) = 2;$

г) $\int\limits_{16}^{81} 5x^{\frac{1}{4}}dx = 5\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}\Big|_{16}^{81} = 4\left(3^{4\frac{5}{4}} - 2^{4\frac{5}{4}}\right) = 4\cdot 211 = 844.$

565. а) $S = \int\limits_0^1 x^{\sqrt{2}}dx = \dfrac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1};$

б) $S_{ABE} = S_{ACDE} - S_{BCDE} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x}dx - \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^{\sqrt{3}}dx = \left(\ln x - \dfrac{x^{\sqrt{3}+}}{\sqrt{3}+1}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} =$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{3}+1} - \ln\dfrac{1}{2} + \dfrac{2^{-\sqrt{3}-1}}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{2^{-\sqrt{3}-1} - 1}{\sqrt{3}+1} + \ln 2;$



в) $S = \int_1^{32} x^{-0,8} dx = \frac{x^{-0,8+1}}{-0,8+1}\Big|_1^{32} = 5\sqrt[5]{x}\Big|_1^{32} = 5\left(\sqrt[5]{32} - 1\right) = 5;$

г) $S = \int_3^5 \frac{1}{x} dx = \ln x\Big|_3^5 = \ln 5 - \ln 3.$

566.

2) $\sqrt{2} \approx 1.4142$, $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}4422$, $\sqrt{3} \approx 1{,}7321$, $\sqrt[4]{2{,}5} \approx 1{,}2574$, $\sqrt[3]{2{,}5} \approx 1{,}3572$, $\sqrt[4]{3} \approx 1{,}3161$, $\sqrt{2{,}5} \approx 1{,}5811$, $\sqrt[4]{2} \approx 1.1892$.

3) $\sqrt{2} = \sqrt{1{,}4^2 + 0{,}04} = \sqrt{1{,}4^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{0.04}{1{,}96}} \approx 1{,}4\left(1 + \frac{0{,}04}{2 \cdot 1{,}96}\right) \approx 1{,}4143;$

$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1.4^3 + 0.256} = \sqrt[3]{1.4^3} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{0{,}256}{2{,}744}} \approx 1{,}4\left(1 + \frac{0{,}256}{3 \cdot 2{,}744}\right) \approx 1{,}4435;$

$\sqrt{3} = \sqrt{1{,}3^4 + 0.1439} = \sqrt{1{,}3^4} \cdot \sqrt{1 + \frac{0{,}1439}{2{,}8561}} \approx 1{,}69\left(1 + \frac{0{,}1439}{2 \cdot 2{,}8561}\right) \approx 1{,}7326;$

$\sqrt[4]{2{,}5} = \sqrt[4]{1.25^4 + \frac{15}{256}} = \sqrt[4]{1{,}25^4} \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{15}{256 \cdot 2{,}4414}} \approx 1{,}25\left(1 + \frac{15}{4 \cdot 256 \cdot 2{,}4414}\right) \approx 1{,}2575;$

$\sqrt[3]{2.5} = \sqrt[3]{1{,}3^3 + 0.303} = \sqrt[3]{1{,}3^3} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{0{,}303}{2{,}197}} \approx 1{,}3\left(1 + \frac{0{,}303}{3 \cdot 2{,}197}\right) \approx 1{,}3598;$

$\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{1{,}3^4 + 0{,}1439} = \sqrt[4]{1{,}3^4} \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{0{,}1439}{2{,}8561}} \approx 1{,}3\left(1 + \frac{0{,}1439}{4 \cdot 2{,}8561}\right) \approx 1{,}3164;$

$\sqrt{2{,}5} = \sqrt{1{,}6^2 - 0{,}06} = \sqrt{1{,}6^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{0{,}06}{2{,}56}} \approx 1{,}6\left(1 - \frac{0{,}06}{2 \cdot 2{,}56}\right) \approx 1{,}5813;$

$\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{1{,}2^4 - 0{,}0736} = \sqrt[4]{1.2^4} \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{0{,}0736}{2{,}0736}} \approx 1{,}2\left(1 - \frac{0{,}0736}{2 \cdot 2{,}0736}\right) \approx 1{,}1787.$

567. а) нет; б) нет; в) нет; г) да, т.к. $x \geq 0$ и $\min\limits_{x \geq 0} f(x) = f(0) = 0$

44. Понятие о дифференциальных уравнениях

568. а) $y'(t) = -6\sin(2t + \pi)$, $y''(t) = -12\cos(2t + \pi)$;
$-12\cos(2t + \pi) = -12 \cdot \cos(2t + \pi)$;

б) $y'(t) = 2\cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$, $y''(t) = -\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$;

$-\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} \cdot 4\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$;

в) $y'(t) = -8\sin 4t$, $y''(t) = -32\cos 4t$; $-32\cos 4t + 32\cdot\cos 4t = 0$;

г) $y'(t) = \frac{1}{30}\cos(0{,}1t + 1)$, $y''(t) = -\frac{1}{300}\sin(0{,}1t + 1)$;

$-\frac{1}{300}\sin(0{,}1t + 1) + \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{3}\sin(0{,}1t + 1) = 0$.

569. $y'(x) = 15e^{3x}$, $15e^{3x} = 3\cdot 5\cdot e^{3x}$.

570. $y'(x) = -14e^{-2x}$, $-14e^{-2x} = -2\cdot 7e^{-2x}$.

571. $y'(x) = -21e^{-7x}$, $-21e^{-7x} = -7\cdot 3e^{-7x}$.

572. а) очевидно, что $y = A\sin kx$ – решение;
$y'(x) = A\cdot k\cos kx$, $y''(x) = -Ak^2\sin kx$;
$y'' + 25y = 0 \Rightarrow -Ak^2\sin kx + 25A\sin kx = 0$, $\sin kx(25 - k^2) = 0$; $k = \pm 5$;
$y(x) = A\sin 5x$, где A – const;
б) очевидно, что $y = A\sin kx$ – решение;
$\frac{1}{9}y'' + 4y = 0 \Rightarrow -\frac{A}{9}k^2\sin kx + 4A\sin kx = 0$, $\sin kx(36 - k^2) = 0, k = \pm 6$;
$y(x) = A\sin 6x$, A – const;
в) очевидно, что $y = A\sin kx$ – решение;
$4y'' + 16y = 0 \Rightarrow -4Ak^2\sin kx + 16A\sin kx = 0$, $\sin kx(4 - k^2) = 0$, $k = \pm 2$;
$y(x) = A\sin 2x$; A – const;
г) очевидно, что $y = A\sin kx$ – решение;
$y'' = -\frac{1}{4}y \Rightarrow -Ak^2\sin kx + \frac{1}{4}A\sin kx = 0, \sin kx\left(\frac{1}{4} - k^2\right) = 0$, $k = \pm\frac{1}{2}$;

$y(x) = A\sin\frac{kx}{2}$; A – const.

573. а) $x' = -4\sin(2t - 1)$, $x'' = -8\cos(2y - 1)$;
$-8\cos(2t - 1) + 4\cdot 2\cos(2t - 1) = 0$ или $x'' + 4x = 0$;

б) $x' = -0{,}64\sin\left(0.1t + \frac{\pi}{7}\right)$, $x'' = -0{,}064\cos\left(0{,}1t + \frac{\pi}{7}\right)$;

$-0{,}064\cos\left(0{,}1t + \frac{\pi}{7}\right) + 0{,}01\cdot 6{,}4\cos\left(0{,}1t + \frac{\pi}{7}\right) = 0$

или $x'' + 0{,}01x = 0$;

в) $x = 4\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$: $x' = 12\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$;

$x'' = -36\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$; $-36\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) + 9\cdot 4\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

или $x'' + 9x = 0$;
г) $x' = 0{,}213\cos(0{,}3t - 0{,}7)$, $x'' = -0{,}0639\sin(0{,}3t - 0{,}7)$;
$-0{,}0639\sin(0{,}3t - 0{,}7) + 0{,}09\cdot 0{,}071\sin(0{,}3t - 0{,}7) = 0$ или $x'' + 0{,}09x = 0$

574.

а) Пусть $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ – периодическая функция с наименьшим положительным периодом T

$x(t + T) = A_1\cos(\omega_1 t + \omega_1 T + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \omega_2 T + \varphi_2) =$

$= A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) = x(t)$.

Если это выполнено при любых t и φ, то

$\left[\begin{array}{l}\omega_1 T = 2\pi k, \\ \omega_2 T = 2\pi n, n \quad и \quad k \in Z;\end{array}\right. \Rightarrow \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{k}{r} = r$ – рациональное число при n и k ∈ Z.

575. Зависимость массы вещества от времени: $m(t) = m_0 e^{-kt}$.

По условию $n = me^{-kt}$, $\ln\dfrac{m}{n} = kt$, $k = \dfrac{1}{t}(\ln m - \ln n)$; период полураспада радия T находим из условия: $\dfrac{m}{2} = me^{-kT}$,

$$T = \frac{\ln 2}{k} \text{ или } T = \frac{\ln 2}{\frac{1}{t}(\ln m - \ln n)} = \frac{r\ln 2}{\ln m - \ln n}.$$

576. $m_1 = m_0 e^{-kt} \Rightarrow t = \dfrac{1}{k}\ln\dfrac{m_0}{m_1}$; $k = \dfrac{\ln 2}{T}$, $t = \dfrac{T}{\ln 2}\ln\dfrac{m_0}{m_1} = \dfrac{3}{\ln 2}\cdot\ln\dfrac{1}{0{,}125} = 9$ мин.

577. $m_1 = m_0 e^{-kt}$, $t = \dfrac{T}{\ln 2}\cdot\ln\dfrac{m_0}{m_1}$; при $\dfrac{m_0}{m_1} = 10$, T = 1 ч.: $t = \dfrac{1}{\ln 2}\ln 10 = 3{,}3$ ч.,

$\dfrac{m_1}{m_0} = e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$, если t = 100 лет и T = 1500 лет, то $\dfrac{m_1}{m_0} = e^{-\ln 2\frac{1000}{1500}} \approx 0{,}64$.

578.

$T' = -k(T - T_1)$, $T_1 = 0$.

Решение этого уравнения $T(t) = T_0 e^{-kt}$, где $k > 0$ – const.

Для первого тела $T^{(1)}(t) = T_0^{(1)} e^{-k_1 t}$, для второго тела $T^{(1)}(t) = T_0^{(1)} e^{-k_2 t}$,

через время t_1 температура 1 тела была $T_1^{(1)}$, температура 2 тела $T_1^{(2)}$

$$T_1^{(1)} = T_0^{(1)} e^{-k_1 t_1},\ k_1 t_1 = \ln\frac{T_0^{(1)}}{T_1^{(1)}},\ k_1 = \frac{1}{t_1}\ln\frac{T_0^{(1)}}{T_1^{(1)}}:\ T_1^{(2)} = T_0^{(2)} e^{-k_2 t_1},\ k_2 = \frac{1}{t_1}\ln\frac{T_0^{(2)}}{T_1^{(2)}};$$

момент времени t, когда температуры тел сравняются, находим из условия

$$T^{(1)}(t) = T^{(2)}(t):\ T_0^{(1)} e^{-\frac{t}{t_1}\ln\frac{T_0^{(1)}}{T_1^{(1)}}} = T_0^{(2)} e^{-\frac{t}{t_1}\ln\frac{T_0^{(2)}}{T_1^{(2)}}},\ \frac{T_0^{(1)}}{T_0^{(2)}} = e^{-\frac{t}{t_1}\left[\ln\frac{T_0^{(2)}}{T_1^{(2)}} - \ln\frac{T_0^{(1)}}{T_1^{(1)}}\right]},$$

$$\frac{\ }{t_1}\ \ln\frac{T_0^{(2)}\cdot T_1^{(1)}}{T_0^{(1)}\ T_1^{(2)}}=\ln\frac{T_0^{(2)}}{T_0^{(1)}},\quad t=t_1\frac{\ln\dfrac{T_0^{(2)}}{T_0^{(1)}}}{\ln\dfrac{T_0^{(2)}T_1^{(1)}}{T_0^{(1)}T_1^{(2)}}};$$

при $t_1 = 10$ мин, $T_0^{(1)}=200°C$, $T_0^{(2)}=100°C$, $T_1^{(2)}=80°C$, $T_1^{(1)}=100°C$.

$$t=10\cdot\frac{\ln\dfrac{1}{2}}{\ln\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{10}{8}\right)}=10\frac{\ln 2}{\ln 1{,}6}\approx 14{,}75\text{ мин.}$$

579.

См. задачу 578.

$$T^{(1)}(t)=T_0^{(1)}e^{-\frac{t}{t_1}\ln\frac{T_0^{(1)}}{T_1^{(1)}}}\text{ и } T^{(2)}(t)=T_0^{(2)}e^{-\frac{t}{t_1}\ln\frac{T_0^{(2)}}{T_1^{(2)}}}.$$

$$\Delta T=T^{(1)}(t)-T^{(2)}(t)=e^{\ln T_0^{(1)}-\frac{t}{t_1}\ln\frac{T_0^{(1)}}{T_1^{(1)}}}-e^{\ln T_0^{(2)}-\frac{t}{t_1}\ln\frac{T_0^{(2)}}{T_1^{(2)}}}$$

при $\Delta T=25°C$. $T_0^{(1)}=T_0^{(2)}=100°C$, $T_1^{(1)}=80°C$. $T_1^{(2)}=64°C$; $t_1 = 10$ мин,

$$25=100e^{-\frac{t}{10}\ln\frac{10}{8}}-100e^{-\frac{t}{10}\ln\frac{100}{64}};\quad 25=100\cdot(0{,}8)^{\frac{t}{10}}-100\cdot(0{,}64)^{\frac{t}{10}}.$$

$$(0{,}8)^{\frac{2t}{10}}-(0{,}8)^{\frac{t}{10}}+0{,}25=0,\quad \left((0{,}8)^{\frac{t}{10}}-0{,}5\right)^2=0;\quad (0{,}8)^{\frac{t}{10}}=0{,}5;$$

$$\frac{t}{10}=\log_{0,8}0{,}5;\quad t=10\log_{0,8}0{,}5=10\frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}8}\approx 31{,}08\text{ мин.}$$

580.

Т.к. $v'(t)=-kv(t)=-\frac{5}{3}v(t)$, и $v(0)=v_0$, то

$v(t)=v_0e^{-\frac{5}{3}t}$; при $v_0=30\frac{км}{ч}$, $t = 3$ мин;

$$v(3)=500\cdot e^{-\frac{5}{3}t}=500e^{-5}\approx 3{,}4\frac{м}{мин}.$$

ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ

§ 1. Действительные числа

1. Рациональные и иррациональные числа

1. а) да; б) нет; в) нет; г) да

2.

Обозначим три последовательных натуральных числа: а; а + 1; а + 2. Сумма: а+а+1+а+2=3а+3 – делится на три, поскольку каждое слагаемое делится на три. Произведение этих чисел равно а(а+1)(а +2). Одно из этих чисел делится на два, другое на три, значит, их произведение делится на шесть.

3. а) 52365; б) 52344.

4.

Число $10^{56}-1$ содержит пятьдесят пять девяток, значит, оно делится на 3, 9. На 11 не делится. Поскольку, попробовав поделить на 11 столбиком, получим

$$\begin{array}{l|l} \underbrace{99\,99\ldots\ldots\ldots9}_{55\text{ разрядов}} & 11 \\ \cline{2-2} \underline{-99} & \underbrace{909\ldots909}_{54\text{ разряда}}\dfrac{9}{11} \\ \quad 99 & \\ \quad 99 & \\ \quad 99 & \\ \quad 09\text{–остаток} & \end{array}$$

5. 35.

6.

Предположим, число $\dfrac{ab}{a+b}$ сократима на число d, d – делитель ab, значит, существует общий делитель c или у чисел a и d, или у чисел b и d. Пусть c – делитель a и d, тогда $a+b$ делится на c, следовательно, b делится на c, значит, дробь $\dfrac{a}{b}$ сократима на c_1, что противоречит условию. В случае, если c - делитель у чисел b и d, рассуждения аналогичные.

7.

а) $|a|=\begin{cases} a, \text{при } a\ge 0, \\ -a, \text{при } a<0; \end{cases}$ $|-a|=\begin{cases} -a, \text{при } a<0, \\ a, \text{при } a\ge 0; \end{cases}$ поэтому; $|a|=|-a|$;

б) $|x| = \begin{cases} x, \text{ при } x \ge 0, \\ -x, \text{ при } x < 0; \end{cases}$ для $x \ge 0$ получим

$|x| = x$, для $x < 0$ получим $x < |x|$;

в) $|x|^2 = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \ge 0, \\ (-x)^2, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ но $x^2 = (-x)^2$; значит, $|x|^2 = x^2$

8.

а) $$\frac{2{,}75\ \ 1{,}1+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4(-3\frac{1}{3})} = \frac{2{,}5+3\frac{1}{3}}{2{,}5+\frac{4}{3}} = \frac{\frac{5}{2}+\frac{10}{3}}{\frac{5}{2}+\frac{4}{3}} = \frac{\frac{5\cdot3+10\cdot2}{6}}{\frac{5\cdot3+4\cdot2}{6}} = \frac{35}{23},$$

б) $$\frac{\frac{3\frac{1}{3}}{10}+0{,}175\ \ \frac{7}{20}}{1\frac{3}{4}-1\frac{11}{17}\ \ \frac{51}{56}} = \frac{\frac{10}{3}:10+\frac{7}{40}:\frac{7}{20}}{\frac{7}{4}-\frac{28\cdot51}{17\cdot56}} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{7}{4}-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{20}{6} = 3\frac{1}{3};$$

в) $$(1{,}4-3{,}5\ \ 1\frac{1}{4}):2{,}4+3{,}4:2\frac{1}{8} = \left(\frac{7}{5}-\frac{7\cdot4}{2\cdot5}\right):\frac{12}{5}+\frac{17\cdot8}{5\cdot17} =$$

$$= \left(\frac{7}{5}-\frac{14}{5}\right)\ \frac{12}{5}+\frac{8}{5} = -\frac{7\cdot5}{5\cdot12}+\frac{8}{5} = \frac{-7\cdot5+8\cdot12}{5\cdot12} = \frac{96-35}{60} = \frac{61}{60} = 1\frac{1}{60};$$

г) $$\frac{1+\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{0{,}25}}{6-\frac{46}{1+2{,}2\ \ 10}} = \frac{1+2}{6-\frac{46}{23}} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

9.

а) $$\frac{0{,}5^2-0{,}5}{0{,}4^2+0{,}1^2+2\ \ 0{,}4\ \ 0{,}1} = \frac{0{,}5(0{,}5-1)}{(0{,}4+0{,}1)^2} = \frac{(-0{,}5)\cdot0{,}5}{0{,}5^2} = -1;$$

б) $$\frac{1{,}2^2-1{,}8^2}{1{,}2\ \ 0{,}2-1{,}2\ \ 0{,}8} = \frac{(1{,}2+1{,}8)(1{,}2-1{,}8)}{1{,}2(0{,}2-0{,}8)} = \frac{3\cdot(-0{,}6)}{1{,}2\cdot(-0{,}6)} = \frac{3\cdot5}{6} = 2{,}5;$$

в) $$\frac{0{,}6^2+0{,}1^2-2\ \ 0{,}6\cdot0{,}1}{1{,}5-1{,}5^2} = \frac{(0{,}6-0{,}1)^2}{1{,}5(1-1{,}5)} = \frac{0{,}5^2}{1{,}5\cdot(-0{,}5)} = -\frac{0{,}5}{1{,}5} = -\frac{1}{3};$$

г) $$\left(1\frac{3}{5}\right)^2 - \ 4\frac{5}{8}-2{,}4\Big)\frac{5}{8} = \left(\frac{8}{5}\right)^2 - \left(4\frac{5}{8}-2\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{8}{5} = \frac{8}{5}\left(\frac{8}{5}-4\frac{5}{8}+\frac{12}{5}\right) =$$

$$= \frac{8}{5}\left(4-4\frac{5}{8}\right) = \frac{8}{5}\ \left(-\frac{5}{8}\right) = -1.$$

10.

а) $3{,}82 \pm 0{,}1$ – верные цифры – 3 и 8;

б) $1{,}980 \cdot 10^4 \pm 0{,}001 \cdot 10^4$ – верные цифры 1 и 9;

в) $7{,}891 \pm 0{,}1$ – верные цифры – 7, 9 и 1;

г) $2{,}8 \cdot 10^4 \pm 0{,}3 \cdot 10^4$ – верных цифр нет.

11.

а) $1{,}002^5 = (1 + 0{,}002)^5 \approx 1 + 5 \cdot 0{,}002 = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$;

б) $0{,}997^4 = (1 - 0{,}003)^4 \approx 1 - 4 \cdot 0{,}003 = 1 - 0{,}012 = 0{,}988$;

в) $2{,}004^3 = 8(1 + 0{,}002)^3 \approx 8(1 + 0{,}006) = 8{,}048$;

г) $3{,}01^5 = 3^5\left(1+\frac{0{,}01}{3}\right)^5 = 243 \cdot \left(1+\frac{1}{300}\right)^5 \approx 243 \cdot \left(1+\frac{1}{60}\right) = 247{,}05$.

12. а) 15,3; б) 30,7; в) 43,7; г) 3,0.

13.

а) $2,(3) = 2\frac{1}{3}$; б) $0,(66) = \frac{2}{3}$; в) $1{,}0(8) = 1\frac{8}{90}$; г) $1,(33) = 1\frac{1}{3}$.

14.

а) Пусть $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$, $p \in Z$, $q \in N$, $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь;

$\frac{p}{q} > 0$, поэтому p и q натуральные числа. Тогда $5 = \frac{p^2}{q^2}$, то есть $p^2 = 5q^2$, откуда следует, что p^2. Таким образом, и p делится на 5, или $p = 5k$. Подставляя $p = 5k$ в равенство $p^2 = 5q^2$, получим $25k^2 = 5q^2$, $q^2 = 5k^2$

Получим, что и q делится на 5. Это противоречит тому, что $\frac{p}{q}$ – несократима, значит предположение неверно и $\sqrt{5}$ иррационально.

б) $2\sqrt{7}$ рациональное, если $\sqrt{7}$ – число рациональное. Пусть $\sqrt{7} = \frac{m}{n}$, $m \in Z$, $n \in N$, $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь; $\frac{m}{n} > 0$, поэтому можно считать, что m и n – натуральные числа. Тогда $7 = \frac{m^2}{n^2}$, то есть $m^2 = 7n^2$, значит, что m^2, следовательно, и m делятся на 7, то есть $m = 7k$. Подставляя $m = 7k$ в равенство $m^2 = 7n^2$, получаем $49k^2 = 7n^2$, $n^2 = 7k^2$

Отсюда видно, что и n делится на 7. Дробь $\frac{m}{n}$ сократима на 7.

Предположение неверно, $2\sqrt{7}$ – иррационально.

в) Пусть $\sqrt{5}+1=r$ (где r – рационально), тогда $\sqrt{5}=r-1$ рационально, это противоречит иррациональности $\sqrt{5}$.

г) $\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{7}$ не рационально, т.к. $\sqrt{7}$ иррационально.

15. а) то $a+b$ и $a\cdot b$ числа рациональные.
б) то $a+b$ также число иррациональное (кроме случая $a=-b$), а $a\cdot b$ может быть как рациональным, так и иррациональным. (Например: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{14}$ – иррациональное, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ – рациональное).
в) $a+b$ – иррациональное число, $a\cdot b$ – иррациональное число.

16. а) $\sqrt{2}+\frac{5}{9}\approx 1{,}42+0{,}55=1{,}97$; б) $\sqrt{5}-\frac{2}{7}\approx 2{,}24-0{,}29=1{,}95$;

в) $\sqrt{3}+\frac{5}{9}\approx 1{,}72+0{,}83=2{,}55$; г) $\sqrt{6}-\frac{1}{11}\approx 2{,}45-0{,}09=2{,}36$.

17. а) -2 – рациональное, $-1{,}7$ – рациональное, $\frac{\pi}{3}$ – иррациональное, $\sqrt{3}$ – иррациональное;

б) $-\sqrt{5}$ – иррациональное, -1 – рациональное, $\frac{5}{6}$ – рациональное, $\log_2 3$ – иррациональное;

в) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ – иррациональное, $0{,}(2)$ – рациональное, $\frac{7}{6}$ – рациональное;

г) $-1{,}(6)$ – рациональное, $\lg 100$ – рациональное, e – иррациональное, $\sqrt{10}$ – иррациональное.

18. а) $4<7$ и $\lg\frac{1}{2}<0$, поэтому $\frac{4}{\lg\frac{1}{10}}>\frac{7}{\lg\frac{1}{2}}$; $\sqrt{5}+2>0$, $\sqrt{17}>0$;

б) $(\sqrt{5}+2)^2=5+4\sqrt{5}+4=9+4\sqrt{5}>17$, $(\sqrt{17})^2=17$, значит, $\sqrt{5}+2>\sqrt{17}$;

в) $\log_3 7>1$, $\log_7 3=\frac{1}{\log_3 7}<1$, значит, $\log_3 7>\frac{1}{\log_7 3}$; $\log_3 7>\log_7 3$;

г) $(\sqrt{7}+3)^2 = 7 + 6\sqrt{7} + 9 = 16 + 6\sqrt{7} > 31$. $(\sqrt{31})^2 = 31$, значит, $\sqrt{7}+3 > 31$. $\sqrt{7}+3 > 31$.

19.

а) $15^{\log_3 10} = \left(15^{\log_{15} 10}\right)^{\frac{1}{\log_{15} 3}} = 10^{\log_3 15}$, значит, $15^{\log_3 10} = 10^{\log_3 5}$;

б) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6} < 10$,

$(\sqrt{30} - \sqrt{3})^2 = 30 - 2\sqrt{90} + 3 = 33 - 2\sqrt{90} > 13$, значит,

$(\sqrt{2} + \sqrt{3}) < (\sqrt{30} - \sqrt{3})$;

в) $7{,}98 - 2\pi \approx 7{,}98 - 6{,}28 \approx 1{,}70$; $\frac{\pi}{2} < 2{,}1 < \pi$, $\frac{\pi}{2} < 1{,}7 < \pi$; поскольку на $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ $\sin x$ – убывающая функция, то $\sin 2{,}1 < \sin 7{,}98$;

г) $(\sqrt{8} + \sqrt{5})^2 = 8 + 2\sqrt{40} + 5 = 13 + 4\sqrt{10}$, $(\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 =$
$= 3 + 2\sqrt{30} + 10 = 13 + 2\sqrt{30}$, значит, $\sqrt{8} + \sqrt{5} > \sqrt{3} + \sqrt{10}$.

20.

а) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{6} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{3-2} - 2\sqrt{6} = 3 + 2\sqrt{6} + 2 - 2\sqrt{6} = 5$;

б) $(\sqrt{2}+1)^2 + (1-\sqrt{2})^2 - (\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1) = 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 7 + 1 = 0$;

в) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \sqrt{35} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{2} - \sqrt{35} = 6 + \sqrt{35} - \sqrt{35} = 6$;

г) $(3\sqrt{18} + 2\sqrt{8} + 4\sqrt{50}) : \sqrt{2} = (9\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 20\sqrt{2}) : \sqrt{2} = 9 + 4 + 20 = 33$.

2. Проценты. Пропорция

21.

а) 320–100%, x–2,5%; $x = \frac{320 \cdot 2{,}5}{100} = 8$;

б) 2,5%–75, 100%–x; $x = \frac{100 \cdot 75}{2{,}5} = 3000$;

в) 84–100%, 2,8–x; $x = \frac{2{,}8 \cdot 100}{84} = 3\frac{1}{3}$%;

г) 35–100%, x–140%; $x = \frac{35 \cdot 140}{100} = 49$.

22.

За 1987 год выпуск продукции составил 104%, за следующий год прирост продукции составил 8% от выпущенного за 1 год. За два года прирост составил 8,32%+4%=12,32%, значит, средний ежегодный прирост продукции в течение двух лет составил 2,32%:2 = 6,16%.

23.

Пусть I число–$5x$, II число–$3x$, III число–$20x$ и IV число–$20x \cdot 0,15=3x$ По условию $5x + 20x + 3x - 3x = 375$, $x = 15$; I число–75; II число–45; II число–300, IV число–45.

24.

Пусть условная цена на овощи в начале осенне-зимнего периода составила 1, тогда в конце этого периода она составила 1,25 условных единиц.

1,25–100%, 1–x%; $x = \frac{1 \cdot 100}{1,25} = 80\%$. Поэтому, цену весной нужно снизить на 20%.

25. а) $12 : \frac{1}{8} = x : \frac{5}{6}$, $\frac{1}{8}x = \frac{12 \cdot 5}{6}$, $\frac{1}{8}x = \frac{5}{3}$, $x = \frac{40}{3}$;

б) $x \ .(-0,3) = 0,15 : 1,5$, $x : (-0,3) = 0,1$, $x = (-0,3) \cdot 0,1$, $x = -0,03$;

в) $\frac{0,13}{x} = \frac{26}{3\frac{1}{3}}$, $26x = \frac{13 \cdot 10}{100 \cdot 3}$, $x = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 10} = \frac{1}{60}$;

г) $\frac{x}{2,5} = \frac{-6,2}{15}$, $x = \frac{2,5(-6,2)}{15} = -\frac{2,5 \cdot 6,2}{15}$, $x = -\frac{31}{30} = -1\frac{1}{30}$.

26. а) $\frac{x-2}{2,5} = \frac{6}{x}$, $x(x-2) = 15$, $x^2 - 2x - 15 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = -3$; $(-3; 5)$;

б) $\frac{x}{x+5} = \frac{4,8}{1,2}$, $x = 4x + 20$, $-3x = 20$, $x = -6\frac{2}{3}$;

в) $\frac{x-3}{x-2} = \frac{6,5}{1,5}$, $(x-3)3 = (x-2)13$, $10x = 17$, $x = 1,7$;

г) $\frac{4-x}{1,2} = \frac{5}{x+3}$, $(4-x)(x+3) = 6$, $-x^2 + x + 12 = 6$,

$x^2 - x - 6 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$; $(-2; 3)$.

27.

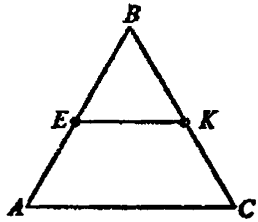
а) $\Delta ABC \infty \Delta EBK$ – по двум углам,

$\frac{AB}{EB}=\frac{BC}{BK}$, $EB = 22{,}5 - 18 = 4{,}5$,

$\frac{22{,}5}{4{,}5}=\frac{15}{BK}$, $BK = \frac{4{,}5\cdot 15}{22{,}5}=3$,

$KC = 15 - 3 = 12$;

б) $k = \frac{AB}{BE}=\frac{7{,}5}{7{,}5-5}=\frac{7{,}5}{2{,}5}=3$,



$k^2 = \frac{S_{ABC}}{S_{BEK}}=9$, $\frac{72}{S_{\Delta BEK}}=9$, $S_{\Delta BEK}=8$, $S_{\Delta AEKC}=72-8=64$.

3. Прогрессии

28. $S_{20}=\frac{a_1+a_{20}}{2}\cdot 20$, $a_7 = a_1+6d$, $20 = 2 + 6d$, $d = 3$,

$a_{20}=a_1+19d = 2+57=59$, $S_{20}=\frac{2+59}{2}\cdot 20$, $S_{20}=61\cdot 10 = 610$.

29. $a_1 = 4$, $a_6 = 40$, $a_6 = a_1 + 5d$, $40 - 4 = 5d$, $d = 7{,}2$;
$a_2 = 11{,}2$, $a_3 = 18{,}4$, $a_4 = 25{,}6$, $a_5 = 32{,}8$.

30. $\frac{1}{\log_3 2}=\log_2 3$, $\frac{1}{\log_6 2}=\log_2 6=\log_2 3+\log_2 2=\log_2 3+1$,

$\frac{1}{\log_{12} 2}=\log_2 12=\log_2 3+\log_2 4=\log_2 3+2$. Значит, числа $\log_2 3$, $\log_2 3+1$; $\log_2 3+2$ образуют арифметическую прогрессию.

31. $\begin{cases} a_1+a_5=26, \\ a_2\cdot a_4=160;\end{cases}$ $\begin{cases} a_1+a_1+4d=26, \\ (a_1+d)(a_1+3d)=160;\end{cases}$ $\begin{cases} a_1=13-2d, \\ a_1^2+4a_1d+3d^2=160;\end{cases}$

$\begin{cases} a_1=13-2d, \\ (13-2d)^2+4\cdot(13-2d)\cdot d+3d^2=160;\end{cases}$

$169-52d+4d^2+52d-8d^2+3d^2-160=0$, $-d^2+9=0$, $d_1=3$, $d_2=-3$
$a_1=7$, $a_1=19$. $a_6=7+15=22$ или $a_6=19-15=4$.

$S_6=\frac{7+22}{2}\cdot 6=29\cdot 3=87$ или $S_6=\frac{19+4}{2}\cdot 6=23\cdot 3=69$.

32. Пусть $a=b_1$, тогда $b=b_1\cdot q$, $c=b_1\cdot q^2$, $d=b_1\cdot q^3$.
$(b_1-b_1q^2)^2+(b_1q-b_1q^2)^2+(b_1q-b_1q^3)^2-(b_1-b_1q^3)^2=b_1^2-2b_1^2q^2+$
$+b_1^2q^4+b_1^2q^2-2b_1^2q^3+b_1^2q^4+b_1^2q^2-2b_1^2q^4+b_1^2q^6-b_1^2+2b_1^2q^3-b_1^2q^6=0$

33. $\frac{1}{2-\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$.

Произведение второго числа на $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$: $\frac{1}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

Получили третье число. Значит эти числа образуют геометрическую прогрессию.

34. $\begin{cases} b_4-b_2=24, \\ b_2+b_3=6; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1\ q^3-b_1\ q=24, \\ b_1\ q+b_1\ q^2=6; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1q(q^2-1)=24. \\ b_1q(1+q)=6; \end{cases}$

$6(q-1)=24$, $q-1=4$, $q=5$, $5b_1=\frac{6}{1+5}$, $5b_1=1$, $b_1=\frac{1}{5}$.

35. $b_1=3$, $b_2=12$, $b_n=3072$; $q=\frac{b_2}{b_1}=4$, $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$,

$3072=3\cdot 4^{n-1}$, $4^{n-1}=1024$; $n-1=5$, $n=6$.

36. $b_4=\frac{1}{54}$, $q=\frac{1}{3}$, $b_4=b_1\cdot q^3$, $b_1=b_4:q^3=\frac{1}{54}:\frac{1}{27}=\frac{1}{2}$,

$S_n=\frac{b_1\cdot(1-q^n)}{1-q}$, $\frac{121}{162}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}$, $\frac{121}{162}=\frac{3}{4}\left(3-\frac{1}{3^n}\right)$, $1-\frac{1}{3^n}=\frac{121\cdot 4}{162\cdot 3}$,

$-\frac{1}{3^n}=\frac{121\cdot 4}{162\cdot 3}-1$, $\frac{1}{3^n}=\frac{1}{243}$, $n=5$.

37. Пусть искомые числа b_1, b_2, b_3, b_4. По условию имеем

$\begin{cases} b_2+b_3=12, \\ b_1+b_4=14, \end{cases}$ и $b_4=b_3+(b_3-b_2)$.

$\begin{cases} b_1\ q+b_1\cdot q^2=12, \\ b_1+b_3+(b_3-b_2)=14; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1\cdot q(1+q)=12, \\ b_1+2b_3-b_2=14; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1\cdot q(1+q)=12, \\ b_1(1+2q^2-q=14; \end{cases}$

$b_1=\frac{14}{1+2q^2-q}=\frac{12}{q(1+q)}$, $14q+14q^2=12+24q^2-12q$,

$10q^2-26q+12=0$, $5q^2-13q+6=0$,

$q_1=2$, $q_2=0{,}6$, $b_1=2$ или $b_1=12{,}5$, или $b_2=4$, $b_2=7{,}5$, $b_3=8$, или $b_3=4{,}5$, $b_4=12$, или $b_4=1{,}5$.

Ответ: 2; 4; 8; 12 или 12,5; 7,5; 4,5; 1,5.

38. $q = \frac{2}{\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}} = \frac{2}{3+\sqrt{3}} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$S = \frac{b_1}{1-q}$, $\frac{\sqrt{3}}{1-1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3$. Ответ: $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3.

39. $\begin{cases} \frac{b_1 \cdot (1-q^3)}{1-q} = 10{,}5. \\ \frac{b_1}{1-q} = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 \cdot (1+q+q^2) = 10{,}5, \\ b_1 = 12(1-q); \end{cases}$ $12(1-q)(1+q+q^2) = 10{,}5$,

$12(1-q^3) = 10{,}5$, $1-q^3 = 10{,}5 : 12$, $q^3 = \frac{1}{8}$,

$q = \frac{1}{2}$; $b_1 = 12 \cdot (1-\frac{1}{2}) = 6$. Ответ: $b_1 = 6$; $q = \frac{1}{2}$.

40.
Если $b>0$, $b \neq -1$ и a^n, a^{n+k}, a^{n+2k} – геометрическая прогрессия, то $\log_b a^n$, $\log_b a^{n+k} = \log_b a^n + \log_b a^{2k}$, $\log_b a^{n+2k} = \log_b a^n + \log_b a^k = \log_b a^n + 2\log_b a^k$; значит, $\log_b a^n$; $\log_b a^n + \log_b a^k$; $\log_b a^n + 2\log_b a^k$ – арифметическая прогрессия.

§ 2. Тождественные преобразования

4. Преобразования алгебраических выражений

41. а) $a^2+b^2+2a-2b-2ab = a^2 2ab + b^2 + 2(a-b) = (a-b)^2 + 2(a-b) =$
$= (a-b)(a-b+2)$;

б) $x^3+(y-1)x+y = x^3+xy-x+y = x(x^2-1)+y(x+1) =$
$= (x+1)(x^2-x+y)$;

в) $a^6-8 = (a^2)^3-2^3 = (a^2-2)(a^4+2a^2+4) = (a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})(a^4+2a^2+4)$;

г) $x^4-x^2(y^2+1)+y^2 = x^4-x^2y^2-x^2+y^2 = x^2(x^2-1)-y^2(x^2-1) =$
$= (x^2-1)(x^2-y^2) = (x+1)(x-1)(x+y)(x-y)$.

42. а) $n^4+2n^3-n^2-2n = n^2(n^2-1)+2n(n^2-1) = (n^2-1)(n^2+2n) =$
$= (n^2-1)\cdot n \cdot (n+2) = (n-1)\cdot n(n+1)(n+2)$
произведение четырех последовательных натуральных чисел делится на 2, 3, 4, а значит, делится и на 24 при $n = 2, 3, \ldots$;

б) $(n^2+4n+3)(n^2+6n+8) = (n+3)(n+1)(n+2)(n+4) =$
$= (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

это произведение четырех последовательных натуральных чисел, которое делится на 2, 3, 4, а значит, делится и на 24;

в) $n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$ – произведение трех последовательных натуральных чисел, которое делится на 2 и на 3, а значит, делится и на 6 при $n=2, 3, \ldots$;

г) $n^3-4n=n(n^2-4)=n(n-2)(n+2)=(n-2)n\cdot(n+2)$. Так как $n=2k$, $k\in N$, то $(n-2)n(n+2)=(2k-2)2n(2k+2)=2(k-1)2n\cdot 2(k+1)=$
$=8(k-1)k(k+1)$ – это произведение делится на 8, на 3, на 2, а значит, делится на 48.

43. а) $\dfrac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}=\dfrac{a^2(a+1)-(a+1)}{(a+1)^2}=\dfrac{(a+1)(a^2-1)}{(a+1)^2}=a-1$;

б) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2+8x+16}=\dfrac{(x-3)(x-4)}{(x+4)^2}=\dfrac{x-3}{x+4}$;

в) $\dfrac{2a^2-5a+2}{ab-2b-3a+6}=\dfrac{(a-2)(2a-1)}{a(b-3)-2(b-3)}=\dfrac{(a-2)(2a-1)}{(a-2)(b-3)}=\dfrac{2a-1}{b-3}$,

г) $\dfrac{x^3-27}{x^2y+3xy+9y}=\dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{y(x^2+3x+9)}=\dfrac{x-3}{y}$.

44. а) $\left(m+n-\dfrac{4mn}{m+n}\right):\left(\dfrac{m}{m+n}-\dfrac{n}{n-m}-\dfrac{2mn}{m^2-n^2}\right)=\dfrac{(m+n)^2-4mn}{m+n}$

$\dfrac{nm-m^2-mn-n^2-2mn}{m^2-n^2}=\dfrac{(m-n)^2}{m+n}:\dfrac{-(m+n)^2}{m^2-n^2}=$

$=-\dfrac{(m-n)^2(m^2-n^2)}{(m+n)(m+n)^2}=-\dfrac{(m-n)^3}{(m+n)^2}$;

б) $\dfrac{a^3+b^3}{a+b}:(a^2-b^2)+\dfrac{2b}{a+b}-\dfrac{ab}{a^2-b^2}=\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2-b^2}+\dfrac{2b(a-b)}{a^2-b^2}-$

$-\dfrac{ab}{a^2-b^2}=\dfrac{a^2-ab+b^2+2ab-2b^2-ab}{a^2-b^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2-b^2}=1$;

в) $\left(\dfrac{x}{x^2-4}-\dfrac{8}{x^2+2x}\right)\cdot\dfrac{x^2-2x}{4-x}+\dfrac{x+8}{x+2}=\dfrac{(x^2-8x+16)}{x(x^2-4)}\cdot\dfrac{x(x-2)}{4-x}+\dfrac{x+8}{x+2}=$

$=\dfrac{(x-4)^2(x-2)}{(x^2-4)(4-x)}+\dfrac{x+8}{x+2}=\dfrac{4-x}{x+2}+\dfrac{x+8}{x+2}=\dfrac{12}{x+2}$;

г) $\left(\frac{1}{c^2+3c+2}+\frac{2c}{c^2+4c+3}+\frac{1}{c^2+5c+6}\right)^2\cdot\frac{(c-3)^2+12c}{2}=$

$=\left(\frac{1}{(c+1)(c+2)}+\frac{2c}{(c+1)(c+3)}+\frac{1}{(c+2)(c+3)}\right)^2\cdot\frac{c^2-6c+9+12c}{2}=$

$=\left(\frac{c+3+2c(c+2)+c+1}{(c+1)(c+2)(c+3)}\right)^2\cdot\frac{(c+3)^2}{2}=$

$=\left(\frac{2(c+1)(c+2)}{(c+1)(c+2)(c+3)}\right)^2\cdot\frac{(c+3)^2}{2}=\frac{4\cdot(c+3)^2}{(c+3)^2\cdot 2}=2.$

45. а) $\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{4y^2}{4x^2-y^2}=\left(\frac{6x+3y-4x+2y}{4x^2-y^2}-\frac{1}{2x-5y}\right):$

$\frac{4y^2}{4x^2-y^2}=\left(\frac{2x+5y}{4x^2-y^2}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{4y^2}{4x^2-y^2}=\frac{4x^2-25y^2-4x^2+y^2}{(4x^2-y^2)(2x-5y)}$

$\frac{4y^2}{4x^2-y^2}=\frac{-24y^2(4x^2-y^2)}{(4x^2-y^2)(2x-5y)4y^2}=\frac{-6}{2x-5y}=\frac{6}{5y-2x};$

б) $\left(\frac{3}{a-3}+\frac{4}{a^2-5a+6}+\frac{2a}{a-2}\right):\left(\frac{3}{2a+1}\right)^{-1}-\frac{a-12}{3(3-a)}=$

$=\frac{3a-6+4+2a^2-6a}{(a-2)(a-3)}:\frac{2a+1}{3}-\frac{a-12}{3(3-a)}=\frac{2a^2-3a-2}{(a-2)(a-3)}:\frac{2a+1}{3}-\frac{a-12}{3(3-a)}=$

$=\frac{(a-2)(2a+1)3}{(a-2)(a-3)(2a+1)}-\frac{a-12}{3(3-a)}=\frac{3}{a-3}+\frac{a-12}{3(a-3)}=\frac{9+a-12}{3(a-3)}=\frac{a-3}{3(a-3)}=\frac{1}{3};$

в) $\left(\frac{x^3-8}{x-2}+2x\right)\cdot(4-x^2)^{-1}-\frac{x-1}{2-x}=(x^2+2x+4+2x)\cdot\frac{1}{4-x^2}-\frac{x-1}{2-x}=$

$=\frac{(x+2)^2}{4-x^2}-\frac{x-1}{2-x}=\frac{x+2}{2-x}-\frac{x-1}{2-x}=\frac{3}{2-x};$

г) $\frac{k^2}{3+k}\cdot\frac{9-k^2}{k^2-3k}+\frac{27+k^3}{3-k}:\left(3+\frac{k^2}{3-k}\right)=\frac{k^2}{3}\cdot\frac{(3-k)}{k(k-3)}+\frac{27+k^3}{3-k}$

$\cdot\left(\frac{9-3k+k^2}{3-k}\right)=-k+\frac{(27+k^3)(3-k)}{k^2-3k+9}=-k+3+k=3.$

5. Преобразование выражений, содержащих радикалы и степени с дробными показателями

46. а) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$;

б) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$;

в) $\dfrac{2}{\sqrt{15}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$; г) $\dfrac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\dfrac{3(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{7-2}=\dfrac{3(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{5}$

47. а) $\sqrt{(\sqrt{5}-2{,}5)^2}-\sqrt[3]{(1{,}5-\sqrt{5})^3}-1=|\sqrt{5}-2{,}5|-(1{,}5-\sqrt{5})=2{,}5-\sqrt{5}-1.5+\sqrt{5}=1$;

б) $\dfrac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24}}{(\sqrt{75}-5\sqrt{2})}=\dfrac{(5\sqrt{3}+5\sqrt{2})^2(5-2\sqrt{6})}{75-50}=$

$=\dfrac{(5\sqrt{3}+5\sqrt{2})^2(5-2\sqrt{6})}{25}=(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})=25-24=1,$

в) $(\sqrt{(\sqrt{2}-1{,}5)^2}-\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3})^2+0{,}75=(1{,}5-\sqrt{2}-1+\sqrt{2})^2+0{,}75=0.5^2+0.75=1$;

г) $\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{20}}{2\sqrt{5}+\sqrt{24}}\cdot(11+2\sqrt{30})=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2}{6-5}\cdot(11+2\sqrt{30})=$

$=(6-2\sqrt{30}+5)(11+2\sqrt{30})=121-120=1.$

48.

а) $\left(\dfrac{a+2}{\sqrt{2a}}-\dfrac{a}{\sqrt{2a}+2}+\dfrac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}=\left(\dfrac{a+2}{\sqrt{2a}}-\dfrac{a}{\sqrt{2}(\sqrt{a}+\sqrt{2})}+\dfrac{2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{2})}\right)\times$

$\times\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}=\dfrac{(a+2)(a-2)-a(\sqrt{a}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{a}+2\cdot\sqrt{2}(\sqrt{a}+\sqrt{2})}{\sqrt{2a}(a-2)}\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}=$

$=\dfrac{a^2-4-a^2+a\sqrt{2a}+2\sqrt{2a}+4}{\sqrt{2a}(a-2)}\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}=\dfrac{a\sqrt{2a}+2\sqrt{2a}}{\sqrt{2a}(a-2)}\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}=$

$=\dfrac{a+2}{a-2}\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a-2}$;

б) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2=(a-\sqrt{ab}+b-\sqrt{ab})\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2=$

$=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(a-b)^2}=\dfrac{(a-b)^2}{(a-b)^2}=1$;

в) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x}\cdot\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}{1+\sqrt{x}+x}=\sqrt{x}(x-1)$;

г) $\left(\dfrac{\sqrt{c}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{c}}\right)^2\left(\dfrac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}-\dfrac{\sqrt{c}+1}{\sqrt{c}-1}\right)=\left(\dfrac{c-1}{2\sqrt{c}}\right)^2\left(\dfrac{(\sqrt{c}-1)^2-(\sqrt{c}+1)^2}{c-1}\right)=$

$=\dfrac{(c-1)^2(2\sqrt{c}\cdot(-2))^2}{4c(c-1)^2}=\dfrac{16c}{4c}=4.$

49. а) $\left(\sqrt{k}-\dfrac{\sqrt[4]{k^3}+1}{\sqrt[4]{k}+1}\right)^{-1}-\dfrac{\sqrt[4]{k^3}+\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1}=(\sqrt{k}-\sqrt{k}+\sqrt[4]{k}-1)^{-1}-\dfrac{\sqrt[4]{k}(\sqrt[4]{k^2}+\sqrt[4]{k})}{\sqrt{k}-1}=$

$=\dfrac{1}{\sqrt[4]{k}-1}-\dfrac{\sqrt{k}(\sqrt[4]{k}+1)}{\sqrt{k}-1}=\dfrac{1-\sqrt{k}}{\sqrt[4]{k}-1}=\dfrac{\sqrt{k}-1}{\sqrt[4]{k}-1}=-\sqrt[4]{k}-1$;

б) $\left(\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{b})^2}{a-b}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\dfrac{32b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$

$=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-2\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a-b}\cdot\dfrac{32b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$

$=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+3\sqrt{b}-\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(a-b)\cdot 32b\sqrt{b}}=\dfrac{4\sqrt{b}}{32b\sqrt{b}}=\dfrac{1}{8b}$;

в) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})\right)\left(\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}}+1\right)=\left(\dfrac{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})}-(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\times$

$\times\dfrac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{y}}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}-\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{y}}=\dfrac{-\sqrt[4]{xy}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})\sqrt[4]{y}}=-\sqrt[4]{x}$,

г) $\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{ab^2}-\sqrt{a^2b}-\sqrt{b^3}}{\sqrt[4]{b^5}+\sqrt[4]{a^4b}-\sqrt[4]{ab^4}-\sqrt[4]{a^5}}=\dfrac{\sqrt{a}(a+b)-\sqrt{b}(a+b)}{\sqrt[4]{b}(a+b)-\sqrt[4]{a}(a+b)}=$

$=\dfrac{(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(a+b)(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a})}=\dfrac{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}=-(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}).$

50. а) $\dfrac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}=\dfrac{(x^{0,5}-1)(x^{0,5}+1)(x^{1,5}+1)}{(x+x^{0,5}+1)(x^{0,5}+1)}+2x^{0,5}=$

$=\dfrac{(x^{0,5}-1)(x^{0,5}-1)}{1}+2x^{0.5}=(x^{0,5}-1)^2+2x^{0,5}=x+1$;

б) $\left(a^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{2}}-\frac{ab}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right):\frac{(ab)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}=\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}-\frac{ab}{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})}\right):\frac{b^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})}{a-b}=$

$$=\frac{(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})-a^{\frac{1}{2}}b)(a-b)}{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})b^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})}=\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})}{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})b^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})}=$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}=\frac{ab^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})}{1}=ab^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}).$$

в) $\left(\frac{2x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{3x}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}-\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right)=$

$$=\frac{3x}{x^{\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})}\left(\frac{x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{1}\right)=\frac{3x}{x^{\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})}\times$$

$$\times\frac{x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y-x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{3x}{x^{\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})}\cdot\frac{y^{\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}}=3y^{\frac{1}{2}}.$$

г) $\left(\frac{1-c^{-2}}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}}-\frac{2c^{\frac{1}{2}}}{c^2}+\frac{c^{-2}-c}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{c^2}\right)^{-2}=\left(\frac{1-\frac{1}{c^2}}{\sqrt{c}-\frac{1}{\sqrt{c}}}-\frac{2\sqrt{c}}{c^2}+\frac{\frac{1}{c^2}-c}{\sqrt{c}-\frac{1}{\sqrt{c}}}\right)\times$

$$\times\left(\frac{c^2+2}{c^2}\right)^{-2}=\left(\frac{(c^2-1)\sqrt{c}}{c^2(c-1)}-\frac{2\sqrt{c}}{c^2}+\frac{(1-c^3)\sqrt{c}}{c^2(c-1)}\right)\cdot\left(\frac{c^2}{c^2+2}\right)^2=$$

$$=\frac{\sqrt{c}}{c^2}(c+1-2-(1+c+c^2))\cdot\frac{c^4}{(c^2+2)^2}=\frac{c^2\sqrt{c}}{c^2+2}.$$

51. а) $\frac{a^{\frac{7}{3}}-2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}-ab^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b}\cdot a^{-\frac{1}{3}}=\frac{a(a^{\frac{4}{3}}-2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}})}{a^{\frac{1}{3}}((a^{\frac{5}{3}}-ab^{\frac{2}{3}})-(a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{2}{3}}b))}=$

$$=\frac{a(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}})^2}{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}})(a-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})}=\frac{a(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}})}{a(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}},$$

$$\left(\frac{2(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})}{x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}}-x-y\right):\frac{y-x}{x^{-\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}}}=\left(\frac{2(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}}}-x-y\right)\times$$

$$\times\frac{y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{(y-x)x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}=\frac{(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-x-y)}{(y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}=-\frac{(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}=-y^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}};$$

$$\frac{c-1}{c^{\frac{3}{4}}+c^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{2}}+1}\cdot c^{\frac{1}{4}}+1=\frac{c-1}{c^{\frac{1}{2}}(c^{\frac{1}{4}}+1)}\cdot\frac{c^{\frac{1}{4}}(c^{\frac{1}{4}}+1)}{c^{\frac{1}{2}}+1}\cdot c^{\frac{1}{4}}+1=c^{\frac{1}{2}}-1+1=c^{\frac{1}{2}}.$$

г) $$\frac{3(ab)^{\frac{1}{2}}-3b}{a-b}+\frac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^3+2a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}=\frac{3b^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})}{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})}+$$

$$+\frac{a^{\frac{3}{2}}-3ab^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}b-b^{\frac{3}{2}}+2a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{3b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+3a^{\frac{1}{2}}\frac{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}=\frac{3b^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}=3$$

6. Преобразования тригонометрических выражений

52. а) $$\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha-\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha\cdot 0}{\cos^2\alpha}=0;$$

б) $$\sqrt{\frac{\sin^2\beta(\sin\beta+\cos\beta)}{\sin\beta}+\frac{\cos^2\beta(\cos\beta+\sin\beta)}{\cos\beta}}=$$

$$=\sqrt{\sin\beta(\sin\beta+\cos\beta)+\cos\beta(\cos\beta+\sin\beta)}=\sqrt{(\sin\beta+\cos\beta)^2}=|\sin\beta+\cos\beta|;$$

в) $(3\sin\alpha+2\cos\alpha)^2+(2\sin\alpha-3\cos\alpha)^2=9\sin^2\alpha+12\sin\alpha\cos\alpha+$
$+4\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha-12\sin\alpha\cdot\cos\alpha+9\cos^2\alpha=9(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+$
$+4(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=13;$

г) $\frac{\cos\beta\,\mathrm{tg}\beta}{\sin^2\beta}-\mathrm{ctg}\beta\cdot\cos\beta=\frac{1}{\sin\beta}-\frac{\cos^2\beta}{\sin\beta}=\frac{1-\cos^2\beta}{\sin\beta}=\frac{\sin^2\beta}{\sin\beta}=\sin\beta$

53. а) $2\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}(\alpha-\pi)+\mathrm{ctg}(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=2\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha=2\mathrm{tg}\alpha$,

б) $\frac{\sin(-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)}-\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\mathrm{ctg}\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=-1-1+1=-1$.

в) $\frac{\mathrm{tg}(\pi-\beta)\cdot\cos(\pi-\beta)\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\cdot\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=$

$=\frac{(-\mathrm{tg}\beta)\cdot(-\cos\beta)\cdot\mathrm{ctg}\beta}{(-1)\cos\beta\cdot(-\mathrm{tg}\beta)-\mathrm{ctg}\beta}=\frac{\cos\beta}{\cos\beta}=1;$

г) $\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin\frac{3\pi}{2}\cdot\sin\frac{16\pi}{9}\cdot\cos\frac{13\pi}{18}}{\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)\,\cos\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{11\pi}{9}\cdot\cos2\pi}=$

$=\frac{\mathrm{ctg}\,(-\alpha)\cdot\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(\pi-\frac{5\pi}{18}\right)}{-\mathrm{ctg}\alpha\cdot\cos\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\left(\pi+\frac{2\pi}{9}\right)\cdot1}=\frac{(-1)(-1)\sin\frac{2\pi}{9}\left(-\cos\frac{5\pi}{18}\right)}{\cos\frac{5\pi}{18}\cdot\left(-\sin\frac{2\pi}{9}\right)}=1$

54. а) $\frac{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)-\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}=\mathrm{tg}\beta;$

$\frac{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)-\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha\;\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}=$

$=\frac{\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}}{\frac{\mathrm{tg}\alpha(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}}=$

$=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\beta}{\mathrm{tg}\alpha(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)}=$

$=\frac{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)}{\mathrm{tg}\alpha(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)}=\mathrm{tg}\beta.$

Таким образом, равенство истинное.

б) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

$$\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Тождество доказано.

в) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}=\operatorname{ctg}\alpha$;

$$\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{2\cos\alpha\cdot\cos\beta}{2\sin\alpha\cdot\cos\beta}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Тождество доказано.

г) $\dfrac{\sin\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha}=-\operatorname{ctg}2\alpha$;

$$\frac{\sin\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha}=\frac{\sin\alpha-(\sin\alpha\cos 2\alpha+\cos\alpha\sin 2\alpha)}{\cos\alpha-(\cos\alpha\cos 2\alpha-\sin\alpha\sin 2\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin\alpha-(\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+\cos\alpha\ 2\sin\alpha\cos\alpha)}{\cos\alpha-(\cos\alpha(1-2\sin^2\alpha)-\sin\alpha\ 2\sin\alpha\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin\alpha-\sin\alpha+2\sin^3\alpha-2\sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha-\cos\alpha+2\cos\alpha\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\alpha(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}{2\sin^2\alpha\cos\alpha}=-\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=-\operatorname{ctg}2\alpha$$

Мы доказали тождество.

55. а) $\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\alpha}}=\cos\dfrac{\alpha}{4}$ при $\pi<\alpha<2\pi$.

Если $\pi<\alpha<2\pi$, то $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\alpha}{2}<\pi$ и $\cos\dfrac{\alpha}{2}<0$.

$$\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\ 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{4}}=\left|\cos\frac{\alpha}{4}\right|=$$

$=\cos\dfrac{\alpha}{4}$, так как $\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\alpha}{4}<\dfrac{\pi}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{4}>0$, $\left|\cos\dfrac{\alpha}{4}\right|=\cos\dfrac{\alpha}{4}$

Мы доказали тождество.

б) $\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha}}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ при $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Если $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, то $\sin\alpha<0$, $|\sin\alpha|=-\sin\alpha$.

$$\sqrt{1-\sqrt{\sin^2\alpha}}=\sqrt{1+\sin\alpha}=\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}+\sin\alpha}=\sqrt{2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}}=$$
$$=\sqrt{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\sqrt{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$
$$=\sqrt{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$
$$\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{4}<\frac{\pi}{2}.\quad -\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}<-\frac{\pi}{4},\quad \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)>0.$$

Мы доказали тождество.

в) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha}}=-\cos\frac{\alpha}{2}$ при $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, $\frac{3\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\pi$.

Значит,

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(1+\cos\alpha)}=\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=-\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Мы доказали тождество.

г) $\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\alpha}}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ при $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, $\frac{3\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\pi$.

Значит,

$$\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\alpha}}=\sqrt{1+\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}=\sqrt{1+\sin\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=$$
$$=\sqrt{2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}{2}}=\sqrt{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)\right)}=$$
$$=\sqrt{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right).$$

Если $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, то $-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}<-\frac{\pi}{8}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)>0$.

Тождество доказано.

56. а) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)=-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}$

$-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{7}=\frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{7};$

преобразуем левую часть равенства:

$-\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=$

$=-\frac{1}{4}\cdot 2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{1}{8}\cdot\sin\frac{8\pi}{7}=$

$=-\frac{1}{8}\cdot\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)=\frac{1}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{7};$

полученное выражение равно правой части, исходное равенство верно.

б) $\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}-4\sin 20^\circ\cdot\sin 50^\circ=\sin 20^\circ\left(\frac{1}{\cos 20^\circ}-4\sin 50^\circ\right)=$

$=\sin 20^\circ\left(\frac{1-2(\sin 30^\circ+\sin 70^\circ)}{\cos 20^\circ}\right)=$

$=\sin 20^\circ\left(\frac{1-1-2\sin 70^\circ}{\cos 20^\circ}\right)=-2\sin 20^\circ\left(\frac{\sin(90^\circ-20^\circ)}{\cos 20^\circ}\right)=$

$=-2\sin 20^\circ\cdot\left(\frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}\right)=-2\sin 20^\circ.$ Равенство верно.

в) $\frac{1}{\sin 10^\circ}-4\sin 70^\circ=\frac{1-4\sin 10^\circ\sin 70^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{1+2(\cos 80^\circ-\cos 60^\circ)}{\sin 10^\circ}=$

$=\frac{1+2\cos 80^\circ-2\cdot\frac{1}{2}}{\sin 10^\circ}=2\frac{\cos(90^\circ-10^\circ)}{\sin 10^\circ}=2\frac{\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}=2$

Равенство справедливо.

г) $\cos 20^\circ+2\sin^2 55^\circ-\sqrt{2}\sin 65^\circ=\cos 20^\circ+1-\cos 110^\circ-$

$-2\sin 45^\circ\sin 65^\circ=\cos 20^\circ+1-\cos 110^\circ+\cos 110^\circ-\cos 20^\circ=1$

Равенство справедливо.

57. а) Вычтем из левой части правую.

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x-2=\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}-2=\frac{\operatorname{tg}^2x+1-2\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x}=\frac{(\operatorname{tg}x-1)^2}{\operatorname{tg}x}\geq 0,$$

так как $(\operatorname{tg}x-1)^2\geq 0$; $\operatorname{tg}x>0$ при всех $x\in(0;\ \frac{\pi}{2})$.

Неравенство верно.

б) Преобразуем дробь в левой части неравенства, учитывая, что

$$\frac{5\pi}{12}-\frac{\alpha}{4}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)\quad \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)\right)}=$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)=4\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-4\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=$$

$=2\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}$. Теперь равенство принимает вид

$2\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\leq 2\sqrt{3}$ или $2\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}\leq 2\sqrt{3}$,

что верно при любых α.

в) Рассмотрим левую часть неравенства и перемножим первую скобку на четвертую, а вторую на третью:

$(1+\sin\varphi+\cos\varphi)(\sin\varphi+\cos\varphi-1)(1+(\cos\varphi-\sin\varphi))\times$
$\times(1-(\cos\varphi-\sin\varphi))=((\sin\varphi+\cos\varphi)^2-1)(1-(\cos\varphi-\sin\varphi)^2)=$
$=(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+2\sin\varphi\cos\varphi-1)\cdot(1-\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+2\sin\varphi\cos\varphi)=$
$=2\sin\varphi\cos\varphi\ \ 2\sin\varphi\cos\varphi=\sin^2 2\varphi\ \leq 1.$

Неравенство верно при всех φ.

г) Преобразуем левую часть неравенства:

$2\sin 4\alpha\sin 2\alpha+\cos 6\alpha=\cos 2\alpha-\cos 6\alpha+\cos 6\alpha=\cos 2\alpha\ \geq -1.$

Неравенство верно при любых α.

58. а) $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$, если $\sin 2\alpha=\frac{2}{3}$. $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha=\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\times$

$\times\cos^2\alpha+\sin^4\alpha-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha;$

если $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$, то $1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} = 1-\frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

б) $\dfrac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = m$.

$$\frac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2})^2} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}};$$

если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = m$, то $\dfrac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1-m}{1+m}$.

в) Поскольку $\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, то $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}$, $2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 2 = 0$,

откуда $\cos\alpha = \dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$, но $\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4} < -1$, значит $\cos\alpha = \dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

г) Поскольку $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то $-\sqrt{2} = \dfrac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$,

$-\sqrt{2}\sin\alpha - 1 = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, $1+2\sqrt{2}\sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$,

$3\sin^2\alpha + 2\sqrt{2}\sin\alpha = 0$, $(3\sin\alpha + 2\sqrt{2})\cdot\sin\alpha = 0$, но $\sin\alpha \neq 0$,

так что $\sin\alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ Тогда $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\ \ \frac{8}{9} = -\frac{7}{9}$,

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-\frac{8}{9}}) = \frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$,

$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, и так как $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

59. а) $\lg tg1° + \lg tg2° + \ldots + \lg tg89°\ tg1° = tg89°$,
поскольку $tg1° = tg(90° - 89°) = ctg89°$, $tg2° = ctg88°$.
$\lg tg1° + \lg tg2° + \ldots + \lg tg89° = \lg(tg1° \cdot tg2° \ldots tg89°) =$
$= \lg(ctg89° \cdot ctg88° \cdot \ldots \cdot tg45° \cdot \ldots \cdot tg88° \cdot tg89°) = \lg 1 = 0$.
б) $\lg tg1° \cdot \lg tg2° \cdot \ldots \cdot \lg tg89° = \lg tg1° \cdot \lg tg2° \cdot \ldots \cdot \lg tg45° \cdot \ldots \cdot \lg tg89° = 0$

60. а) $\lg\sin 32° \cdot \lg\cos 7° \cdot \lg tg40° \cdot \lg ctg20°$.
Все эти числа отрицательны; $ctg20°$ – больше 1, его логарифм по основанию 10 больше 0; следовательно, произведение трех отрицательных чисел и одного положительного числа число отрицательное, значит, $\lg\sin 32° \cdot \lg\cos 7° \cdot \lg tg40° \cdot \lg ctg20° < 0$.
б) $\lg tg2° + \lg tg4° + \lg ctg2° + \lg ctg4° = \lg(tg2° \cdot tg4° \cdot ctg2° \cdot ctg4°) = \lg 1 = 0$.

61. Воспользуемся формулой $tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$. Тогда

$$tg^2\frac{x}{2} + tg^2\frac{y}{2} + tg^2\frac{z}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{1-\cos y}{1+\cos y} + \frac{1-\cos z}{1+\cos z} = \frac{1-\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}} +$$

$$+ \frac{1-\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}} + \frac{1-\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}} = \frac{b+c-a}{a+b+c} + \frac{c+a-b}{a+b+c} + \frac{a+b-c}{a+b+c} =$$

$$= \frac{b+c-a+c+a-b+a+b-c}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1.$$

7. Преобразования выражений, содержащих степени и логарифмы

62. а) 3^{400} и 4^{300}; $3^{400} = (3^4)^{100} = 81^{100}$, $4^{300} = (4^3)^{100} = 64^{100}$.
поскольку $81 > 64$, то $81^{100} > 64^{100}$, а значит, $3^{400} > 4^{300}$;

б) $-\log_5\frac{1}{5}$ и $7^{\log_3 1}$; $-\log_5\frac{1}{5} = -\log_5\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \log_5 5 = 1$,

$7^{\log_3 1} = 7^{\log_3 1} = 7^0 = 1$, следовательно, $-\log_5\frac{1}{5} = 7^{\log_3 1}$;

в) 5^{200} и 2^{500}; $5^{200} = 25^{100}$, $2^{500} = 32^{100}$, так как
$32 > 25$, то $25^{100} < 32^{100}$, значит, $5^{200} < 2^{500}$;

г) $\log_4\sqrt{2}$ и $\log_3\frac{1}{81}$; $\log_4\sqrt{2} = \log_2(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} = \log_2 2^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$,

$\log_3\frac{1}{81} = \log_3(3)^{-4} = -4$; значит, $\log_4\sqrt{2} > \log_3\frac{1}{81}$.

63. а) $\log_3 2 + \log_3 7 = \log_3 (2 \cdot 7) = \log_3 14$; $\log_3 (2 + 7) = \log_3 9 = 2$,
$y = \log_3 t$ – возрастает, поскольку $3 > 1$, значит, $\log_3 14 > \log_3 9$
поэтому, $\log_3 2 + \log_3 7 > \log_3 (2 + 7)$;

б) $\log_4 5 - \log_4 3 = \log_4 \frac{5}{3}$, $\log_4 (5 - 3) = \log_4 2$; $y = \log_4 t$ – возрастает

так как $4 > 1$, значит, $\log_4 2 > \log_4 \frac{5}{3}$, значит, $\log_4 5 - \log_4 3 < \log_4 (5-3)$

в) $3\log_7 2 = \log_7 8 > 0$, $\log_7 (3-2) = \log_7 1 = 0$, значит, $3\log_7 2 > \log_7 (3 - 2)$,

г) $\log_3 1{,}5 + \log_3 2 = \log_3 (1{,}5 \cdot 2) = \log_3 3 = 1$, $\log_3 1{,}5^2 = \log_3 2{,}25$, так как $y = \log_3 t$ – возрастает и $3 > 2{,}25$, то $\log_3 2{,}25 < \log_3 3$, поэтому $\log_3 1{,}5 + \log_3 2 > \log_3 1{,}5^2$.

64. а) $81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8} = 81^{\frac{1}{4}} : 81^{\log_9 \sqrt{4}} + 25^{\log_{125} 8} = \sqrt[4]{81} : (9^{\log_9 \sqrt{4}})^2 +$
$+ (5^{\frac{1}{3}\log_5 8})^2 = 3 : 4 + (8^{\frac{1}{3}})^2 = \frac{3}{4} + \sqrt[3]{8^2} = \frac{3}{4} + 4 = 4\frac{3}{4}$;

б) $2^{4\log_4 a} - 5^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}} a} - a^0 = 2^{2\log_2 a} - 5^{\log_5 a} - 1 = 2^{\log_2 a^2} - 5^{\log_5 a} - 1 =$
$= a^2 - a - 1$.

65. а) $49^{1-\log_7 2} + 5 = \frac{49}{(7^{\log_7 2})^2} + 5 = \frac{49}{4} + 5 = 12\frac{1}{4} + 5 = 17{,}25$;

б) $36^{\frac{1}{2}\log_6 5} + 2^{-\log_2 10} = \frac{\sqrt{36}}{(6^{\log_6 5})^2} + \frac{1}{2^{\log_2 10}} = \frac{6}{25} + \frac{1}{10} = \frac{24+10}{100} = 0{,}34$.

66. а) $\frac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3} = \frac{\lg 144}{\lg 12} = \frac{\lg 12^2}{\lg 12} = \frac{2\lg 12}{\lg 12} = 2$;

б) $2\log_{0,3} 3 - 2\log_{0,3} 10 = \log_{0,3} 9 - \log_{0,3} 100 = \log_{0,3} \frac{9}{100} = \log_{0,3}(0{,}3)^2 = 2$

в) $\frac{3\lg 2 + 3\lg 5}{\lg 13 - \lg 130} = \frac{\lg 8 + \lg 125}{\lg 0{,}1} = \frac{\lg 1000}{\lg 0{,}1} = \frac{3}{-1} = -3$;

г) $(2\log_{12} 2 + \log_{12} 3)(2\log_{12} 6 - \log_{12} 3) = \log_{12} 12 \cdot \log_{12} 12 = 1$.

67. а) $25b^3\sqrt[4]{c^7}$ при $a = 5$;

$\log_5 25 + \log_5 b^3 + \log_5 \sqrt[4]{c^7} = 2 + 3\log_5 b + \frac{7}{4}\log_5 c$;

б) $\frac{0{,}0016b^4}{c\sqrt[7]{c^2}}$ при $a = 0{,}2$, $b > 0$, $c > 0$;

$$\log_{0,2}0{,}0016 + 4\log_{0,2}b - \log_{0,2}c^{1\frac{2}{7}} = 4 + 4\log_{0,2}b - 1\frac{2}{7}\log_{0,2}c.$$

68. а) $\log_4 x = 2\log_4 10 + \frac{3}{4}\log_4 81 - \frac{2}{3}\log_4 125;$

$$x = \frac{10^2\sqrt[4]{81^3}}{\sqrt[3]{125^2}} = \frac{100\cdot 27}{25} = 108;$$

б) $\log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 16 - \log_{\frac{1}{3}} 8 + \log_{\frac{1}{3}} 28;$ $\qquad x = \frac{\sqrt{16}\cdot 28}{8} = 4.$

69. а) $\dfrac{7{,}832\cdot\sqrt[4]{12{,}98}}{5{,}256^2} \approx \dfrac{7{,}832\cdot 1{,}8981}{27{,}6256} \approx 0{,}5381;$

б) $\dfrac{102{,}3^2}{\sqrt[3]{92{,}14}\cdot 6{,}341} \approx \dfrac{10465{,}3}{4{,}5101\cdot 6{,}341} \approx 365{,}94.$

70. $\log_3 2 \quad \log_4 3\cdot\log_5 4 \quad \log_6 5\cdot\log_{10} 9 =$

$$= \frac{\lg 2}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 3}{\lg 4}\;\frac{\lg 4}{\lg 5}\cdot\frac{\lg 5}{\lg 6}\cdot\frac{\lg 6}{\lg 7}\cdot\frac{\lg 7}{\lg 8}\cdot\frac{\lg 8}{\lg 9}\cdot\frac{\lg 9}{\lg 10} = \frac{\lg 2}{\lg 10} = \lg 2 \approx 0{,}3010.$$

71. Поскольку $\sqrt{3} - 1 = \dfrac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{3-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1},$

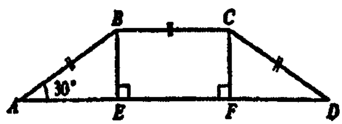
$\sqrt{6} + 2 = \dfrac{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}{\sqrt{6}-2} = \dfrac{6-4}{\sqrt{6}-2} = \dfrac{2}{\sqrt{6}-2},$ то

$$\log_2(\sqrt{3}-1) + \log_2(\sqrt{6}+2) = \log_2\frac{2}{\sqrt{3}+1} + \log_2\frac{2}{\sqrt{6}-2} =$$

$$= \log_2 2 - \log_2(\sqrt{3}+1) + \log_2 2 - \log_2(\sqrt{6}-2) = 2 - A.$$

§ 3. Функции

8. Рациональные функции



72. а) Пусть $AB=CB=DC=x$,

тогда $CF=BE=\dfrac{x}{2}$, $AE=DF=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

$$S = \frac{BC + AD}{2}\cdot BE;$$

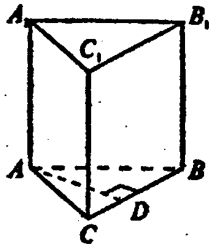
$$S(x) = \frac{x + x + \frac{x\sqrt{3}}{2}\,2}{2}\cdot\frac{x}{2} = \frac{\left(2x + x\sqrt{3}\right)}{4}.$$

б) Пусть $BE = x$, тогда $AB = BC = CD = 2x = EF$, $AE = x\sqrt{3}$

Периметр трапеции равен:

$P(t) = 2x + 2x + 2x + 2x + 2\sqrt{3}x = 2x(4 + \sqrt{3})$.

73.



а) Пусть $AB = x$, тогда $BC = AC = AA_1 = x$,

$AD = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$. Объём призмы равен:

$V = S_{ABC} \cdot AA_1$; $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot AD$.

$V(x) = \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \cdot x = \dfrac{x^3\sqrt{3}}{4}$.

б) Если объём призмы υ, то сторона основания $AB = \sqrt[3]{\dfrac{4v}{\sqrt{3}}}$

$S_{бок} = P_{ABC} \cdot AA_1$; $P_{ABC} = 3 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{4v}{\sqrt{3}}}$, $AA_1 = AB = \sqrt[3]{\dfrac{4v}{\sqrt{3}}}$;

$S_{бок}(\upsilon) = 3 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{4v}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{4v}{\sqrt{3}}} = 3\sqrt[3]{\dfrac{16v^2}{3}}$. Ответ: $S(\upsilon) = 3\sqrt[3]{\dfrac{16v^2}{3}}$.

74. 1) $x = A\sin\omega t + x_0$; 2) $v = x'(t) = A\omega\cos\omega t$.

75.

а) I – в B в 6 ч 30 мин, II – в A в 7 часов;

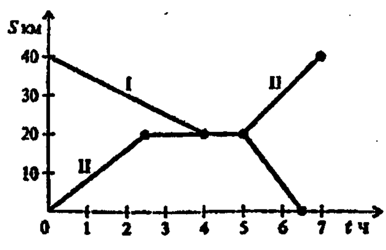
б) I турист – 4 ч + 1,5 = 5,5 ч, II турист – 2,5 + 2 = 4,5 ч;

в) I турист – 4 ч, II турист – в 2 ч 30 мин;

г) I турист – 1 час, II турист – 2,5 часа;

д) I турист до остановки двигался со скоростью $v = \dfrac{20}{4} = 5$ (км/ч),

после остановки $v = \dfrac{20}{1,5} = 13\dfrac{1}{3}$ (км/ч);

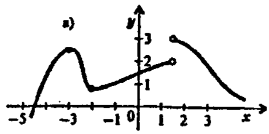


II турист до остановки $v = \frac{20}{2,5} = 8$ (км/ч), после остановки $v = \frac{20}{2} = 10$ (км/ч);

е) Средняя скорость движения первого туриста $v = \frac{40}{5,5} = 7\frac{3}{11}$ (км/ч), второго туриста $v = \frac{40}{4} = 8\frac{8}{9}$ (км/ч).

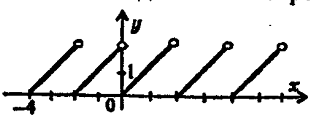
76.

а) 1) $(-\infty; -3] \cup [-2; 1,5)$



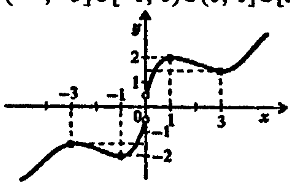
2) $[-3; -2] \cup (1,5; \infty)$;
3) $x_{max} = -3$, $y(-3) = 2,5$, $x_{min} = -2$, $y(-2) = 0,5$;
4) $y_{max} = 3,5$ при $x = 1,5$, $y_{min} = 0,5$ при $x = -2$;
5) в точке $x = 1,5$, $y(1,5) = 3,5$; 6) на $(-\infty; 1,5)$ и на $(1,5; \infty)$;
7) ни четная, ни нечетная.

б) 1) функция возрастает в каждой точке непрерывности;



2) нет; 3) нет; 4) y_{max} – нет, $y_{min} = 0$, при $x = -2, 0, 2$;
5) в точках −2; 0; 2; 4; 6; 8; значения функции в них равны 0;
6) на $(-4; -2)$, $(-2; 0)$, $(2; 4)$, $(4; 6)$, $(6; 8)$;
7) ни четная, ни нечетная.

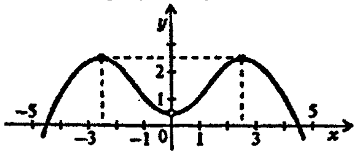
в) 1) возрастает на $(-\infty; -3] \cup [-1; 0) \cup (0; 1] \cup [3; \infty)$;



2) убывает на $[-3; -1] \cup (1; 3]$;
3) $x_{max} = -3$, $y(-3) = -1,5$, $x_{max} = 1$, $y(1) = 2$,
$x_{min} = -1$, $y(-1) = -2$, $x_{min} = 3$, $y(3) = 1,5$;
4) $y_{max} = 2$ при $x = 1$, $y_{min} = -2$ при $x = -1$;

5) в точке $x = 0$, значения функции нет в этой точке;
6) непрерывна на $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$; 7) нечетная.

г) 1) возрастает на $(-\infty;\ -2{,}5]\cup(0;\ 2{,}5]$;



2) убывает на $[-2{,}5;\ 0)\cup[2{,}5;\ \infty)$;
3) $x_{max} = -2{,}5$, $y(-2{,}5) = 2{,}5$, $x_{max} = 2{,}5$, $y(2{,}5) = 2{,}5$,
$x_{min} = 0$, $y(0) = 0{,}5$;
4) $y_{max} = 2$ при $x = -2$ и $x = 2$, $y_{min} = 0{,}5$ при $x = 0$;
6) непрерывна при всех x; 7) четная.

77. а) $D(y): x^2 + 2x - 8 \neq 0$, $x \neq -4$, $x \neq 2$,
$D(y): x \in (-\infty;\ -4)\cup(-4,\ 2)\cup(2;\ +\infty)$;
б) $x^4 - 1 \neq 0$, $(x^2 - 1)(x^2 + 1) \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$,
$D(y): x \in (-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(1;\ \infty)$;
в) $x^4 - 9x^2 + 20 \neq 0$, $x \neq \sqrt{5}$, $x \neq -\sqrt{5}$, $x \neq 2$, $x \neq -2$,
$D(y): x \in (-\infty;\ -\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5};\ -2)\cup(-2;\ 2)\cup(2;\ \sqrt{5})\cup(\sqrt{5};\ \infty)$;
г) $3x^2 - 5x + 4 \neq 0$, $D < 0$, $D(y): x \in (-\infty;\infty)$.

78. а) $x^3 - x \neq 0$, $x(x^2 - 1) \neq 0$, $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$; промежутки непрерывности $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ \infty)$;
б) $x - 1 \neq 0$, $x \neq 1$; непрерывность на $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ \infty)$;
в) $x \neq 0$. Функция непрерывна на $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$;
г) $3x^3 - 2x^2 + 5 = 0$, $(x + 1)(3x^2 - 5x + 5) = 0$,
$x = -1$, $3x^2 - 5x + 5 \neq 0$ – т.к. $D < 0$, то функция непрерывна на $(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$.

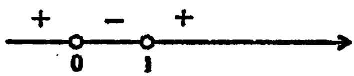
79.
а) $y(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -y(x)$ – нечетность доказана;

б) $y(-x) = \dfrac{5(-x)^3}{1-(-x)^2} = \dfrac{-5x^3}{1-x^2} = -\dfrac{-5x^3}{1-x^2} = -y(x)$ – нечетная;

в) $y(-x) = (-x)^4((-x)^2 + 2) = x^4(x^2 + 2) = y(x)$ – четная;

г) $y(-x) = \dfrac{|-x|+2}{(-x)^2} = \dfrac{|x|+2}{(-x)^2} = y(x)$ – четная.

80.
а) $\dfrac{x-1}{3x} > 0$, $(x-1)3x > 0$,

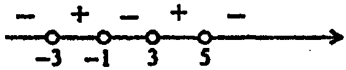


$y(3) > 0$, $y(\frac{1}{2}) < 0$, $y(-2) > 0$; $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$,

$y < 0$ при $x \in (0; 1)$;

б) $\frac{x^2 - 4x - 5}{9 - x^2} > 0$, $\frac{(x-5)(x+1)}{(3-x)(3+x)} > 0$, $y(8) < 0, y(4) > 0, y(-4) < 0$,

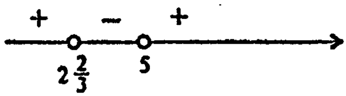
$y(0) < 0, y(-2) > 0$;



$y > 0$ при $x \in (-3; -1) \cup (3; 5)$,

$y < 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 3) \cup (5; \infty)$;

в) $1 - \frac{2x-3}{5-x} > 0$,

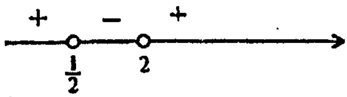


$\frac{5 - x - 2x + 3}{5 - x} > 0$,

$\frac{8-3x}{5-x} > 0$, $y(9) > 0, y(4) < 0, y(0) > 0; y > 0$ при

$x \in (-\infty; 2\frac{2}{3}) \cup (5; \infty)$, $y < 0$ при $x \in (2\frac{2}{3}; 5)$;

г) $y = 2x^2 - 5x + 2$, $2x^2 - 5x + 2 > 0$,



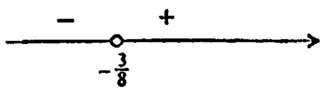
$2(x - \frac{1}{2})(x-2) > 0$, $y > 0$ при

$x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$, $y < 0$ при $x \in (\frac{1}{2}; 2)$.

81.

а) $y = 4x^2 + 3x - 1$. Производная функции: $y' = 8x + 3$. Критическая

точка: $8x + 3 = 0$, $8x = -3$, $x = -\frac{3}{8}$,



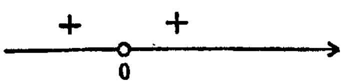
$y'(0) > 0$, $y'(-1) < 0$,

значит, $x = -\frac{3}{8}$ – точка минимума; функция возрастает на

$[-\frac{3}{8}; \infty)$, убывает на $(-\infty; -\frac{3}{8}]$

б) $y = 1 - \frac{2}{x}$. Производная функции: $y' = \frac{2}{x^2}$.

Критическая точка $x = 0$.



$y'(2) > 0$, $y'(-3) > 0$;

функция возрастает на $D(y)$.

в) $y = (x-1)^4 - 2$. Производная: $y' = 4(x-1)^3$.

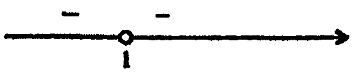
Критическая точка $x = 1$.

$y'(3) > 0$, $y'(0) < 0$;

$x = 1$ – точка минимума;

функция возрастает на $[1; \infty)$, убывает на $(-\infty; 1]$.

г) $y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$



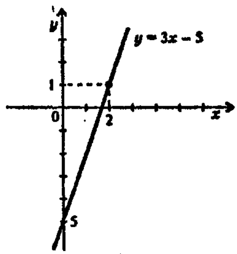
Производная:

$$\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

Критическая точка $x = 1$. $y'(3) < 0$, $y'(0) < 0$;

Функция убывает на $D(y)$.

82.



а) $y = 3x - 5$;

$D(x): x \in (-\infty; \infty)$; $E(y): y \in (-\infty; \infty)$;

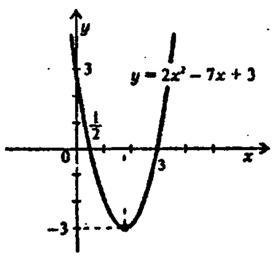
нули: $3x - 5 = 0$, $x = 1\frac{2}{3}$;

промежутки знакопостоянства:

$y > 0$ при $x \in (1\frac{2}{3}; \infty)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; 1\frac{2}{3})$;

экстремумов нет, $y' = 3 = \mathrm{const}$, функция возрастает на D.

б) $y = 2x^2 - 7x + 3$; $D(x): x \in (-\infty; \infty)$;

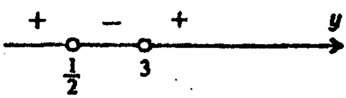


$x_0 = \frac{-8}{2a} = -\frac{7}{4}$, $y_0 = -3\frac{1}{8}$,

$E(y): y \in (-3\frac{1}{8}; \infty)$;

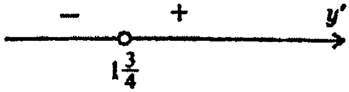
нули: $2x^2 - 7x + 3 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$;

промежутки знакопостоянства:



$y > 0$ при $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (3; \infty)$, $y < 0$ при $x \in (\frac{1}{2}; 3)$;

$y' = 4x - 7$, $4x - 7 = 0$, $x = 1\frac{3}{4}$ – точка минимума,



$y = (1\frac{3}{4}) = -3\frac{1}{8}$;

$y'(2) > 0, y'(0) < 0$,

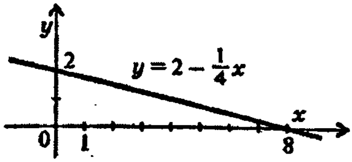
возрастает на $[1\frac{3}{4}; \infty)$, убывает на $(-\infty; 1\frac{3}{4}]$.

в) $y = 2 - \frac{1}{4}x$; $D(x): x \in (-\infty; \infty)$, $E(y): y \in (-\infty; \infty)$;

нули: $2 - \frac{1}{4}x = 0$,

$x = 8$;

промежутки знакопостоянства:



$y > 0$ при $x < 8$, $y < 0$ при $x > 8$; $y' = -\frac{1}{4}$ – функция убывает на $D(y)$;

г) $y = 12 - 4x - x^2$;

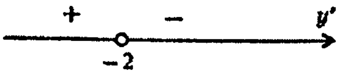
$D(x)$: $x \in (-\infty; \infty)$; $x_0 = -2$; $y_0 = 16$;

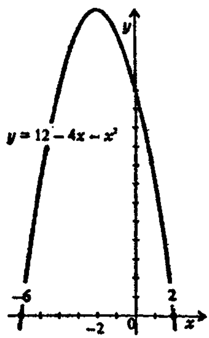
$E(y): y \in (-\infty; 16)$; нули: $12 - 4x - x^2 = 0$,

$x^2 + 4x - 12 = 0$, $x_1 = -6$,

$x_2 = 2, y > 0$ при $x \in (-6; 2)$,

$y < 0$ при $x \in (-\infty; -6) \cup (2; \infty)$;





$y' = -4 - 2x$, $-4 - 2x = 0$,

$x = -2$, $y'(0) < 0$, $y'(-6) > 0, x = -2$ – точка максимума,

$y(-2) = 16$; возрастает на $(-\infty; -2]$, убывает на $[-2; \infty)$.

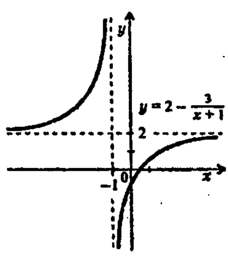
83. а) $y = 2 - \frac{3}{x+1}$,

$D(x)$: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$;

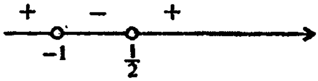
$E(y): y \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$;

нули: $2 - \frac{3}{x+1} = 0$, $\frac{2x+2-3}{x+1} = 0$,

$2x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{2}$;



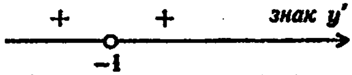
промежутки знакопостоянства:



$\frac{2x-1}{x+1}>0$, $(2x-1)(x+1)>0$, $y(2)>0$,
$y(0)<0$,
$y(-2)>0$, $y>0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(\frac{1}{2};\infty)$, $y<0$ при $x\in(-1;\frac{1}{2})$;

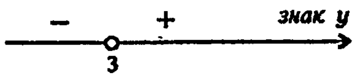
$y'=\frac{3}{(x+1)^2}$,

$y'(-2)>0$, $y'(0)>0$,
критическая точка

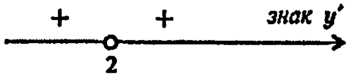


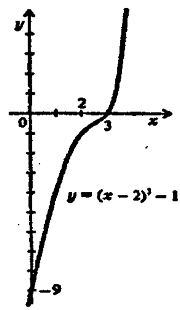
$x=-1$; экстремумов нет; функция фозрастает на $(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$.

б) $y=(x-2)^3-1$; $D(x)$: $x\in(-\infty;\infty)$; $E(y)$: $y\in(-\infty;\infty)$; нули:
$(x-2)^3-1=0$, $(x-2-1)(x^2-4x+4+x-2+1)=0$,
$(x-3)(x^2-3x+3)=0$, $x=3$ или $x^2-3x+3=0$ – уравнение решений не имеет;
промежутки знакопостоянства:



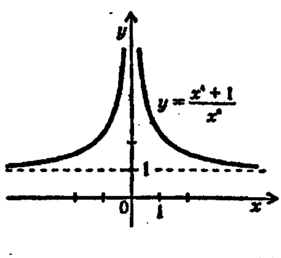
$y(4)>0$, $y(2)<0$, $y>0$ при $x\in(3;\infty)$, $y<0$ при $x\in(-\infty;3)$;
$y'=3(x-2)^2$,
$3(x-2)^2=0$, $x=2$,





$y'(4)>0$, $y'(0)>0$,
экстремумов нет;
Функция возрастает на $D(y)$.

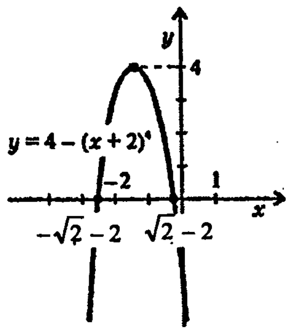
в) $y=\frac{x^4+1}{x^4}=1+\frac{1}{x^4}$;
$D(y)$: $x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$;
$E(y)$: $y\in(1;\infty)$; нулей нет;
$y>0$ при всех $x\in D(x)$;
$x=0$ – критическая точка;
$y'(1)<0$, $y'(-1)>0$,



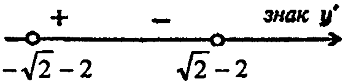
возрастает на $(-\infty; 0)$,
убывает на $(0; \infty)$.

г) $y = 4 - (x + 2)^4$;
$D(x)$: $x \in (-\infty; \infty)$;

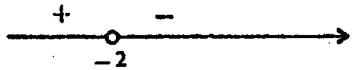
$E(y)$: $y \in (-\infty; 4]$;



нули: $4 - (x + 2)^4 = 0$,
$(x + 2)^4 = 4$, $x_1 + 2 = \sqrt{2}$,
$x_1 = \sqrt{2} - 2$,
$x_2 = -\sqrt[2]{2} - 2$;
промежутки знакопостоянства:



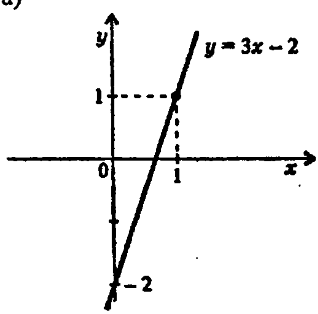
$y(-2) > 0$, $y(3) < 0$,
$y(-10) < 0$;
$y' = -4(x + 2)^3$,
$-4(x + 2)^3 = 0$,
$(x + 2)^3 = 0$, $x = -2$,



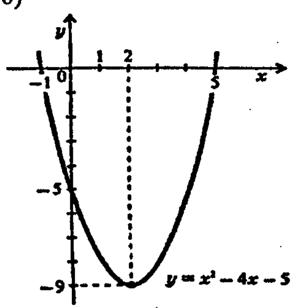
$y'(0) < 0$, $y'(-3) > 0$, $x = -2$ – точка максимума, $y(-2) = 4$;
возрастает на $(-\infty; -2)$, убывает на $(-2; \infty)$.

84.

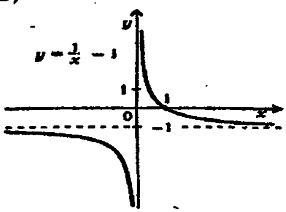
а)



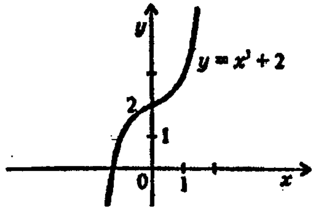
б)



в)

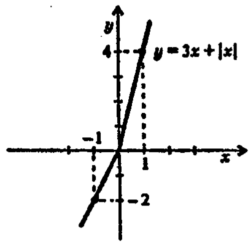


г)

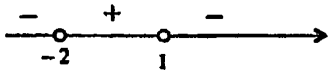


85.

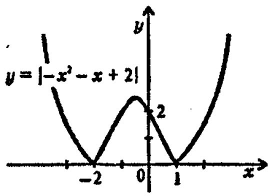
а) При $x \geq 0$ $y = 3x + x$,
$y = 4x$, при $x < 0$ имеем
$y = 2x$;



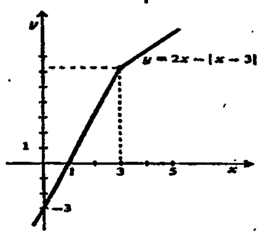
б) $-x^2 - x + 2 = 0$.
$x^2 - x + 2 = 0$,
$x_1 = -2$, $x_2 = 1$,



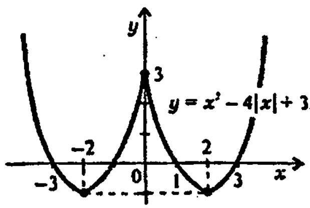
при $x \in [-2; 1]$
$y = -x^2 - x + 2$,
при $x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$
$y = x^2 + x - 2$;



в) при $x > 3$ имеем
$y = 2x - x + 3$,
$y = x + 3$,
при $x < 3$ имеем
$y = 2x - (-x + 3)$,
$y = 3x - 3$;



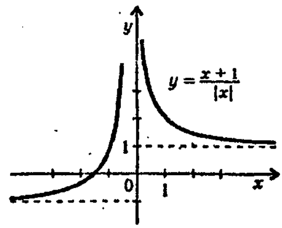
г) при $x > 0$ имеем
$y = x^2 - 4x + 3$,
при $x < 0$ имеем
$y = x^2 + 4x + 3$.



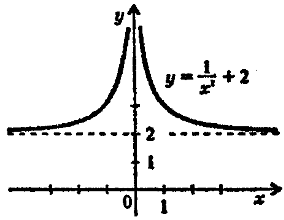
86.

а) При $x>0$ имеем $y=\dfrac{x+1}{x}$,

при $x<0$ имеем $y=-1-\dfrac{1}{x}$,



б) $y=\dfrac{1}{x^2}+2$;

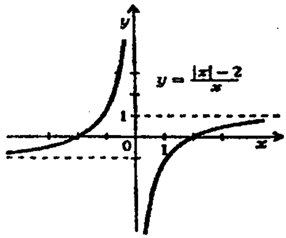


в) При $x>0$ имеем

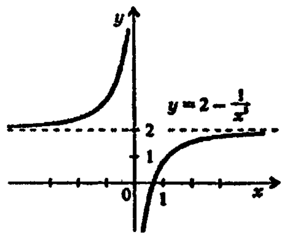
$y=\dfrac{x-2}{x}$, $y=1-\dfrac{2}{x}$,

при $x<0$ имеем

$y=\dfrac{-x-2}{x}$, $y=-1-\dfrac{2}{x}$;



г) $y=\dfrac{2x^3-1}{x^3}$,



87. а) $x^2=x+6$, $x^2-x-6=0$, $x_1=3$, $x_2=-2$. Ответ: да.

б) $\dfrac{3}{x}=4(x+1)$, $x\neq 0$, $3=4(x+1)\cdot x$, $3=4x^2+4x$,

$4x^2+4x-3=0$, $D=16+48=64$, $x_1=\dfrac{-4-8}{8}=-1\dfrac{1}{2}$, $x_2=\dfrac{1}{2}$.

Ответ: да.

в) $x^4 = 2x^2 + 1, x^4 - 2x^2 - 1 = 0$.

$D = 4 + 4 = 8$, $x^2 = 1 + \sqrt{2}$, $x^2 = 1 - \sqrt{2}$ – корни есть,

$x^2 = 1 - \sqrt{2}$ – корней нет. Ответ: да.

г) $\frac{1}{x^2} = x^2 - 2, x \neq 0, 1 = x^4 - 2x^2, x^4 - 2x^2 - 1 = 0$. Пусть $x^2 = y$,

$D = 4 + 4 = 8$, $x^2 = 1 + \sqrt{2}$, $x^2 = 1 - \sqrt{2}$,

$x^2 = 1 + \sqrt{2}$ – корни есть, $x^2 = 1 - \sqrt{2}$ – корней нет. Ответ: да.

88. а) Функция $y = x^3 - 6x + 2$ определена на $[0; 1]$. $y(0)=0-0+2>0$, $y(1) = 1 - 6 + 2 = -3 < 0$. Уравнение имеет корень на данном промежутке, т.к. функция непрерывна и она принимает значение 0.

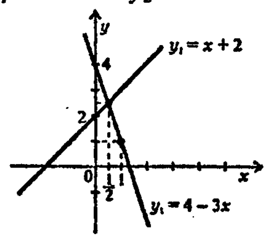
б) $y(1)=1-3+\frac{2}{9}=-1\frac{7}{9}<0$, $y(2)=16-12+\frac{2}{9}=4\frac{2}{9}>0$, уравнение имеет корень на $[1; 2]$.

в) $y(1) = 1 + 3 - 5 = -1 < 0$ для $y(x) = x^5 + 3x - 5$ – непрерывной на I; $y(2) = 32 + 6 - 5 = 33 > 0$, уравнение имеет корень на $[1; 2]$.

г) $y = 4 + 2x^3 - x^5$ – непрерывна на I; $y(-1) = 4 - 2 + 1 = 3 > 0$, $y(2) = 4 + 16 - 32 < 0$, уравнение имеет корень на $[-1; 2]$.

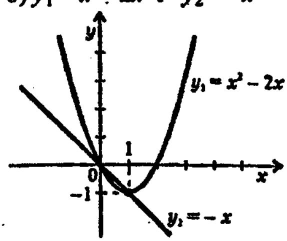
89.

а) $y_1 = 4 - 3x$ и $y_2 = x + 2$.



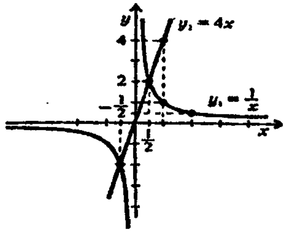
Ответ: $x \in [0,5; \infty)$.

б) $y_1 = x^2 - 2x$ и $y_2 = -x$



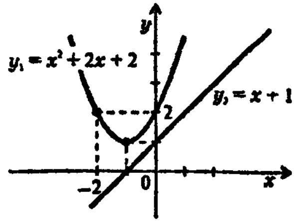
Ответ: 0; 1.

в) $y_1 = \frac{1}{x}$ и $y_2 = 4x$.



Ответ: –0,5; 0,5.

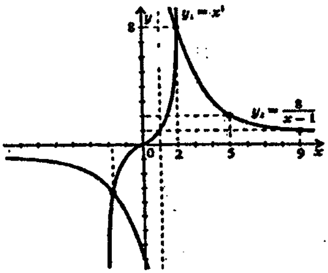
г) $y_1 = x^2 + 2x + 2$ и $y_2 = x + 1$.



Ответ: $x \in (-\infty; \infty)$.

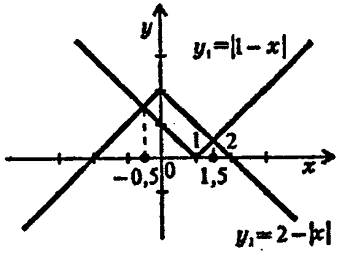
90.

а) $y_1 = x^3$ и $y_2 = \dfrac{8}{x-1}$.



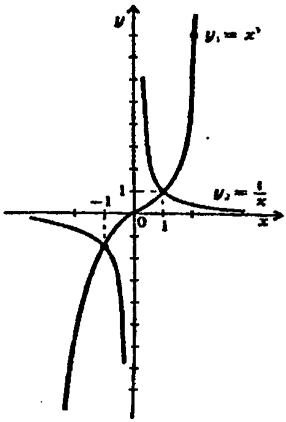
Ответ: 2 и приблизительно –1,5.

б) $y_1 = |1-x|$ и $y_2 = 2-|x|$



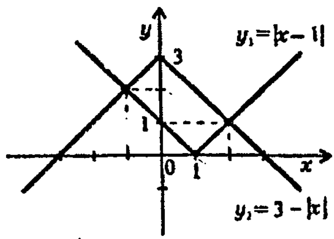
Ответ: –0,5; 1,5.

в) $y_1 = x^3$ и $y_2 = \dfrac{1}{x}$.



Ответ: –1; 1

г) $y_1 = |x-1|$ и $y_2 = 3-|x|$



Ответ: –1; 2.

91.

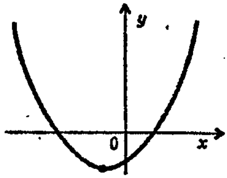
Из условия найдем a и b.

$$\begin{cases} 1 = 2a + b, \\ 10 = 5a + b, \end{cases} \qquad 3a = 9, \ a = 3, \ b = -5$$

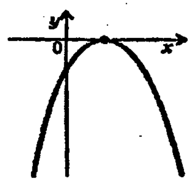
Ответ: $a = 3$, $b = -5$

92.

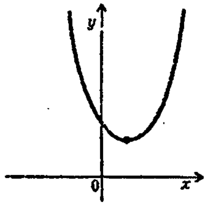
а)



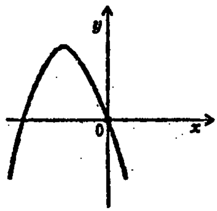
б)



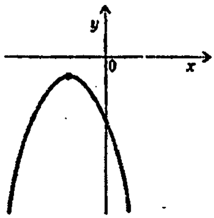
в)



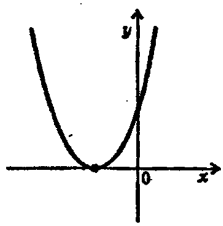
г)



д)



е)



а) $a > 0$, так как ветви параболы направлены вверх;

$b > 0$, так как абсцисса вершины параболы, $x_0 = -\dfrac{b}{2a} < 0$;

$c < 0$, так как ордината точки пересечения графика с осью Oy отрицательна;

$D > 0$, так как парабола пересекает ось Ox в двух точках;

б) аналогично а) имеем: $a < 0, b < 0,\ c < 0, D = 0$;

в) $a > 0, b < 0,\ c > 0, D < 0$; г) $a < 0, b < 0,\ c = 0, D > 0$;
д) $a < 0, b < 0,\ c < 0, D < 0$; е) $a > 0, b > 0,\ c > 0, D = 0$;

93. а) может, например: $y = x^2$, $y = c$;
б) может линейная функция, например $y = ax$; в) не может.

94. а) $y = \dfrac{1}{|x|} + \dfrac{x}{|x|}$; б) $y = (3) + (x^3 - x\,|\,x\,|)$;

в) $y = \dfrac{x^2}{x^4 - 1} + \dfrac{x^3 - x}{x^4 - 1}$; г) $y = (x^4 + 8) + (2x^5 - 3x)$.

95. а) $y(-x)=5\cdot(-x)^6-2(-x)^2-3=5x^6-2x^2-3=y(x)$ – четная;

б) $y(-x)=4(-x)^5-2(-x)^3+(-x)=-4x^5+2x^3-x=-y(x)$ – нечетная;

в) $y(-x)=\dfrac{3}{(-x)^2+1}=\dfrac{3}{x^2+1}=y(x)$ – четная;

г) $y(-x)=-\dfrac{2}{(-x)^3}=\dfrac{2}{x^3}=-y(x)$ – нечетная.

9. Тригонометрические функции

96. а) $\cos^2 x\neq 0,\quad x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z$;

б) $1+2\sin 2x\neq 0,\quad \sin 2x\neq-\dfrac{1}{2},\quad 2x\neq(-1)^k\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\pi k,\quad k\in Z$,

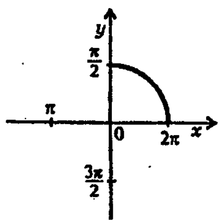
$x\neq(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2},\quad k\in Z$;

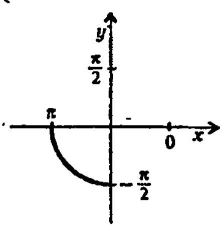
в) $\sqrt{3}\cos x-\dfrac{3}{2}\neq 0,\quad \sqrt{3}\cos x\neq\dfrac{3}{2},\quad \cos x\neq\dfrac{3}{2\sqrt{3}},\quad \cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad x\neq\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in Z$;

г) $\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}\neq 0,\quad \sin\dfrac{x}{2}\neq 0$ или $\cos\dfrac{x}{2}\neq 0$,

$\dfrac{x}{2}\neq\dfrac{\pi k}{2}+\pi n,\quad k\in Z,\quad x=\pi k,\quad k\in Z$.

97. а) $\sin x\cdot\cos x\geq 0,\quad \begin{cases}\sin x\geq 0,\\ \cos x\geq 0\end{cases}$ или $\begin{cases}\sin x\leq 0,\\ \cos x\leq 0.\end{cases}$





Ответ: $x\in[\pi n;\dfrac{\pi}{2}+\pi n],\quad n\in Z$.

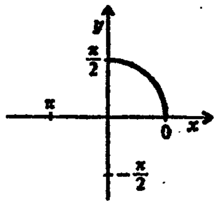
б) $\begin{cases}x\geq 0,\\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n.\end{cases}$ n – целые положительные числа.

в) $\sin^2 x-\cos^2 x\geq 0,\ \cos 2x\leq 0,\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\leq 2x\leq\dfrac{3\pi}{2}+2\pi n$,

$n \in Z,\quad \frac{\pi}{4} + \pi n \le x \le \frac{3\pi}{4} + \pi n,\quad n \in Z$.

Ответ: $x \in [\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \frac{3\pi}{4} + \pi n],\quad n \in Z$.

г) $\begin{cases} \sin x \ge 0, \\ \cos x \ge 0. \end{cases}$



Ответ: $x \in [2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n;].\quad n \in Z$.

98. а) $E(y): y \in [-2; 4]$; б) $E(y): y \in (-2; 2)$;

в) $E(y): y \in [-1; 5]$; г) $E(y): y \in [-1; 1]$.

99. а) $E(y): y \in [\frac{1}{2}; +\infty)$;

б) $y = \sqrt{1 - \cos 4x}$, $-1 \le \cos 4x \le 0$, $0 < y \le \sqrt{2}$, $E(y): y \in [0; \sqrt{2}]$;

в) $y = \frac{3}{\cos x - 1} = \frac{-3}{1 - \cos x} = -\frac{3}{2\sin^2 \frac{x}{2}}$, $E(y): y \in [-\infty; -\frac{3}{2}]$;

г) $y = \mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x = \mathrm{tg}x + \frac{1}{\mathrm{tg}x}$, $\left|a + \frac{1}{a}\right| \ge 2$, $E(y): y \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

100. а) $y > 0$ при $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in Z$,

$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\quad n \in Z$;

$y < 0$ при $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in Z$,

$\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\quad n \in Z$.

Ответ: $y > 0$ при $x \in (-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n),\quad n \in Z$;

$y < 0$ при $x \in (\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi n),\quad n \in Z$.

б) $y < 0$, если $1 - \mathrm{tg}3x < 0$, $\mathrm{tg}3x > 1$ при $\frac{\pi}{4} + \pi n < 3x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in Z$,

$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\quad n \in Z$; $y > 0$, если $1 - \mathrm{tg}3x > 0$,

$\text{tg}3x < 1$ при $\frac{\pi}{2}+\pi n < 3x < \frac{5\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}<x<\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$

Ответ: $y < 0$ при $x\in\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3};\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$;

$y > 0$ при $x\in\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3};\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$.

в) $y>0$, если $\sin\frac{x}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\frac{x}{2}\in\left(-\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $x\in\left(-\frac{5\pi}{2}+4\pi n;\ \frac{\pi}{2}+4\pi n\right)$;

$y<0$, если $\sin\frac{x}{2}>\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x\in\left(\frac{\pi}{2}+4\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+4\pi k\right)$, $k, n\in Z$.

г) $y>0$, если $1+2\cos 2x>0$, $2\cos 2x>-1$, $\cos 2x>-\frac{1}{2}$,

$-\frac{2\pi}{3}+2\pi n<2x<\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$, $-\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$;

$y<0$, если $1+2\cos 2x<0$, $2\cos 2x<-1$, $\cos 2x<-\frac{1}{2}$,

$\frac{2\pi}{3}+2\pi n<2x<\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$, $\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $y>0$ при $x\in(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n)$, $n\in Z$, $y<0$

при $x\in(\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+\pi n)$, $n\in Z$.

101. а) $y(-x)=\text{tg}(-3x)-\text{ctg}(-\frac{x}{2})=-\text{tg}3x+\text{ctg}\frac{x}{2}=-y(x)$ – нечетная;

б) $y(-x)=\frac{\sin(-x)\cdot\cos^2(-x)}{(-x)}=\frac{-\sin x\cdot\cos^2 x}{-x}=y(x)$ – четная;

в) $y(-x)=\sin\left(\frac{(-x)^3-(-x)}{(-x)^2-1}\right)=\sin\left(\frac{-x^3+x}{x^2-1}\right)=\sin\left(-\frac{x^3-x}{x^2-1}\right)=$

$=-\sin\frac{x^3-x}{x^2-1}=-y(x)$ – нечетная;

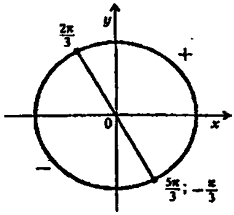
г) $y(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}-\cos(-x)=\frac{-\sin x}{-x}-\cos x=\frac{\sin x}{x}-\cos x=y(x)$ – четная.

102. а) Периодическая с периодом $T=\frac{2\pi}{5}$; б) непериодическая;

в) периодическая, период $T=2\pi$;

г) $y=\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=1+\sin 2x$, периодическая, $T=\pi$

103.



а) Производная функции: $\cos(x-\frac{\pi}{6})=y'$

$\cos(x-\frac{\pi}{6})=0$, $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$,

$x=\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$.

$y'>0$ на $(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n)$, $n\in Z$, значит,

на этом промежутке функция возрастает;

$y'<0$ на $(\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{3}+2\pi n)$, $n\in Z$, значит, функция на этом промежутке убывает. В $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$, производная меняет знак с «+» на «–», это точка максимума; в $x=\frac{5\pi}{3}+2\pi n$. $n\in Z$, производная меняет знак с «–» на «+», значит, это точка минимума.

Ответ: возрастает на $[-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n]$, $n\in Z$;

убывает на $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in Z$;

$x_{\max}=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$, $x_{\min}=\frac{5\pi}{3}+2\pi n$. $n\in Z$.

б) $y'=\frac{-2(\sin x)}{(1-\cos x)^2}=\frac{-\cos\frac{x}{2}}{2\sin^3\frac{x}{2}}$, $y'=0$.

$\cos\frac{x}{2}=0$, $x=\pi+2\pi n$, $x\neq 2\pi k$, k, $n\in Z$;

$y'>0$ $x\in(\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n)$, $n\in Z$

$y'<0$ $x\in(2\pi n; \pi+2\pi n)$, $n\in Z$. Таким образом,

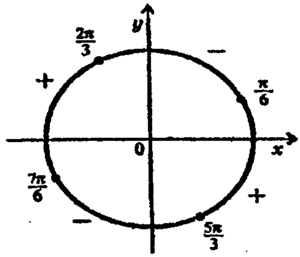
функция возрастает при $x\in[\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n)$, функция убывает при $x\in[2\pi k;\ \pi+2\pi k)$, следовательно, в точке $x=\pi+2\pi n$ производная меняет знак с «–» на «+», значит, это точка минимума, а точки максимума нет, т.к. $x\neq 2\pi k$

в) $y' = 0.5(-\sin(\frac{\pi}{3} - 2x)) \cdot (-2) = \sin(\frac{\pi}{3} - 2x) = -\sin(2x - \frac{\pi}{3})$,

$-\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 0,$

$2x - \frac{\pi}{3} = \pi n, \quad n \in Z,$

$2x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z,$



$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z$. $y'(x) > 0$ при

$(\frac{2\pi}{3} + \pi n; \ \frac{7\pi}{6} + \pi n)$, $n \in Z$, значит, при $x \in \left[\frac{2\pi}{3} + \pi n; \ \frac{7\pi}{6} + \pi n\right]$

функция возрастает, $y' < 0$ на $(\frac{\pi}{6} + \pi n; \ \frac{2\pi}{3} + \pi n)$, $n \in Z$, значит,

при $x \in \left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \ \frac{2\pi}{3} + \pi n\right]$ функция убывает;

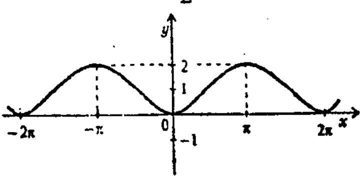
$x_{\max} = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z$; $x_{\min} = \frac{5\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z$.

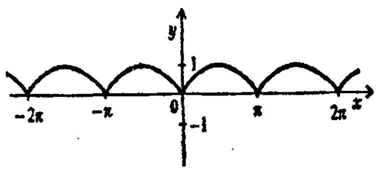
г) $y' = \frac{1}{2\sqrt{1 - \sin^2 x}}(-2\sin x \cdot \cos x) = -\frac{\sin 2x}{2|\cos x|}$.

Функция возрастает на $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \ \pi + \pi n\right]$, $n \in Z$, убывает на $\left[\pi n; \ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$, $x_{\max} = \pi n$, $n \in Z$; точек минимума нет.

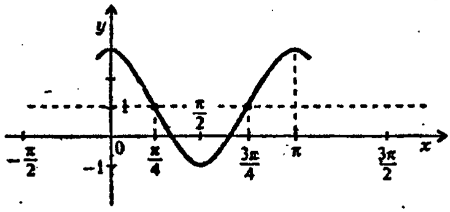
104. а) так как $y = \cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x$, $y = \cos^2 x$, $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = 0$;
б) $y_{\min} = -3$, $y_{\max} = 5$; в) $y_{\min} = -\sqrt{2}$, $y_{\max} = \sqrt{2}$;
г) $y_{\min} = 1$, $y_{\max}$ не существует.

105. а) $y = 2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$; б) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x} = |\sin x|$;

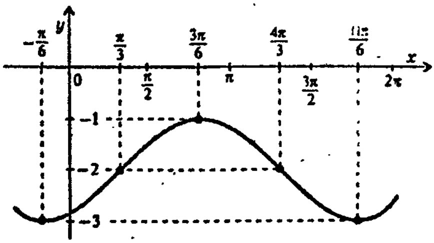




в) $y = 1 + 2\cos 2x$;



г) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$

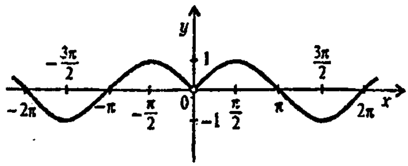


106.

а) $y = \frac{|x|\sin x}{x}$,

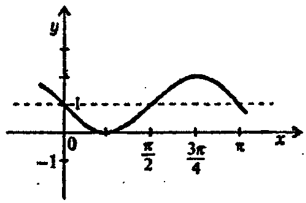
при $x>0$ $y = \sin x$,

при $x<0$ $y = -\sin x$,



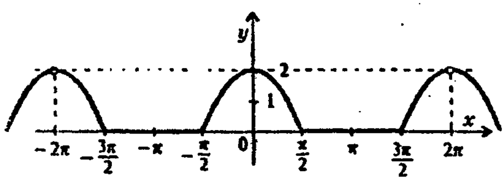
б)

$y = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$;

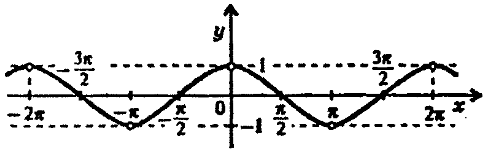


в) $y = \cos x + |\cos x|$, при $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in Z$,

$y = 2\cos x$; при $x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in Z$, $y = 0$,



г) $y = \sin x \quad \text{ctg}x = \sin x \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cos x,\ x \neq \pi n,\ n \in Z$.



107.

а) $y = \dfrac{1}{2} + \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$. 1) $D(y): x \in (-\infty; \infty)$. 2) $E(y): y \in \left[-\dfrac{1}{2}; 1\dfrac{1}{2}\right]$.

3) Нули: $\dfrac{1}{2} + \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 0, \quad \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$,

$x - \dfrac{\pi}{6} = (-1)^k\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \pi k,\ k \in Z,\ x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

4) Промежутки знакопостоянства:

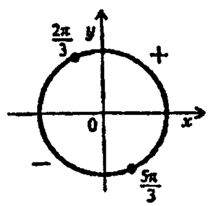
$y > 0, \quad -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi m < x - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in Z$,

$2\pi m < x < \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi m, \quad m \in Z$; $y < 0, \ -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m < x - \dfrac{\pi}{6} < -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in Z$,

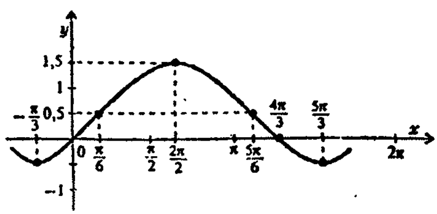
$-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m < x < \dfrac{\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in Z$.

5) Функция ни четная, ни нечетная.

6) $y' = \cos(x - \dfrac{\pi}{6}), \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$,



$x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$,



$x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z$; возрастает на $\left[-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n\right], \quad n \in Z$,

убывает на $\left[\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n\right], \quad n \in Z$,

$x_{\max} = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\quad n \in Z$, $x_{\min} = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n,\quad n \in Z$

7) Периодичная с периодом 2π.

б) $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

1) $D(y)$: $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z,\quad \dfrac{x}{2} \neq \dfrac{5\pi}{6} + \pi m,\ m \in Z$, $x \neq \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z$.

2) $E(y)$: $y \in (-\infty; \infty)$.

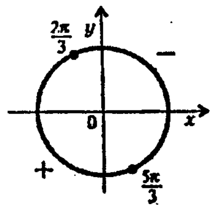
3) Нули: $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0,\quad \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0,\quad \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \pi k,\ k \in Z$,

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z,\quad x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

4) Промежутки знакопостоянства:

$y > 0,\quad x \in \left(\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \in Z$,

$y < 0,\quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \in Z$,

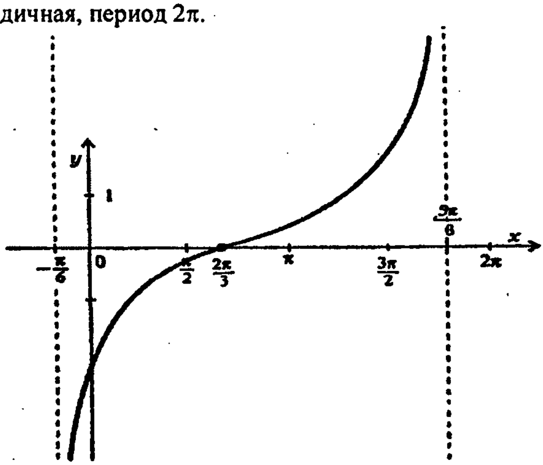


5) Функция ни четная, ни нечетная.

6) $y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4\cos^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)} > 0$

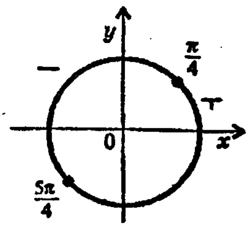
при всех $x \in D(y)$, функция возрастает, экстремумов нет

7) Периодичная, период 2π.



в) $y = 1+\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x) = 1+\frac{1}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$.

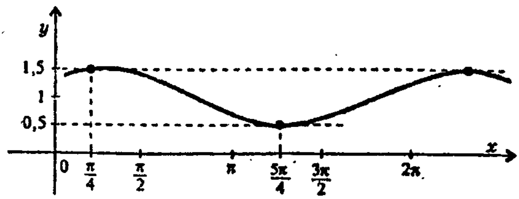
1) $D(y)$: $x \in (-\infty; \infty)$.
2) $E(y)$: $y \in \left[\frac{1}{2};\ 1\frac{1}{2}\right]$.
3) Нулей нет.
4) $y > 0$ при всех $x \in D(y)$.
5) Ни четная, ни нечетная.
6) Периодичная, период 2π.
7) $y' = -\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$,



$x-\frac{\pi}{4} = \pi n,\ n \in Z.\quad x = \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$,

возрастает на $\left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right]$,

$n \in Z$, убывает на $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n \in Z$,



$x_{\max} = \frac{\pi}{4}+2\pi n,\ x_{\min} = \frac{5\pi}{4}+2\pi n$.

г) $y = 1 - \mathrm{tg}2x$.

1) $D(y)$: $2x \ne \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in Z,\ x \ne \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k \in Z$
2) $E(y)$: $y \in (-\infty; \infty)$.
3) Нули: $\mathrm{tg}2x = 1$, $2x = \frac{\pi}{4}+\pi m,\ m \in Z,\ x = \frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{2},\ m \in Z$
4) Промежутки знакопостоянства:

$y > 0$, $-\frac{\pi}{2}+\pi n < 2x < \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z,\quad -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n \in Z$,

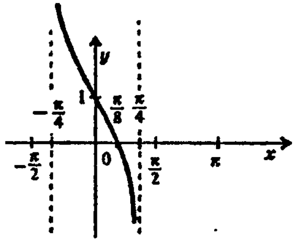
$y < 0$, $\frac{\pi}{4}+\pi n < 2x < \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in Z,\quad \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

5) Ни четная, ни нечетная.

6) Периодичная с периодом $\frac{\pi}{2}$

7) $y' = -\frac{2}{\cos^2 2x} < 0$

при всех $x \in D(y)$,
функция убывает.



108. Поскольку функции $y_1 = \sin\frac{x}{10}$ и $y_2 = x^3$ нечетные, то

$y_1(x_0) = -y_1(-x_0)$ и $y_2(x_0) = -y_2(-x_0)$; значит, $y_1(-x_0) = y_2(-x_0)$,
т.е. x_0 – корень уравнения.

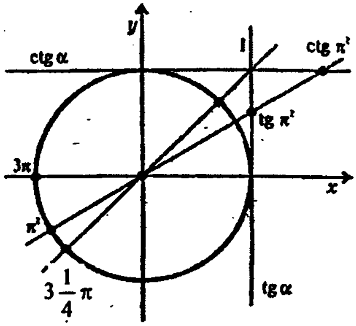
109. а) $\sin(\pi+\frac{1}{\pi}) - \cos(\pi+\frac{1}{\pi}) = \sqrt{2}(\sin(\pi+\frac{1}{\pi})\cos\frac{\pi}{4} - \cos(\pi+\frac{1}{\pi})\sin\frac{\pi}{4} =$

$= \sqrt{2}\sin(\pi+\frac{1}{\pi}-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{\pi}), \frac{1}{\pi} < \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}+\frac{1}{\pi} < \pi,$

значит, $\sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{\pi}) > 0$, $\sin(\pi+\frac{1}{\pi}) > \cos(\pi+\frac{1}{\pi})$;

б) $3\pi < \pi^2 < 3\frac{1}{4}\pi$,

значит, $\text{tg}\pi^2 < 1$,
а $\text{ctg}\pi^2 > 1$, тогда
$\text{tg}\pi^2 < \text{ctg}\pi^2$;



в) $\text{tg}2 < -1$, $\text{ctg}2 > -1$, значит, $\text{tg}2 < \text{ctg}2$;

г, $\sin 1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$, значит, $\sin 1 > \cos 1$

110.

а) $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$, $\sin\alpha + \sqrt{1-\sin^2\alpha} > 1$

$\sqrt{1-\sin^2\alpha} > 1 - \sin\alpha$; возведем в квадрат обе части

$1 - \sin^2\alpha > (1 - \sin\alpha)^2,\ \ 1 - \sin^2\alpha > 1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha,$

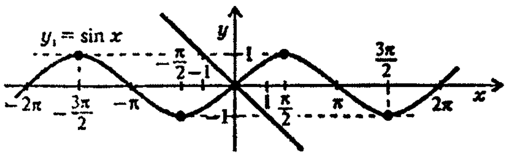
$-\sin^2\alpha > -2\sin\alpha + \sin^2\alpha,\ \ -\sin^2\alpha > \sin\alpha\,(\sin\alpha - 2),$

$-\sin\alpha > \sin\alpha - 2,\ \ 1 > \sin\alpha$, что верно на $(0;\ \frac{\pi}{2})$;

б) Так как $|\sin\alpha| \le 1 < \frac{\pi}{2}$, то $\cos(\sin\alpha) > 0$.

111.

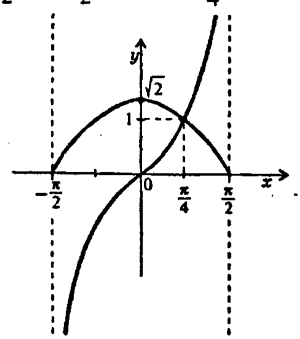
а) $y_1 = \sin x$ и $y_2 = -x$.



Ответ: 0.

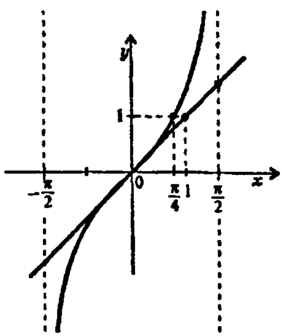
б) $y_1 = \mathrm{tg}x;\ y_2 = \sqrt{2}\cos x$,

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Ответ: $\frac{\pi}{4}$.



в) $y_1 = \mathrm{tg}x;\ y_2 = x$.

Ответ: 0.

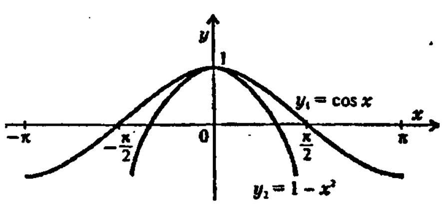


г)

$y_1 = \cos x$

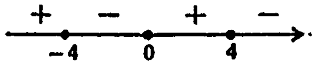
и $y_2 = 1 - x^2$

Ответ: 0.



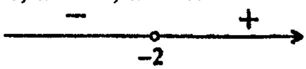
10. Степенная, показательная и логарифмическая функции

112. а) $16x - x^3 \ge 0$, $x(16 - x^2) \ge 0$, $x(4 - x)(4 + x) \ge 0$.



Ответ: $x \in (-\infty; -4]$ и $[0; 4]$.

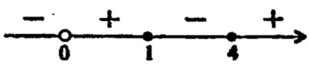
б) $x^3 + 8 > 0$, $x^3 > -8$, $x > -2$.



Ответ: $x \in (-2; \infty)$.

в) $5 - x - \dfrac{4}{x} \ge 0$, $\dfrac{5x - x^2 - 4}{x} \ge 0$, $(-x^2 + 5x - 4)x \ge 0$,

$(-x^2 + 5x - 4)x \ge 0$, $x(x - 1)(x - 4) \le 0$.



Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup [1; 4]$.

г) $x^2 + x - 20 > 0$, $(x - 4)(x + 5) > 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -5) \cup (4; \infty)$.

113. а) $x^2 \cdot 3^x - 3^{x-1} \ge 0$, $3^x(x^2 - \frac{1}{3}) \ge 0$, $3^x(x - \frac{1}{\sqrt{3}})(x + \frac{1}{\sqrt{3}}) \ge 0$,

$3^x > 0$ при всех x, $x \le -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ или $x \ge \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $x \in (-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{3}}; \infty)$.

б) $2^{\sin x} - 1 \ge 0$, $2^{\sin x} \ge 2^0$, $y = 2^x$ – возрастает, $\sin x \ge 0$.

Ответ: $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$.

в) $4 - 3x + x^2 > 0$, $x^2 - 3x + 4 > 0$, $D < 0$.

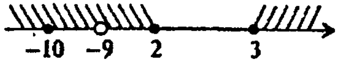
Ответ: : $x \in (-\infty; \infty)$.

г) $\sin x > 0$.

Ответ: : $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$.

114.

а) $\begin{cases} x^2-5x+6\geq 0, \\ \lg(x+10)\neq 0, \\ (x+10)^2>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\leq 2,\ x\geq 3, \\ x+10\neq 1, \\ x\neq -10. \end{cases}$

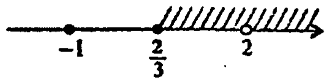


Ответ: $x\in(-\infty;-10)\cup(-10;-9)\cup(-9;2]\cup[3;\infty)$.

б) $\begin{cases} \log_5\cos x\geq 0, \\ \cos x>0; \end{cases}$ $y=\log_5 t$ – возрастает, $\begin{cases} \cos x\geq 1, \\ \cos x>0; \end{cases}$

$\cos x=1,\ x=2\pi n,\ n\in Z.$

в) $\begin{cases} 3x-2>0, \\ x^2-x-2\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x>2, \\ x\neq 2, x\neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x>\frac{2}{3}, \\ x\neq 2, x\neq -1. \end{cases}$



Ответ: $x\in(\frac{2}{3};2)\cup(2;\infty)$.

г) $\begin{cases} \lg(3x^2-2x)\geq 0, \\ 3x^2-2x>0; \end{cases}$ $y=\lg t$ – возрастает, $\begin{cases} 3x^2-2x\geq 1, \\ x(3x-2)>0; \end{cases}$

$3x^2-2x-1\geq 0.\ x\geq 1$ или $x\leq -\frac{1}{3}$; $\begin{cases} x<0 \text{ или } x>\frac{2}{3}, \\ x\geq 1 \text{ или } x\leq -\frac{1}{3}. \end{cases}$

Ответ: $x\in(-\infty;-\frac{1}{3}]\cup[1;\infty)$.

115. а) $\sqrt{x+1}\geq 0$, $E(y)$: $y\in[0;\infty)$; б) $y=25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x-1$, $E(y)$: $y\in(-1;\infty)$;

в) $E(y)$ $y\in(-\infty;\infty)$; г) $E(y)$: $y\in(0;+\infty)$.

116. а) $E(y)$: $y\in[\frac{1}{2};2]$; б) $E(y)$: $y\in(-\infty;2]$;

в) $E(y)$ $y\in[1;\infty)$; г) $E(y)$: $y\in[1;\infty)$.

117. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x-4>0$, $2^{-x}>2^2$, $y=2^t$ – возрастает, $-x>2$, $x<-2$.

Ответ: $y>0$ при $x\in(-\infty;-2)$, $y<0$ при $x\in(-2;\infty)$.

б) $\begin{cases} \log_4(x+3)>0, \\ x+3>0; \end{cases}$ $y=\log t$ – возрастает, $\begin{cases} x+3>1, \\ x+3>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-2, \\ x>-3; \end{cases}$ $x>-2$.

Ответ: $y>0$ при $x\in(-2;\infty)$, $y<0$ при $x\in(-3;-2)$.

в) $2-3^x>0,\ -3^x>-2,\ 3^x<2,\ y=3^t$ – возрастает, $x<\log_3 2$.

Ответ: $y>0$ при $x\in(-\infty;\log_3 2)$, $y<0$ при $x\in(\log_3 2;\infty)$

г) $\begin{cases}\sqrt{x}-4>0,\\ x\ge 0;\end{cases}$ $\sqrt{x}>4,\ x>16$.

Ответ: $y>0$ при $x\in(16;\infty)$, $y<0$ при $x\in[0;16)$.

118. а) $4^{x+2}-4^x>0,\ 16\cdot 4^x-4^x>0,\ 15\cdot 4^x>0,\ x$ – любое число.

Ответ: $y>0$ при всех x.

б) $\begin{cases}\lg(x-2)-1>0,\\ x-2>0;\end{cases}$ $\lg(x-2)>1,\ y=\lg t$ – возрастает,

$\begin{cases}\lg(x-2)>\lg 10,\\ x>2;\end{cases}$ $\begin{cases}x-2>10,\\ x>2;\end{cases}$ $\begin{cases}x>12,\\ x>2.\end{cases}$

Ответ: $y>0$ при $x\in(12;\infty)$, $y<0$ при $x\in(2;12)$.

в) $\begin{cases}\sqrt{x}+3>0,\\ x\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt{x}>-3,\\ x\ge 0;\end{cases}$ $x\ge 0$.

Ответ: $y>0$ при $x\in[0;\infty)$.

г) $2-\sqrt[3]{x}>0,\ \sqrt[3]{x}<2,\ x<8$.

Ответ: $y>0$ при $x\in(8;\infty)$, $y<0$ при $x\in(-\infty;8)$.

119. а) $y(-x)=5^{-x}+5^{-(-x)}=5^{-x}+5^x=y(x)$ – четная;

б) $y(-x)=\lg(1-(-x)^2)=\lg(1-x^2)=y(x)$ – четная;

в) $y(-x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{(-2x)}=2^{2x}$ – ни четная, ни нечетная;

г) $y(-x)=-x\cdot\sqrt[3]{(-x)}=x\cdot\sqrt[3]{x}$ – четная.

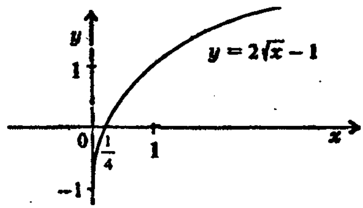
120. а) $y(-x)=(-x)^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{2}{3}}=y(x)$ – четная;

б) $y(-x)=3^{-x}-3^{-(-x)}=3^{-x}-3^x=-(3^x-3^{-x})=-y(x)$ – нечетная;

в) $y(-x)=2^{\cos(-x)}=2^{\cos x}=y(x)$ – четная;

г) $y(-x)=\sqrt[5]{(-x)^4}+1=\sqrt[5]{x^4}+1=y(x)$ – четная.

121.



а) 1) $D(y)$: $x\in[0;\infty)$;

2) $E(y)$: $y\in[-1;\infty)$;

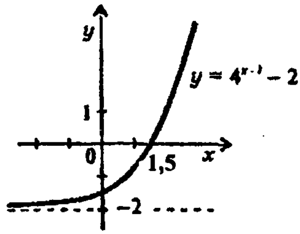
3) нули: $2\sqrt{x}-1=0$,

$2\sqrt{x}=1,\ \sqrt{x}=\dfrac{1}{2},\ x=\dfrac{1}{4}$;

4) $y > 0$ при $x > \frac{1}{4}$, $y < 0$ при $x \in [0; \frac{1}{4})$;

5) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y' > 0$ при всех x, экстремумов нет, возрастает;

6) ни четная, ни нечетная.



б) 1) $D(y)$: $x \in (-\infty; \infty)$;

2) $E(y)$: $y \in (-2; \infty)$;

3) нули: $4^{x-1} = 2$, $2^{2x-2} = 2^1$.

$2x - 2 = 1$, $2x = 3$, $x = 1{,}5$;

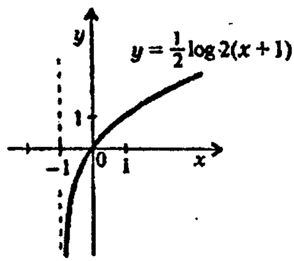
4) $4^{x-1} - 2 > 0$, $2^{2x-2} > 2^1$,

$y = 2^t$ – возрастает, $2x - 2 > 1$,

$2x > 3$, $x > 1{,}5$, $y > 0$ при $x \in (1{,}5; \infty)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; 1{,}5)$;

5) $y' = 4^{x-1}\ln 4$, $4^{x-1}\cdot\ln 4 > 0$, экстремумов нет, возрастает на $D(y)$;

6) ни четная, ни нечетная, не периодическая.



в) 1) $D(y)$: $x > -1$;

2) $E(y)$: $y \in (-\infty; \infty)$;

3) нули: $\log_2(x + 1) = 0$,

$x + 1 = 1$, $x = 0$;

4) $\log_2(x + 1) > 0$,

$y = \log_2 t$ – возрастает,

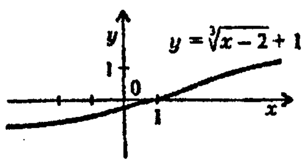
$x + 1 > 1$, $x > 0$; $y > 0$ при $x > 0$,

$y < 0$ при $x \in (-1; 0)$;

5) $y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)\ln 2} = \frac{1}{2(x+1)\ln 2} \neq 0$,

экстремумов нет, при $x > -1$ $y' > 0$, возрастает;

6) ни четная, ни нечетная, не периодическая.



г) 1) $D(y)$: $x \in (-\infty; \infty)$;

2) $E(y)$: $y \in (-\infty; \infty)$;

3) нули: $\sqrt[3]{x-2} + 1 = 0$,

$x - 2 = -1$, $x = 1$;

4) $y > 0$ при $x \in (1; \infty)$,

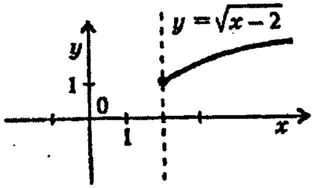
$y < 0$ при $x \in (-\infty; 1)$;

5) $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} > 0$. при всех x, возрастает, экстремумов нет;

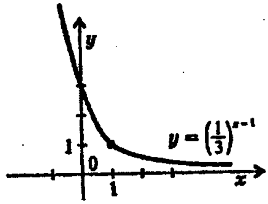
6) ни четная, ни нечетная, не периодическая.

122.

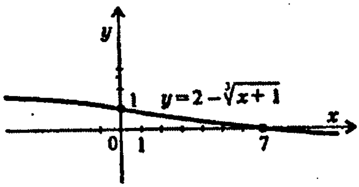
а) $y = \sqrt{x-2} + 1$;



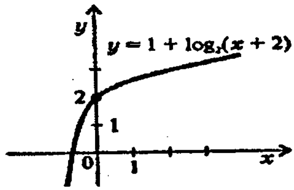
б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$;



в) $y = 2 - \sqrt[3]{x+1}$;

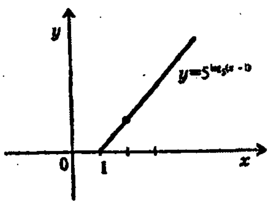


г) $y = 1 + \log_2(x+2)$.

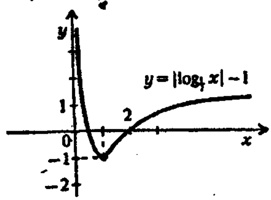


123.

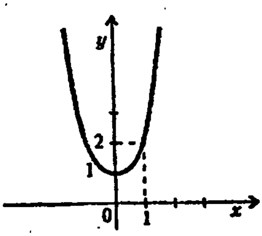
а) $x>1$, $y = x - 1$, $y = 5^{\log_5(x-1)}$;



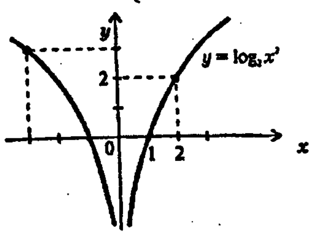
б) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right| - 1$;



в) $y = 2^{|x|}$;



г) $y = \log_2 x^2 = \begin{cases} 2\log_2 x \text{ при } x > 0, \\ 2\log_2(-x) \text{ при } x < 0 \end{cases}$



124. а) $y_{наим} = 0$ при $x = 6$ или $x = -6$, $y_{наиб} = 6$ при $x = 0$;

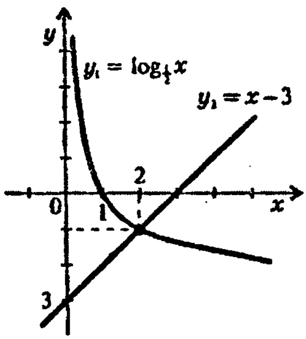
б) $y_{наиб} = 1$ при $x = 0$, $y_{наим} = -7$ при $x = -2$;

в) $y_{наиб} = 3$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$, $y_{наим} = \frac{1}{3}$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$;

г) $y_{наиб} = 4$ при $x = -1$, $y_{наим} = 0$ при $x = 1$.

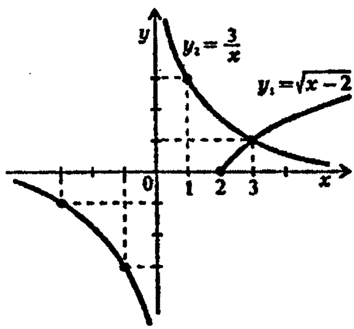
125.

а) $y_1 = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y_2 = x - 3$.



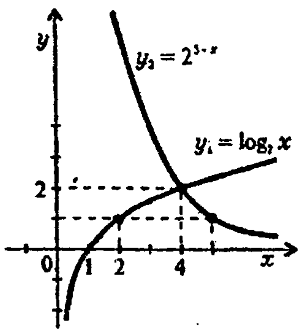
Ответ: 2.

б) $y_1 = \sqrt{x-2}$ и $y_2 = \frac{3}{x}$.



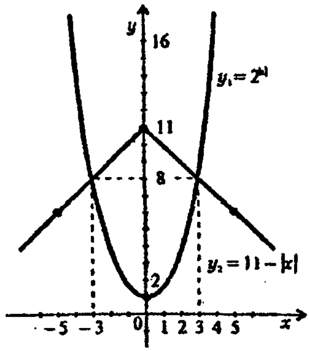
Ответ: 3.

в) $y_1 = \log_2 x$ и $y_2 = 2^{5-x}$.



Ответ: 4

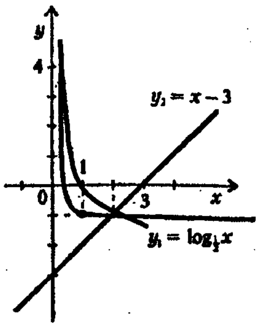
г) $y_1 = 2^{|x|}$ и $y_2 = 11 - |x|$.



Ответ: 3; −3

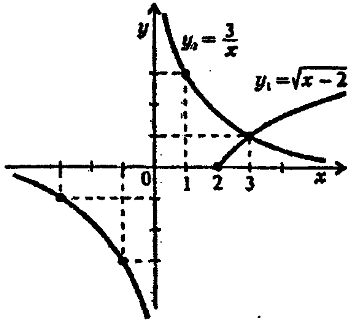
126.

а) $y_1 = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y_2 = x - 3$.



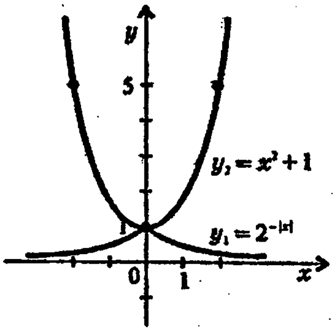
Ответ: $x = (0; 2)$.

б) $y_1 = \sqrt{x-2}$ и $y_2 = \frac{3}{x}$.



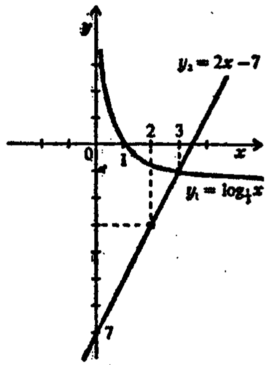
Ответ: $x \in [2; 3]$

в) $y_1 = 2^{-|x|}$ и $y_2 = x^2 + 1$.



Ответ: 0.

г) $y_1 = \log_{\frac{1}{3}} x$ и $y_2 = 2x - 7$.



Ответ: $x \in (0; 3)$.

127.

$y = (\log_2 3)^{\sin x}$, $y = (\log_3 2)^{\cos x}$.

$\log_2 3 > 1$, значит, наибольшее значение первой функции равно $\log_2 3$ при $\sin x = 1$; $\log_3 2 < 1$, поэтому наибольшее значение второй функции достигается при $\cos x = -1$ и равно $\frac{1}{\log_3 2}$. $\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$.

128. а) $D(y):\begin{cases}4x+1>0,\\1-x^2\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>-\frac{1}{4},\\-1\le x\le 1;\end{cases}$ $x\in(-\frac{1}{4};1]$;

$\frac{1}{\sqrt{4x+1}}-\sqrt{1-x^2}=0$, $\frac{1}{\sqrt{4x+1}}=\sqrt{1-x^2}$, $\frac{1}{4x+1}=1-x^2$,

$(4x+1)(1-x^2)=1$, $4x-4x^3+1-x^2=1$,

$-4x^3-x^2+4x=0$, $-x(4x^2+x-4)=0$, $x_1=0$, $4x^2+x-4=0$,

$D=65$, $x_2=\frac{\sqrt{65}-1}{8}$, $x_3=\frac{-1-\sqrt{65}}{8}$ – не входит в $D(y)$;

б) $D(f)$ $\begin{cases}x+15>0,\\x>0;\end{cases}$ $x>0$; $2=\lg x(x+15)$, $x^2+15x=100$,

$x^2+15x-100=0$, $x_1=-20$ – не входит в $D(f)$, $x_2=5$.

129. а) Пусть $x_1>x_2$ на R, тогда рассмотрим разность

$y(x_1)-y(x_2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2+1}=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}\right)<0$,

$y(x_1)<y(x_2)$. Таким образом, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ убывает на R;

б) $x_1>x_2$ на $(0:\infty)$. $f(x_1)-f(x_2)==\log_2 3x_1-\log_2 3x_2=\log_2\frac{x_1}{x_2}>0$ (т.к.

$\log_2 t$ – возрастает и $\frac{x_1}{x_2}>1$), а, значит, $f(x)=\log_2 3x$ возрастает на $(0;\infty)$.

§ 4. Уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств

11. Рациональные уравнения и неравенства

130.

а) $3(x-2)-5=4-(5x-1)$, $3x-6-5=4-5x+1$, $8x=16$, $x=2$;

б) $2x-3=5$, $2x-3=5$ или $2x-3=-5$, $2x=8$ или $2x=-2$, $x_1=4$ или $x_2=-1$. Ответ: -1; 4.

в) $7-2(3-x)=4(x-1)+5$, $7-6+2x=4x-4+5$, $-2x=0$, $x=0$;

г) $4-3x=2$, $4-3x=2$ или $4-3x=-2$, $-3x=-2$ или $-3x=-6$,

$x=\frac{2}{3}$ или $x_2=2$. Ответ: $\frac{2}{3}$; 2.

131. а) $\frac{3x+1}{5}=2-\frac{4(x-3)}{15}$, $3(3x+1)=30-4(x-3)$, $9x+3=30-4x+12$,

$13x=39$, $x=3$. Ответ: 3.

б) $\left|\frac{x-3}{2}+5\right|=4$, $\frac{x-3}{2}+5=4$ или $\frac{x-3}{2}+5=-4$, $x-3+10=8$ или $x-3+10=-8$, $x=1$, $x=-15$. Ответ: 1; –15.

в) $1-\frac{x-3}{2}=x-\frac{3(5-2x)}{7}$, $14-7(x-3)=14x-6(5-2x)$,

$14-7x+21=14x-30+12x$, $-33x=-65$, $x=\frac{65}{33}$, $x=1\frac{32}{33}$;

г) $\left|1-\frac{x+2}{3}\right|=5$, $1-\frac{x+2}{3}=5$ или $1-\frac{x+2}{3}=-5$, $1-x=15$ или

$1-x=-15$, $x_1=-14$ или $-x=-16$, $x_2=16$. Ответ: 16; –14.

132. а) $ax-2x=3(x-1)$, $ax-2x-3x=-3$, $(a-5)x=-3$; при $a\neq 5$ одно решение; при $a=5$ – нет решений;

б) $a(1-x)+2=3x-ax$, $a-ax+2-3x+ax=0$, $-3x=a+2$, $3x=a+2$; при любых a одно решение;

в) $x(2-a)-x=5+x$, $2x-ax-x-x=5$, $-ax=5$; при $a\neq 0$ одно решение; при $a=0$ нет решений;

г) $5+3(x+3a)=9a+5$, $3x$ - $9a-9a$, $3x=0$; при любых a одно решение.

133. а) $\frac{x-1}{2}+x<1{,}5x+3{,}5$, $x-1+2x<3x+7$, $0\cdot x<8$. Ответ: $x\in(-\infty;\infty)$.

б) $\frac{5x-2}{3}-\frac{3-x}{2}>1$, $2(5x-2)-(3-x)3>6$, $10x-4-9+3x>6$,

$13x>19$, $x>1\frac{6}{13}$. Ответ: $x\in(1\frac{6}{13};\infty)$.

в) $x-4(3-x)\geq 2x+7$, $x-12+4x-2x\geq 7$, $3x\geq 19$, $x\geq 6\frac{1}{3}$.

Ответ: $x\in[6\frac{1}{3};\infty)$.

г) $3+\frac{2-3x}{4}\leq 2x$, $14-3x\leq 8x$, $11x\geq -14$, $x\geq 1\frac{3}{11}$. Ответ: $x\in[1\frac{3}{11};\infty)$.

134. а) $|4x-3|<5$, $-5<4x-3<5$, $-2<4x<8$, $-\frac{1}{2}<x<2$. Ответ: $x\in(-\frac{1}{2};2)$.

б) $|2x+5|\geq 1$, $\left[\begin{array}{l}2x+5\geq 1,\\ 2x+5\leq -1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x\geq -2,\\ x\leq -3.\end{array}\right.$ Ответ: $x\in(-\infty;-3]\cup[-2;\infty)$.

в) $\frac{|x-7|}{3} \le 2$, $|x-7| \le 6$, $-6 \le x-7 \le 6$, $1 \le x \le 13$.

г) $4|2-x| \le 12$, $|2-x| \le 3$, $-3 \le 2-x \le 3$, $-5 \le -x \le 1$, $-1 \le x \le 5$.

135. а) $\frac{|2x-3|}{x} > 0$, $x > 0$, поскольку $|2x-3| \ge 0$; $2x-3 \ne 0$, $x \ne \frac{3}{2}$.

Ответ: $x \in (0; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$.

б) $\frac{x+2}{|x+4|} \le 0$, $x+2 \le 0$, $x \le -2$, так как $|x+4| \ge 0$, но $x \ne -4$.

Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup (-4, -2]$.

в) $(x-4)|5-3x| < 0$, $x-4 < 0$, $x < 4$, так как $|5-3x| \ge 0$; $5-3x \ne 0$.

$x \ne 1\frac{2}{3}$. Ответ: $x \in (-\infty; 1\frac{2}{3}) \cup (1\frac{2}{3}; 4)$.

г) $|2x+7|(3-x) \le 0$, $3-x \le 0$, $x \ge -3$, так как $|2x+7| \ge 0$ и $x = -3{,}5$.

Ответ: $x \in \{-3{,}5\} \cup [3; +\infty)$.

136. а) $x^2+2x-15=0$, $x_1=-5$, $x_2=3$.

б) $7x^2+5x=0$, $x(7x+5)=0$, $x_1=0$ и $7x+5=0$, $x_2=-\frac{5}{7}$.

в) $(x-3)(x-2)=6(x-3)$, $(x-3)(x-8)=0$, $x_1=3$, $x_2=8$.

г) $x^2-\frac{11x}{6}+\frac{1}{2}=0$, $6x^2-11x+3=0$, $D=121-72=49$, $x_1=\frac{11+7}{12}$,

$x_2=\frac{11-7}{12}$, $x_1=1{,}5$, $x_2=\frac{1}{3}$.

137. а) Если имеется общий корень, то $x^2-ax=x^2-x-3a$, $-ax=-x-3a$, $3a-ax=-x$, $a(3-x)=-x$, $a=\frac{x}{x-3}$. При этом a оба выражения равны нулю: $x^2-\frac{x}{x-3}\cdot x=0$, $x^2\left(1-\frac{1}{x-3}\right)=0$, $x_1=0$ или $x-4=0$, $x_2=4$.

$a_1=0$ или $a_2=4$. Ответ: 0; 4.

б) $x^2-(a-1)x-3=4x^2-(4a+3)x+9$, $3x^2-(4a+3)x+(a-1)x+12=0$,

$3x^2+12=(4a+-a+1)x$, $3a+4=\frac{3x^2+12}{x}=\frac{3x^2-4x+12}{3x}$. При этом a оба выражения равны нулю:

$$x^2-\left(\frac{3x^2-4x+12}{3x}\right)x-3=0,\quad x^2-\frac{1}{3}\left(3x^2-4x+12\right)+x-3=0,$$

$$3x^2-3x^2+4x-12+3x-9=0,\quad 7x-21=0,\quad x=3.$$

$$a=\frac{3\cdot 9-3\cdot 4+12}{3\cdot 3}=3.$$

в) $x^2+ax+8=x^2+x+a,\quad a(x-1)=x-8,\quad a=\dfrac{x-8}{x-1}.$

Но при этом a каждое из данных выражений обращается в ноль так что $x^2+\dfrac{x-8}{x-1}x+8=0,\ x^2(x-1)+(x-8)x+8(x-1)=0,$

$x^3-x^2+x^2-8x+8x-8=0,\quad x^3=8,\quad x=2$. При $x=2$ получим

$a=\dfrac{2-8}{2-1}=-6.$ Ответ: -6.

г) $2x^2+(3a-1)x-3=6x^2-(2a-3)x-1,$
$4x^2-(2a-3)x-(3a-1)x+2=0,$
$(5a-4)x=4x^2+2,$

$5a-4=\dfrac{4x^2+2}{x},\quad a=\dfrac{4x^2+4x+2}{x}.$ При этом a оба значения должны обращаться в ноль; $2x^2+\left(3\cdot\dfrac{4x^2+4x+2}{5x}-1\right)x-3=0,$

$$2x^2+\frac{3}{5}\left(4x^2+4x+2\right)-x-3=0,\quad 10x^2+12x^2+12x+6-5x-15=0,$$

$$22x^2+7x-9=0,\quad D=49+9\cdot 88=841,\quad x_1=\frac{-7\pm\sqrt{841}}{44},\ x_2=\frac{-7\pm 29}{44},$$

$x_1=\dfrac{1}{2}$ или $x_2=-\dfrac{9}{11}$. Тогда $a_1=\dfrac{4\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+2}{5\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{1+2+2}{5\cdot\frac{1}{2}}=2$ или

$$a_2=\frac{4\cdot\frac{81}{121}-4\cdot\frac{9}{11}+2}{-5\cdot\frac{9}{11}}=\frac{4\cdot\frac{81}{121}-4\cdot 9+22}{-5\cdot 9}=\frac{4\cdot 81-14\cdot 11}{-5\cdot 9\cdot 11}=$$

$=\dfrac{2}{5\cdot 99}(77-2\cdot 81)=-\dfrac{2\cdot 85}{5\cdot 99}=-\dfrac{34}{99}.$ Ответ: $2,\ -\dfrac{34}{99}$.

138. а) $D=(k+4)^2-4(k+7)(k-1)=-3k^2-16k+44$, $-3k^2-16k+44=0$,

или $k_1=2$, $k_2=-7\frac{1}{3}$; при $k=1$ также одно решение.

Ответ: $k=2$, $k=-7\frac{1}{3}$ и $k=1$.

б) $9x^2-2x+k-6+kx=0$, $9x^2+(k-2)x+k-6=0$,

$D=(k-2)^2-4(k-6)\cdot 9=k^2-40k+220$,

$k^2-40k+220=0$, $D_1=1600-880=720$, $k_1=\frac{40+\sqrt{720}}{2}$,

$k_1=20+6\sqrt{5}$, $k_2=\frac{40-\sqrt{720}}{2}$, $k_2=20+6\sqrt{5}$.

Ответ: при $k=20+6\sqrt{5}$ и $k=20-6\sqrt{5}$.

в) $D=(2(k-1))^2-4\cdot 3\cdot(2k-5)=4k^2-8k+4-24k+60=4k^2-32k+64$,

$k^2-8k+16=0$, $k=4$; при k=4; при k=2,5 также $x=1$ – один корень.

Ответ: при $k=4$ и $k=2{,}5$.

г) $D=36-4(k-2)\cdot 3k=36-12k^2+24k$, $-12k^2+24k+36=0$,

$k^2-2k-3=0$, $k_1=3$, $k_2=-1$; при $k=0$ – одно решение.

Ответ: при $k=-1$, $k=3$ и $k=0$.

139. а) $x_1+x_2=\frac{5}{3}$; б) $x_1\cdot x_2=-\frac{2}{3}$;

в) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=\left(\frac{5}{3}\right)^2+\frac{2\cdot 2}{3}=\frac{25}{9}+\frac{4}{3}=\frac{37}{9}=4\frac{1}{9}$;

г) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1\cdot x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1\cdot x_2)=$

$=\frac{5}{3}\cdot\left(4\frac{1}{9}+\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{37+6}{9}\right)=\frac{5\cdot 43}{3\cdot 9}=\frac{215}{27}$.

140. а) $\frac{6x-x^2-6}{x-1}-\frac{2x-3}{x-1}=1$, $x\neq 1$, $6x-x^2-6-2x+3-x+1=0$,

$-x^2+3x-2=0$, $x^2-3x+2=0$, $x_1=2$, $x_2=1$ – не удовлетворяется.

б) $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$, $x\neq 0$, $x\neq -\frac{1}{2}$, $(2x+1)^2+4x^2-5x(2x+1)=0$,

$4x^2+4x+1+4x^2-10x^2-5x=0,\quad 2x^2+x-1=0,$

$x_1=-1,\ x_2=\dfrac{1}{2}.$ Ответ: 0,5; –1.

в) $\dfrac{2}{x^2+5x}+\dfrac{3}{2x-10}=\dfrac{5}{x^2-25},\quad x\neq 0,\quad x\neq 5,\quad x\neq -5,$

$\dfrac{4(x-5)+3x(x+5)-30x}{2x(x^2-25)}=0,$

$4x-20+3x^2+15x-30x=0.\quad 3x^2-11x-20=0,\quad x_1=-\dfrac{4}{3},\ x_2=5-$ при

x_2 условие лишено смысла. Ответ: $-\dfrac{4}{3}$.

г) $\dfrac{14}{x^2-4}+\dfrac{3}{(2-x)^2}=\dfrac{5}{(x+2)^2},\ x\neq 2,\ x\neq -2.\ \dfrac{14}{x^2-4}+\dfrac{3}{(x-2)^2}-\dfrac{5}{(x+2)^2}=0,$

$14(x+2)(x-2)+3(x+2)^2-5(x-2)^2=0.$

$14x^2-56+3x^2+12x+12-5x^2+20x-20=0;$

$3x^2+8x-16=0,\quad x_1=-4,\ x_2=1\dfrac{1}{3}.$

141. а) $\dfrac{4}{x^2+4}+\dfrac{5}{x^2+5}=2,\ 4(x^2+5)+5(x^2+4)-2(x^2+4)(x^2+5)=0,$

$4x^2+20+5x^2+20-2x^4-18x^2-40=0.\quad -2x^4-9x^2=0,\ x=0;$

б) $2x^4-5x^2+2=0.$

$x^2=2$ или $x^2=\dfrac{1}{2}, x_1=\sqrt{2}, x_2=-\sqrt{2}, x_3=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x_4=-\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

в) $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2-3\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+2=0,\ x\neq 0.$ Пусть $\dfrac{x-1}{x}=y,$ тогда

$y^2-3y+2=0.\ y_1=2,\ y_2=1,\ \dfrac{x_1-1}{x_1}=2,\ \dfrac{x_2-1}{x_2}=1,\ x_1-1-2x_1=0,$

$x_1=-1;\ x_2-1=x_2-$ корней нет;

г) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=2.5,\quad x\neq 0.$ Пусть $\dfrac{x^2+1}{x}=y,\ y\neq 0,$

$y+\dfrac{1}{y}-\dfrac{5}{2}=0\quad 2y^2-5y+2=0.\ y_1=2.\ y_2=\dfrac{1}{2},$

$\frac{x_1^2+1}{x_1}=2,\ \frac{x_2^2+1}{x_2}=\frac{1}{2},\ \ x_1^2-2x_1+1=0,\ x_1=1;$

$2x_2^2-x_2+2=0$ – корней нет. Ответ: 1.

142. а) $2x^2+6x+17>0,\ 2x^2+6x+17=0,\ D<0$, так как

$a=2>0$ и $D<0$, то $2x^2+6x+7>0$ при всех x. Ответ: $x\in(-\infty;\infty)$.

б) $x^2-3{,}2x<0,\ x^2-3{,}2x=0,\ x(x-3{,}2)=0,\ x_1=0,\ x_2=3{,}2;\ x^2-3{,}2x<0$ при $0<x<3{,}2$;

в) $(3x-2)^2-4x(2x-3)\ge 0,\ 9x^2-12x+4-8x^2+12x\ge 0,\ x^2+4\ge 0$

при любом x. Ответ: $x\in(-\infty;\infty)$.

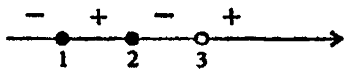
г) $(6x-1)(1+6x)+14<7x(2+5x),\ 36x^2-1+14-14x-35x^2<0,$

$x^2-14x+13<0;\ x^2-14x+13=0,\ x_1=1,\ x_2=13;\ x^2-14x+13<0$ при $1<x<13$.

143.

а) $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)}\ge 0;\ y(-2)<0,\ y\left(\frac{1}{2}\right)>0,$

$y\left(\frac{5}{2}\right)<0,\ y(4)>0.$



Ответ: $x\in[1;2]\cup(3;\infty)$.

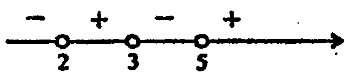
б) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8}\le 0;\ \frac{(x-1)(x+3)}{(x^2-2x+8)}\le 0,\ \ x^2-2x+8>0$ при любом x,

$(x-1)(x+3)\le 0,\ \ -3\le x\le 1.$

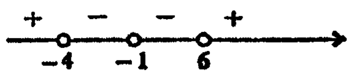
Ответ: $x\in[-3;1]$.

в) $\frac{x-2}{(x-3)(x-5)}<0;\ (x-2)(x-3)(x-5)<0.$

Ответ: $x\in(-\infty;2)\cup(3;5)$.



г) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}>0;$



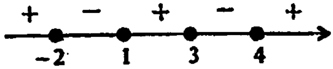
$\frac{(x+1)(x+4)}{(x-6)(x+1)}>0,\ \ (x+1)^2(x+4)(x-6)>0.$

Ответ: $x\in(-\infty;-4)\cup(6;\infty)$.

144.

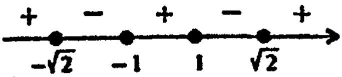
а) $(x-1)(x+2)(x-3)(x-4) \le 0$.

Ответ: $x \in [-2; 1] \cup [3; 4]$.



б) $x^4-3x^2+2 \le 0$; $x^4-3x^2+2=0$,

$x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=\sqrt{2}$, $x_4=-\sqrt{2}$;



$(x+1)(x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \le 0$. $x \in [-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}]$.

в) $\dfrac{4-x}{x-5} > \dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{(4-x)(1-x)-(x-5)}{(x-5)(1-x)} > 0$,

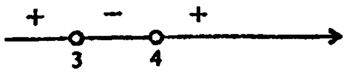
$\dfrac{4-5x+x^2-x+5}{(x-5)(1-x)} > 0$, $\dfrac{x^2-6x+9}{(x-5)(1-x)} > 0$, $\dfrac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0$,

$(x-3)^2 > 0$ при $x \ne 3$, $(x-5)(1-x) > 0$ при $1 < x < 5$.

Ответ: $x \in (1; 3) \cup (3; 5)$.

г) $1+\dfrac{12}{x^2} < \dfrac{7}{x}$. $x \ne 0$, $\dfrac{x^2+12-7x}{x^2} < 0$, $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2} < 0$,

$\dfrac{(x-3)(x-4)}{x^2} < 0$, $(x-3)(x-4) \cdot x^2 < 0$, $x^2 > 0$ при $x \ne 0$.



Ответ: $x \in (3; 4)$.

145.

а) $m+\dfrac{4}{m}-4=\dfrac{m^2-4m+4}{m}=\dfrac{(m-2)^2}{m}$, при $m>0$ выражение больше нуля.

б) $\dfrac{2m}{1+m^2}-1=\dfrac{2m-1-m^2}{1+m^2}=-\dfrac{(m-1)^2}{1+m^2}$, эта разность при всех m неположительна, значит, $\dfrac{2m}{1+m^2} \le 1$ при любых m;

в) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2=\dfrac{a^2-2ab+b^2}{ab}=\dfrac{(a-b)^2}{ab}$, при $a>0$ и $b>0$ эта разность неотрицательна, значит, $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \ge 2$;

г) $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+c}{b+c}=\dfrac{ab+ac-ab-bc}{b(b+c)}=\dfrac{c(a-b)}{b(b+c)}$. Эта разность при $a>0$, $b>0$, $c>0$ и $a<b$ отрицательна. Таким образом $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+c}$.

12. Иррациональные уравнения и неравенства

146. а) $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1;$ $x^2+2x+10>0$ при любых x $D<0;$

$2x-1\geq 0,\ x\geq\frac{1}{2};$ $x^2+2x+10=(2x-1)^2,\ x^2+2x+10-4x^2+4x-1=0,$

$3x^2-6x-9=0,\ x^2-2x-3=0,\ x_1=3,\ x_2=-1$ – не удовлетворяет условию $x=\frac{1}{2}$. Ответ: 3.

б) $\sqrt{x^2-16}=x^2-22;$ $\begin{cases}x^2-16\geq 0,\\ x^2-22\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}|x|\geq 4,\\ |x|\geq\sqrt{22};\end{cases}$

$x^2-16=(x^2-22)^2,\ x^2-16=x^4-44x^2+484,\ x^4-45x^2+500=0,$

$x^2=25$ или $x^2=20,\ x_1=5,\ x_2=-5,\ x_3=-2\sqrt{5},\ x_4=2\sqrt{5};$

x_3, x_4 не удовлетворяют условию $|x|\geq\sqrt{22}$.

в) $\sqrt{17+2x-3x^2}=x+1;$ $\begin{cases}x+1\geq 0,\\ -3x^2+2x+17\geq 0;\end{cases}$

$17+2x-3x^2=x^2+2x+1,\ 4x^2-16=0,\ x=2,\ x=-2$ – не удовлетворяют условию.

г) $\sqrt{x^2+9}=x^2-11;$ $x^2-11\geq 0, x\leq-\sqrt{11}$ или $x\geq\sqrt{11};$

$x^2+9=x^4-22x^2+121, x^4-23x^2+112=0,\ x_1=4, x_2=-4,\ x_3=-\sqrt{7},$

$x_4=\sqrt{7}$, x_3, x_4 не удовлетворяют условиям.

147. а) $\sqrt{x+17}-\sqrt{x-7}=4;$ $\begin{cases}x+17\geq 0,\\ x-7\geq 0;\end{cases}$ $x\geq 7;$

$x+17-2\sqrt{(x+17)(x-7)}+x-7=16,\ 2x-6-2\sqrt{(x+17)(x-7)}=0,$

$\sqrt{(x+17)(x-7)}=x-3,\ (x+17)(x-7)=x^2-6x+9,$

$x^2-7x+17x-119-9+6x-x^2=0,\ 16x=128,\ x=8.$ Ответ: 8.

б) $2\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}=3;$ $x-1\geq 0,\ x\geq 1$. Пусть $\sqrt[4]{x-1}=y$, тогда

$2y^2+y-3=0, y_1=1, y_2=-\frac{3}{2};$ $\sqrt[4]{x-1}=1,\ x-1=1,\ x=2;$ или $\sqrt[4]{x-1}=$

$=-\frac{3}{2}$ – не имеет смысла.

в) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9;$ $\begin{cases}x+7\geq 0,\\ x-2\geq 0;\end{cases}$ $x+7+2\sqrt{(x+7)(x-2)}+x-2=81,$

$2x+5+2\sqrt{(x+7)(x-2)}=81,\ 2\sqrt{(x+7)(x-2)}=76-2x,$

$\sqrt{(x+7)(x-2)}=38-x,\ x<38,\ (x+7)(x-2)=1444-76x+x^2,$

$x^2-2x+7x-14=1444-76x+x^2,\ 81x=1458,\ x=18.$ Ответ: 18.

г) $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[6]{x+1}=6;\ x+1\geq 0,\ x\geq -1$. Пусть $\sqrt[6]{x+1}=y$, тогда

$2y^2-y-6=0,\ y_1=-1\frac{1}{2},\ y_2=2;\ \sqrt[6]{x+1}=2$ или $\sqrt[6]{x+1}=-1\frac{1}{2}$ – не имеет смысла. $x+1=64,\ x=63.$ Ответ: 63.

148. а) $\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{2+x}}+\sqrt{2+x}=0;\ \begin{cases}x\geq 0,\\2+x\geq 0;\end{cases}\ x\geq 0;$

$\sqrt{x(2+x)}-4+2+x=0,\ \sqrt{x(2+x)}=2-x,\ x\leq 2,\ 8x+x^2=4-4x+x^2,$

$6x=4,\ x=\frac{2}{3}.$

б) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-2=0;\ x\geq 0$. Пусть $\sqrt[4]{x}=y$, тогда $y^2+y-2=0,$

$y_1=-2,\ y_2=1;\ \sqrt[4]{x_1}=-2$ – не имеет смысла. $\sqrt[4]{x_2}=1,\ x_2=1;$

в) $\frac{x-\sqrt{x+5}}{x+\sqrt{x+5}}=\frac{1}{7};\ x+5\geq 0,\ x\geq -5;\ 7x-7\sqrt{x+5}=x+\sqrt{x+5},$

$6x=8\sqrt{x+5},\ 36x^2=64(x+5),\ 36x^2=64x+320,\ 9x^2-16x-80=0,$

$x_1=4,\ x_2=-\frac{20}{9},\ x_2=-2\frac{2}{9}$ Ответ: $4;\ -2\frac{2}{9}$.

г) $\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt{3x+1}=0;\ 3x+1\geq 0,\ x\geq -\frac{1}{3},\ \sqrt[6]{(3x+1)^2}-\sqrt[6]{(3x+1)^3}=0;$

$\sqrt[6]{(3x+1)^2}\left(1-\sqrt[6]{3x+1}\right)=0,\ \sqrt[3]{3x+1}=0$ или $1-\sqrt[6]{3x+1}=0,$

$3x+1=0,\ \sqrt[6]{3x+1}=1,\ x=-\frac{1}{3};\ 3x+1=1,\ x=0.$ Ответ: $-\frac{1}{3};\ 0.$

149. а) $\sqrt{225+x^2}=x^2-47;\ x^2-47\geq 0,\ x^2\geq 47,\ x\leq -\sqrt{47}$ или $x\geq\sqrt{47}$; $225+x^2=x^4-94x^2+2209,\ x^4-95x^2+1984=0.$ Пусть $x^2=y$, тогда $y^2-95y+1984=0,\ y_1=64,\ y_2=31;\ x^2=64$ или $x^2=31,$ $x_1=8,\ x_2=-8,\ x_3=\sqrt{31}$ – не удовлетворяет условиям, $x_4=-\sqrt{31}$ – не удовлетворяет условиям. Ответ: –8; 8.

б) $\sqrt[3]{x-2}=x-2,\ \sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{(x-2)^3}=0,\ \sqrt[3]{x-2}\left(1-\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)=0.;$

$\sqrt[3]{x-2}=0$ или $1-\sqrt[3]{(x-2)^2}=0,\ x_1=2,\ \sqrt[3]{(x-2)^2}=1,$

$x-2=\pm 1,\ x_2=3, x_3=1.$ Ответ: 2; 3; 1.

в) $\sqrt{x^2+36}=x^2-54$; $x^2-54\ge 0$, $x<-\sqrt{54}$ или $x>\sqrt{54}$,
$x^4-109x^2+2880=0$. Тогда $x^2=y$, тогда $y^2-109y+2880=0$,
$y_1=64$, $y_2=45$; $x^2=64$ и $x^2=45$, $x_1=8$, $x_2=-8$,

$x_3=3\sqrt{5}$ и $x_4=-3\sqrt{5}$ – не удовлетворяют условиям.

г) $\sqrt[3]{x^3-5x^2+16x-5}=x-2$, $x-5x^2+16x-5=x^3-6x^2+12x-8$

$x^2+4x+3=0$, $x_1=-1$, $x_2=-3$.

50. а) $\sqrt{x^2-5}\ge 2$, $x^2-5\ge 4$, $x^2\ge 9$, $x^5\le -3$ или $x\ge 3$

Ответ: $x\in(-\infty;-3]\cup[3;\infty)$.

б) $\sqrt{(x-2)(1-2x)}>-1$, $\sqrt{(x-2)(1-2x)}\ge 0$, $(x-2)(1-2x)\ge 0$,
$x\in[0{,}5;2]$. Ответ: $x\in[0{,}5;2]$

в) $\sqrt{x^2-16}\ge 1$, $x^2-16\ge 1$, $x^2\ge 16$, $x\le -\sqrt{17}$ или $x\ge\sqrt{17}$.
Ответ: $x\in(-\infty;-\sqrt{17}]\cup[\sqrt{17};\infty)$.

г) $(\sqrt{x}-3)(x^2+1)>0$, $x^2+1>0$, $\sqrt{x}-3>0$, $\sqrt{x}-3>0$,
$\sqrt{x}>3$, $x>9$. Ответ: $x\in(9;\infty)$.

51. а) $\sqrt{x^2-6x+9}>3$, $\sqrt{(x-3)^2}>3$, $|x-3|>3$, $x-3>3$ и

$x-3<-3$, $x>6$, $x<0$. Ответ: $x\in(-\infty;0)\cup(6;\infty)$.

б) $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{2x^2+x+1}\ge 0$, $2x^2+x+1>0$; $(D<0)$, $\sqrt{x^2-2x+3}\ge 0$,
$x^2-2x+3\ge 0$, $D<0$, x – произвольное. Ответ: $x\in(-\infty;\infty)$.

в) $\sqrt{25-20x+4x^2}\le 1$, $\begin{cases}25-20x+4x^2\ge 0,\\ 25-20x+4x^2\le 1;\end{cases}$ $\begin{cases}(5-2x)^2\ge 0,\\ (5-2x)^2\le 1;\end{cases}$

$-1\le 5-2x\le 1$, $2\le x\le 3$. Ответ: $x\in[2;3]$.

г) $\sqrt{2x-x^2+15}(3x+x^2-4)\le 0$, $\sqrt{2x-x^2+15}(-x^2+3x-4)\le 0$,

$-x^2+3x-4<0$; $(D<0)$, $\sqrt{2x-x^2+15}\ge 0$, $-x^2+2x+15\ge 0$,
$x^2-2x-15=0$, $x_1=5$, $x_2=-3$, $x\in[-3;5]$. Ответ: $x\in[-3;5]$.

13. Тригонометрические уравнения и неравенства

152. а) $\cos x + 2\cos 2x = 1$,

$2\cos^2 x + \cos x - 2(1-\cos^2 x) - 1 = 0$,

$2\cos^2 x + \cos x - 2 + 2\cos^2 x - 1 = 0$, $4\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$.

$\cos = y$, $4y^2 + y - 3 = 0$, $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{3}{4}$; $\cos x_1 = -1$,

$\cos x_2 = \frac{3}{4}$, $x_1 = -\pi + 2\pi n$, $n \in Z$, $x_2 = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $-\pi + 2\pi n$, $n \in Z$; $\pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

б) $4\sin 2x - 3\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 5$, $4\sin 2x + 3\sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = 5$, $4\sin 2x + 3\cos 2x = 5$,

$8\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x - 3\sin^2 x - 5\sin^2 x - 5\cos^2 x = 0$, $\cos \neq 0$,

$8\text{tg}^2 - x8\text{tg}x + 2 = 0$, $\text{tg}x = y$, $8y^2 - 8y + 2 = 0$,

$4y^2 - 4y + 1 = 0$, $(2y-1)^2 = 0$, $2y = 1$, $y = \frac{1}{2}$; $x = \text{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\text{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

в) $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$, $2\cos^2 x + 4\cos x - 3(1-\cos^2 x) = 0$,

$2\cos^2 x + 3\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$, $5\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$. $\cos x = y$,

$5y^2 + 4y - 3 = 0$, $D = 16 + 60 = 76$, $x_1 = \frac{-2+\sqrt{19}}{5}$,

$x_2 = \frac{-2-\sqrt{19}}{5}$, $\cos x = \frac{-2+\sqrt{19}}{5}$; $x = \pm\arccos\left(\frac{-2+\sqrt{19}}{5}\right) + 2\pi n$, $n \in Z$;

$\cos x = \frac{-2-\sqrt{19}}{5} < -1$ – не имеет смысла.

Ответ: $\pm\arccos\left(\frac{-2+\sqrt{19}}{5}\right) + 2\pi n$, $n \in Z$.

г) $\cos^2 x + 4\sin^2 x = 2\sin 2x$, $\cos^2 x + 4\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x = 0$,

$\cos x \neq 0$, $1 + 4\text{tg}^2 x - 4\text{tg}x = 0$, $4\text{tg}^2 x - 4\text{tg}x + 1 = 0$, $(2\text{tg}x - 1)^2 = 0$,

$2\text{tg}x - 1 = 0$, $2\text{tg}x = 0$, $\text{tg}x = \frac{1}{2}$, $x = \text{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\text{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

153. а) $\sin^3 x-\cos^3 x=1+\frac{\sin 2x}{2}$, $(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x)=$

$=1+\sin x\cdot\cos x$, $(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cdot\cos x)-(1+\sin x\cdot\cos x)=0$,

$(1+\sin x\cdot\cos x)\cdot(\sin x-\cos x-1)=0$, $1+\sin x\cdot\cos x=0$ и

$\sin x-\cos x-1=0$. $\frac{1}{2}\sin 2x=-1$, $\sin x-\cos x=1$, $\sin 2x=-2$ – не

имеет смысла; $\sin x=1+\cos x \sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=1$,

$2\sin x\cos x=0$, $\sin x=0$ или $\cos x=0$, $\sin x\ge 0$, $\cos x\le 0$,

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$. Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$.

б) $\cos(\frac{\pi}{4}+x)+\cos(\frac{\pi}{4}-x)=1$, ,

$2\cos(\frac{\pi}{4})\cos x=1$. $\sqrt{2}\cos x=1$, $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\ge 0, \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$,

$x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$;

в) $\cos^4 x-\sin^4 x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $2x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$, $x=\pm\frac{\pi}{12}+\pi n$, $n\in Z$

г) $\sin(\frac{\pi}{6}+x)-\sin(\frac{\pi}{6}-x)=1$, $2\sin\frac{\frac{\pi}{6}+x-\frac{\pi}{6}+x}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{6}+x+\frac{\pi}{6}-x}{2}=1$,

$2\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}=1$, $2\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1$, $\sqrt{3}\sin x=1$, $x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi k$, $k\in Z$

154. а) $\cos 4x+2\cos^2 x=1$, $\cos^2 2x-\sin^2 2x+1+\cos 2x=1$,

$2\cos^2 2x-1+2x+\cos 2x=0$; $\cos 2x=y$,

$2y^2+y-1=0$. $y_1=-1$, $y_2=\frac{1}{2}$; $\cos 2x=-1$ или $\cos 2x=\frac{1}{2}$,

$2x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$. $2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$;

$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$

б) $4(1+\cos x)=3\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$, $4\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}-3\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0$,

$\cos\frac{x}{2}(8\cos\frac{x}{2}-3\sin^2\frac{x}{2})=0$. $\cos\frac{x}{2}=0$, $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, $x_1=\pi+2\pi k$, $k\in Z$;

$8\cos\frac{x}{2}-3+3\cos^2\frac{x}{2}=0$; $\cos\frac{x}{2}=y$,

$3y^2+8y-3=0$, $y_1=-3$, $y_2=\frac{1}{3}$; $\cos\frac{x}{2}=-3$ – не имеет смысла;

$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$; $\frac{x}{2}=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $x=\pm 2\arccos\frac{1}{3}+4\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $\pi+2\pi k$, $k\in Z$; $\pm 2\arccos\frac{1}{3}+4\pi n$, $n\in Z$.

в) $\cos 3x+\sin x\cdot\sin 2x=0$, $\cos 3x+\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)=0$,

$\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\cos 3x=0$, $\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x=0$, $\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)=0$,

$\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2x\cdot\cos x=0$, $\cos 2x=0$ или $\cos x=0$, $2x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$,

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$.

г) $4(1-\cos x)=3\sin\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}$, $4\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}-3\sin\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}=0$,

$\sin\frac{x}{2}(8\sin\frac{x}{2}-3\cos^2\frac{x}{2})=0$.

1) $\sin\frac{x}{2}=0$, $\frac{x}{2}=\pi n$, $n\in Z$, $x=2\pi n$, $n\in Z$;

2) $8\sin\frac{x}{2}-3\cos^2\frac{x}{2}=0$, $8\sin\frac{x}{2}-3+3\sin^2\frac{x}{2}=0$;

$\sin\frac{x}{2}=y$, $3y^2+8y-3=0$, $y_1=-3$, $y_2=\frac{1}{3}$; $\sin\frac{x}{2}=-3$ – не имеет смысла;

$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$, $\frac{x}{2}=(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\pi k$, $k\in Z$, $x=2\cdot(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

Ответ: $2\pi n$, $n\in Z$; $2\cdot(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

155. а) $\cos 2x-\cos 6x=0$, $-2\sin\left(\frac{-4x}{2}\right)\cdot\sin\frac{8x}{2}=0$, $2\sin 2x\cdot\sin 4x=0$,

$\sin 2x=0$ или $\sin 4x=0$, $2x=\pi k$, $4x=\pi n$, $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$, $x=\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$;

б) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$, $2\sin\frac{4x}{2}\cdot\cos x+\sin 2x=0$,

$2\sin 2x\cdot\cos x+\sin 2x=0$, $\sin 2x(2\cos x+1)=0$, $\sin 2x=0$ и

$2\cos x+1=0$, $2x=\pi k$, $\cos x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$

Ответ: $\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

в) $\sin x+\sin 3x=0$, $2\sin 2x\cos x=0$, $\sin 2x=0$ или $\cos x=0$,

$2x=\pi n$, $n\in Z$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, значит, $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$;

г) $\cos(\frac{\pi}{2}+5x)+\sin x=2\cos 3x$, $-\sin 5x+\sin x-2\cos 3x=0$,

$\sin x-\sin 5x-2\cos 3x=0$, $-2\sin 2x\cdot\cos 3x-2\cos 3x=0$,

$-2\cos 3x(\sin 2x+1)=0$, $\cos 3x=0$ и $\sin 2x=-1$, $3x=\frac{\pi}{2}+\pi n$,

$n\in Z$. $2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$; $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$

56. а) $\frac{6}{\text{ctg}x+2}=3-\text{ctg}x$; $\begin{cases}x\neq\pi n, & n\in Z,\\ x\neq\text{arcctg}(-2)+\pi n;\end{cases}$ $6=3\text{ctg}x-\text{ctg}^2x+6-2\text{ctg}x$,

$\text{ctg}^2x-\text{ctg}x=0$, $\text{ctg}x(\text{ctg}x-1)=0$, $\text{ctg}x=0$ и $\text{ctg}x-1=0$,

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; $\text{ctg}x=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

б) $1+2\cos 3x\cdot\cos x-\cos 2x=0$, $1+\cos 2x+\cos 4x-\cos 2x=0$,

$\cos 4x=-1$, $4x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

в) $\frac{15}{\sin x+1}=11-2\sin x$; $\sin x\neq-1$, $x\neq-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$;

$15=11\sin x+11-2\sin^2x-2\sin x$; $\sin x=y$,

$2y^2-9y+4=0$, $y_1=4$, $y_2=\frac{1}{2}$; $\sin x=4$ – не имеет смысла;

$\sin x=\frac{1}{2}$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. Ответ: $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

г) $\operatorname{ctg} x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$; $\begin{cases} x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \\ \cos x\neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \\ x\neq \pi+2\pi n, \ n\in Z; \end{cases}$

$\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}-2=0$, $\cos x+\cos^2 x+\sin^2-2\sin x(1+\cos x)=0$,

$\cos x+1-2\sin x-2\sin x\cdot\cos x=0$, $(\cos x+1)-2\sin x(1+\cos x)=0$,

$(\cos x+1)(1-2\sin x)=0$, $\cos x=-1$ или $2\sin x=1$, $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$ – не удовлетворяет условиям; $\sin x=\frac{1}{2}$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

157. а) $\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}x=0$; $\begin{cases} 3x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \ n\in Z, \\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \ n\in Z; \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, \ n\in Z. \\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \ n\in Z; \end{cases}$

$\frac{\sin 2x}{\cos 3x\cdot\cos x}=0$, $\sin 2x=0$, $2x=\pi n$, $n\in Z$, $x=\frac{\pi n}{2}$. Ответ: $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

б) $\operatorname{tg}x-\sin x=2\sin^2\frac{x}{2}$; $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; $\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x=1-\cos x$,

$\sin x-\cos x\cdot\sin x-\cos x+\cos^2 x=0$,

$\sin x(1-\cos x)-\cos x(1-\cos x)=0$, $(1-\cos x)(\sin x-\cos x)=0$,

$1-\cos x=0$ и $\sin x-\cos x=0$, $\cos x=1$, $x=2\pi n$, $n\in Z$; разделим на $\cos x\neq 0$,

$\operatorname{tg}x-1=0$, $\operatorname{tg}x=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. Ответ: $2\pi n$, $n\in Z$; $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$.

в) $\sin x\cdot\operatorname{tg}x=\cos x+\operatorname{tg}x$; $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; $\sin x\cdot\operatorname{tg}x-\cos x-\operatorname{tg}x=0$;

$\frac{\sin^2 x}{\cos x}-\cos x-\frac{\sin x}{\cos x}=0$, $\sin^2 x-\cos^2 x-\sin x=0$, $\sin^2 x-1+\sin^2 x-\sin x=0$.

$\sin x=y$, $2y^2-y-1=0$, $y_1=1$, $y_2=-\frac{1}{2}$; $\sin x=1$ и

$\sin x=-\frac{1}{2}$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$ · не удовлетворяет условиям;

$x=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi k$, $k\in Z$.

г) $\sin x+\sin 2x=\operatorname{tg}x$, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; $\sin x+2\sin x\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}$,

$\sin x\cos x+2\sin x\cos^2 x-\sin x=0$, $\sin x(\cos x+2\cos^2 x-1)=0$,

$\sin x=0$, $x=\pi k$, $k\in Z$;

$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; $y = \cos x$, $2y^2 + y - 1 = 0$, $D = 9$,

$y_1 = -1$, $y_2 = \frac{1}{2}$, $\cos x = -1$, $x_1 = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, $\cos x = \frac{1}{2}$,

$x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. Ответ: $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

158. а) $\arccos\frac{1+2x}{3} = \frac{2\pi}{3}$, $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, значит $\frac{1+2x}{3} = -\frac{1}{2}$,

$2 + 4x = -3$, $x = -\frac{5}{4}$, $x = -1\frac{1}{4}$.

б) $\operatorname{arctg}(2x - 1) = -\frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, то $2x-1=-1$, $2x = 0$, $x = 0$;

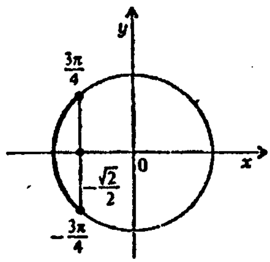
в) $\arcsin\frac{x+2}{4} = -\frac{\pi}{3}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\frac{x+2}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$2x + 4 = -4\sqrt{3}$, $2x = -4\sqrt{3} - 4$, $x = -2\sqrt{3} - 2$;

г) $\operatorname{arctg}(2 - 3x) = \frac{3\pi}{4}$

нет решений, поскольку $\frac{3\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

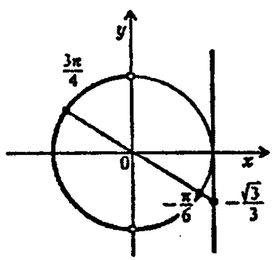
159.



а) $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\cos \le \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $x \in [-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n]$, $n \in Z$.



б) $\sqrt{3}\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) \ge -1$, $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) \ge -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$-\frac{\pi}{6} + \pi n \le \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2} + \pi n$,

$-\frac{\pi}{4} - \pi n < x \le \frac{5\pi}{12} - \pi n$, $n \in Z$.

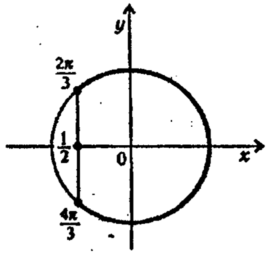
Ответ: $x \in (-\frac{\pi}{4} - \pi n; \frac{5\pi}{12} - \pi n]$, $n \in Z$.

в) $\sin 2x \cdot \sin\frac{x}{2} - \cos 2x \cos\frac{x}{2} > \frac{1}{2}$, $-\cos(2x + \frac{x}{2}) > \frac{1}{2}$,

$-\cos(2{,}5x) > \frac{1}{2}$, $\cos 2{,}5x < -\frac{1}{2}$.

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < 2{,}5x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

$\frac{4\pi}{15} + \frac{4\pi n}{5} < x < \frac{8\pi}{15} + \frac{4\pi n}{5}$, $n \in Z$;

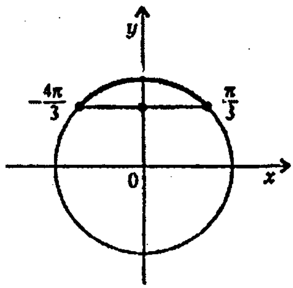


г) $\sin 3x \cos x + \sin x \cos 3x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 4x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n \le 4x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$,

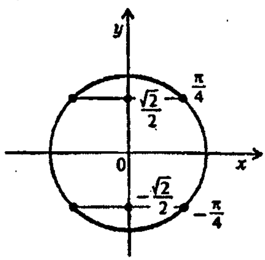
$-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2} \le x \le \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.



160. а) $2\sin^2 x \le 1$, $\sin^2 x \le \frac{1}{2}$,

$-\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{\pi}{4} + \pi n \le x \le \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

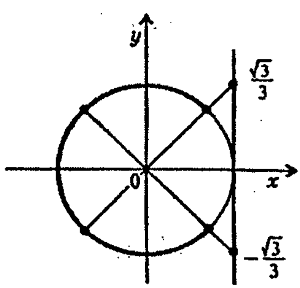


б) $3\mathrm{tg}^2 2x \le 1$, $\mathrm{tg}^2 2x \le \frac{1}{3}$,

$-\frac{\sqrt{3}}{3} \le \mathrm{tg}^2 2x \le \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$-\frac{\pi}{6} + \pi n \le 2x \le \frac{\pi}{6} + \pi n$,

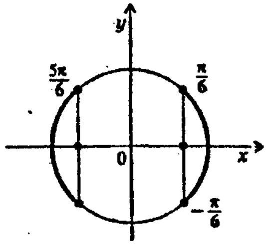
$-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \le x \le \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$,



в) $4\cos^2 x \le 3$, $\cos^2 x \le \frac{3}{4}$,

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \le \cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\frac{\pi}{6} + \pi n \le x \le \frac{5\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$



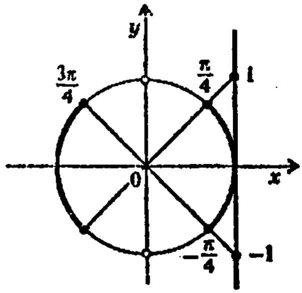
г) $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 1 \ge 0$, $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \ge 1$, $\operatorname{tg} x \le -1$ и

$\operatorname{tg} x \ge 1$ $\frac{\pi}{4} + \pi n \le \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x < \pi + 2\pi n,\ n \in Z$;

$\frac{\pi}{2} + \pi n < \frac{x}{2} \le \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$,

$\pi + 2\pi n < x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$



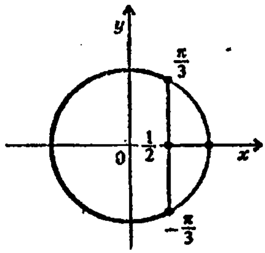
Ответ. $x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n) \cup (\pi + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n],\ n \in Z$.

161.

а) $|\cos x - 1| \le 0{,}5$, $-\frac{1}{2} \le \cos x - 1 \le \frac{1}{2}$,

$0.5 \le \cos x \le 1{,}5$, $0{,}5 \le \cos x \le 1$;

$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$;

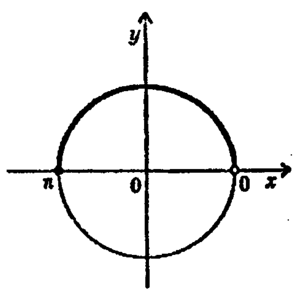


б) $\sin x < \cos x$, $\sin x - \cos x < 0$.

$\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) < 0$, $\sin(x - \frac{\pi}{4}) < 0$;

$-\pi + 2\pi n < x - \frac{\pi}{4} < 2\pi n,\ n \in Z$,

$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$;

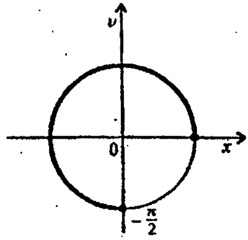


в) $|\sin 2x+\frac{1}{2}|\le\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}\le \sin 2x+\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$,

$-1\le\sin 2x\le 0$; $-\pi+2\pi n\le 2x\le 2\pi n$, $n\in Z$,

$-\frac{\pi}{2}+\pi n\le x\le \pi n$, $n\in Z$

Ответ: $x\in[-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n]$, $n\in Z$



г) $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x>0$, $\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}>0$, $\frac{\operatorname{tg}^2x+1}{\operatorname{tg}x}>0$, $\operatorname{tg}^2x+1>0$ – при всех x;

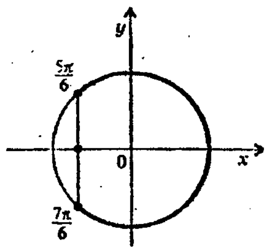
$\operatorname{tg}x>0$, $\pi<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. Ответ: $x\in(\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n)$, $n\in Z$

162. а) $\sin x-\sqrt{3}\cos x>\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$-\cos(\frac{\pi}{6}+x)>\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{6}+x)>-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\frac{5\pi}{6}+2\pi n<\frac{\pi}{6}+x<\frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$,

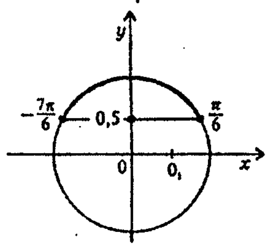
$\frac{2\pi}{3}+2\pi n<x<\pi+2\pi n$, $n\in Z$;



б) $\log_{0,5}\sin x>1$, $\log_{0,5}\sin x>\log_{0,5}0{,}5$;

$y=\log_{0,5}t$ – убывает, $\sin x<0{,}5$.

Ответ: $x\in(-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n)$, $n\in Z$

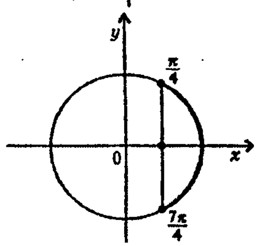


в) $\sin x+\cos x<1$,

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$,

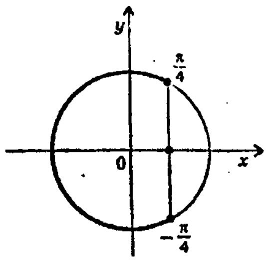
$\cos(x-\frac{\pi}{4})<\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\frac{\pi}{4}+2\pi n<x-\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$,



$\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<2\pi+2\pi n$, $n\in Z$. Ответ: $x\in(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n)$, $n\in Z$

г)



$\log_{\sqrt{2}}\cos x > -1$. $\log_{\sqrt{2}}\cos x > \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$y = \log_{\sqrt{2}} t$ – возрастает, $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ. $x \in (-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n)$. $n \in Z$

14. Показательные уравнения и неравенства

163. а) $(0{,}2)^{x^2-16x-37{,}5} = 5\sqrt{5}$, $5^{-x^2+16x+37{,}5} = 5\sqrt{5}$,

$-x^2 + 16x + 37{,}5 = 1{,}5$, $x^2 - 16x - 36 = 0$, $x_1 = 18$, $x_2 = -2$;

б) $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0{,}01 \cdot (10^{x-1})^3$, $10^{x^2-3} = 10^{-2} \cdot 10^{3x-3}$,

$10^{x^2-3} = 10^{-2+3x-3}$, $x^2 - 3 = 3x - 5$, $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$,

в) $2^{x^2-6x+0{,}5} = \frac{1}{16\sqrt{2}}$, $2^{x^2-6x+0{,}5} = 2^{-4{,}5}$, $x^2 - 6x + 0{,}5 = -4{,}5$,

$x^2 - 6x + 5 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$;

г) $\frac{6^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{3^{-15}}{6^{12-12x}}$, $6^{x^2} \cdot 6^{12-12x} = 2^{-15} \cdot 3^{-15}$, $6^{x^2-12x+12} = 6^{-15}$,

$x^2 - 12x + 12 = -15$, $x^2 - 12x + 27 = 0$. $x_1 = 3$, $x_2 = 9$.

164. а) $5^{3x} - 2 \cdot 5^{3x-1} - 3 \cdot 5^{3x-2} = 60$, $5^{3x} - \frac{2}{5} \cdot 5^{3x} - \frac{3}{25} \cdot 5^{3x} = 60$,

$5^{3x}(1 - \frac{2}{5} - \frac{3}{25}) = 60$, $5^{3x} \cdot \frac{12}{25} = 60$, $5^{3x} = 125$, $5^{3x} = 5^3$, $3x = 3$, $x = 1$;

б) $4^x - 3^{x-0{,}5} = 3^{x-0{,}5} - 2^{2x-1}$, $4^x - \frac{3^x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot 3^x - \frac{4^x}{2}$,

$2\sqrt{3} \cdot 4^x - 2 \cdot 3^x = 2 \cdot 3 \cdot 3^x - 4^x \cdot \sqrt{3}$, $2\sqrt{3} - 2\left(\frac{3}{4}\right)^x = 6\left(\frac{3}{4}\right)^x - \sqrt{3}$,

$8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x = 3\sqrt{3}$. $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{1.5}$, $x = 1.5$;

в) $2^{5x-1} + 2^{5x-2} + 2^{5x-3} = 896$, $\frac{2^{5x}}{2} + \frac{2^{5x}}{4} + \frac{2^{5x}}{8} = 896$, $2^{5x} \cdot \frac{7}{8} = 896$,

$2^{5x} = \frac{896 \cdot 8}{7}$, $2^{5x} = 1024$, $2^{5x} = 2^{10}$, $x = 2$;

г) $5^{2x-1}+2^{2x}=5^{2x}-2^{2x+2}$, $\frac{5^{2x}}{5}+2^{2x}=5^{2x}-4\cdot 2^{2x}$,

$5^{2x}+5\cdot 2^{2x}=5\cdot 5^{2x}-20\cdot 2^{2x}$. $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}+5=5\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}-20$,

$4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}=25$, $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{5}{2}\right)^{2}$, $x=1$.

165. а) $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$, $\frac{9^{x^2}}{9}-\frac{36}{27}\cdot 9^{x^2}+3=0$,

$3\cdot 9^{x^2}-36\cdot 3^{x^2}+81=0$. Пусть $3^{x^2}=y$, тогда $3y^2-36y+81=0$,

$y^2-12y+27=0$, $y_1=3$, $y_2=9$; $3^{x^2}=3$ или $3^{x^2}=3^2$, $x^2=1$,

$x^2=2$, $x_1=1$, $x_2=-1$; $x_3=\sqrt{2}$, $x_4=-\sqrt{2}$;

б) $5^{3x+1}+34\cdot 5^{2x}=7\cdot 5^x$, $5\cdot 5^{3x}+34\cdot 5^{2x}-7\cdot 5^x=0$. $5^x=y$,

$5y^3+34y^2-7y=0$, $y(5y^2+34y-7)=0$, $y=0$

$5y^2+34y-7=0$, $y=-7$ и $y=\frac{1}{5}$; $5^{3x}=0$ – нет корней;

$5^{3x}=-7$ – нет корней; $5^{3x}=5^{-1}$, $3x=-1$, $x=-\frac{1}{3}$;

в) $16^x-50\cdot 2^{2x}=896$, $4^{2x}-50\cdot 4^x-896=0$; $4^x=y$,

$y^2-50y-896=0$, $y_1=64$, $y_2=-14$; $4^x=64$ или $4^{2x}=-14$ – нет корней; $x=3$

г) $7^{4\sqrt{x}}-8\cdot 7^{\sqrt{4x}}+7=0$, $7^{4\sqrt{x}}-8\cdot 7^{2\sqrt{x}}+7=0$. $7^{2\sqrt{x}}=y$,

$y^2-8y+7=0$, $y_1=7$, $y_2=1$; $7^{2\sqrt{x}}=7$ или $7^{2\sqrt{x}}=1$,

$2\sqrt{x}=1$, $2\sqrt{x}=0$, $x_1=\frac{1}{4}$; $x_2=0$. Ответ: 0; 0,25.

166. а) $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x$, $3\cdot 2^{2x}+2\cdot 3^{2x}=5\cdot 6^x$, разделим обе части уравнения на $6^x\neq 0$, $3\left(\frac{2}{3}\right)^x+2\left(\frac{3}{2}\right)^x=5$.

$\left(\frac{2}{3}\right)^x=y$, $3y+\frac{2}{y}-5=0$, $3y^2-5y+2=0$, $y_1=1$, $y_2=\frac{2}{3}$;

$\left(\frac{2}{3}\right)^x=1$ или $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{3}$, $x_1=0$; $x_2=1$;

б) $8^x+18^x=2\cdot 27^x$, $\left(\frac{8}{27}\right)^x+\left(\frac{18}{27}\right)^x=2$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}+\left(\frac{2}{3}\right)^x-2=0$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x=y$, $y^3+y-2=0$, $y^3-1+y-1=0$,

$(y-1)(y^2+y+1)+(y-1)=0$, $(y-1)(y^2+y+1+1)=0$,

$(y-1)(y^2+y+2)=0$, $y=1$ или $y^2+y+2=0$ – нет корней; $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1, x=0;$

в) $2\cdot 25^x-5\cdot 10^x+2\cdot 4^x=0$, $2\cdot 5^{2x}-5\cdot 2^x\cdot 5^x+2\cdot 2^{2x}=0$,

$2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^x-5\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^x+2=0$; $\left(\frac{5}{2}\right)^x=y$, $2y^2-5y+2=0$, $y_1=\frac{1}{2}$; $\left(\frac{5}{2}\right)^x=2$

или $\left(\frac{5}{2}\right)^x=\frac{1}{2}$, $x=\log_{\frac{5}{2}}2$ или $x_1=\log_{\frac{5}{2}}\frac{1}{2}$, $x_2=-\log_{\frac{5}{2}}2$;

г) $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$, $3\cdot 2^{4x}+2\cdot 3^{4x}=5\cdot 2^{2x}\cdot 3^{2x}$,

$3\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-5=0$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=y$, $3y+\frac{2}{y}-5=0$,

$3y^2-5y+2=0$, $y_1=1$, $y_2=\frac{2}{3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=1$ или $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\frac{2}{3}$,

$2x=0$, $x=0$; $2x=1$, $x=0.5$

167. а) $3^{2\sqrt{x}}+3^{2\sqrt{x}-2}=11$, $3^{2\sqrt{x}}+\frac{3^{2\sqrt{x}}}{3}-\frac{3^{2\sqrt{x}}}{9}=11$, $3^{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)=11$

$3^{2\sqrt{x}}\cdot 1\frac{2}{9}=11$, $3^{2\sqrt{x}}=\frac{11\cdot 9}{11}$, $3^{2\sqrt{x}}=3^2$, $2\sqrt{x}=2$, $\sqrt{x}=1$, $x=1$;

б) $5^{\sin^2 x}-25^{\cos x}=0$, $5^{\sin^2 x}=5^{2\cos x}$, $\sin^2 x=2\cos x$,

$1-\cos^2 x-2\cos x=0$; $\cos x=y$, $y^2+2y-1=0$,

$y_1=-1-\sqrt{2}$, $y_2=-1+\sqrt{2}$; $\cos x=-1-\sqrt{2}$ – не имеет смысла;

$\cos x=-1+\sqrt{2}$, $x=\pm\arccos(-1+\sqrt{2})+2\pi n$, $n\in Z$;

в) $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$, $2^{\sin^2 x}+2^{1-\sin^2 x}=3$. ; $2^{\sin^2 x}=y$,

$y+\frac{2}{y}-3=0$, $y^2-3y+2=0$, $y_1=1$, $y_2=2$; $2^{\sin^2 x}=1$, $2^{\sin^2 x}=2$,

$\sin^2 x=0$, $\sin^2 x=1$, $x_1=\pi k$, $k\in Z$; $\sin x=1$ или $\sin x=-1$

$x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z,\ x_3=-\frac{\pi}{2}+2\pi l,\ l\in Z$

Ответ: $\pi k,\ k\in Z;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi l,\ l\in Z$.

г. $3\cdot 9^{\frac{1}{x}}+6^{\frac{1}{x}}=2\cdot 4^{\frac{1}{x}},\ 3\cdot 3^{\frac{2}{x}}+3^{\frac{1}{x}}\cdot 2^{\frac{1}{x}}-2\cdot 2^{\frac{2}{x}}=0,$

$3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}+-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=0.\ \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=y,\ 3y+1-\frac{2}{y}=0,$

$3y^2+y-2=0,\ y_1=-1,\ y_2=\frac{2}{3};\ \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=-1$ – не имеет смысла;

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1},\ \frac{1}{x}=-1,\ x=-1$

68. а) $\frac{16}{\sqrt{32}}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{3+x},\ \frac{2^4}{2^{\frac{5}{2}}}\geq 2^{-3-x},\ 2^{1,5}\geq 2^{-3-x};\ y=2^t$ – возрастает,

$1,5\geq -3-x,\ x\geq -3-1,5,\ x\geq -4,5.$ Ответ: $x\in[-4,5;\infty;)$.

б) $3^{x^2+x}<10^{\lg 9},\ 3^{x^2+x}<9,\ 3^{x^2+x}<3^2;\ y=3^t$ – возрастает,

$x^2+x<2,\ x^2+x-2<0,\ (x-1)(x+2)<0,\ x\in(-2;1)$;

в) $3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2-3x}<\frac{1}{9},\ 3\cdot 3^{-\frac{1}{2}(2-3x)}<3^{-2},\ 3^{1-1+\frac{3}{2}x}<3^{-2},\ 3^{1,5x}<3^{-2},$

$y=3^t$ – возрастает, $1,5x<-2,\ x<-\frac{4}{3}$;

г) $4^{x^2+x-11}>5^{\log_5 4},\ 4^{x^2+x-11}>4;\ y=4^t$ – возрастает,

$x^2+x-11>1,\ x^2+x-12>0,(x+4)(x-3)>0,\ x\in(-\infty;-4)\cup(3;\infty)$.

169. а) $0,04^x-26\cdot 0,2^x+25\leq 0,\ (0,2)^{2x}-26\cdot 0,2^x+25\leq 0$;

$0,2^x=y$, то $y^2-26y+25\leq 0,\ (y-25)(y-1)\leq 0,\ 1\leq y\leq 25$;

$1\leq 0,2^x\leq 25.\ 5^0\leq 5^{-x}\leq 5^2;\ y=5^t$ – возрастает, $0\leq -x\leq 2$

Ответ: $x\in[-2;0]$.

б) $9^x-84\cdot 3^{-2x}+\frac{1}{3}>0,\ 3^{2x}-84\cdot 3^{-2x}+\frac{1}{3}>0.\ 3^{2x}=y,$

$y-\frac{84}{y}+\frac{1}{3}>0,\ y>0,\ 3y^2+y-252>0,$

$3(y+\frac{28}{3})(y-9)>0$ $y<-\frac{28}{3}$ или $y>9$, $3^{2x}<-\frac{28}{3}$ – не имеет смысла, или $3^{2x}>9$, $3^{2x}>3^2$; $y=3^t$ – возрастает, $2x>2$, $x>1$;

в) $4^x-10\cdot 2^x+16<0$. $2^x=y$, $y>0$, $y^2-10y+16<0$.
$(y-2)(y-8)<0$, $2<y<8$, $2<2^x<8$, $2^1<2^x<2^3$, $y=2^t$ – возрастает. $1<x<3$;

г) $2^{2x+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}-\frac{5}{2}\geq 0$. $2^{2x+1}=y$, $y>0$,

$y+\frac{1}{y}-\frac{5}{2}\geq 0$, $2y^2-5y+2\geq 0$, $(y-2)(y-\frac{1}{2})\geq 0$, $y\leq\frac{1}{2}$ или

$y\geq 2$. $2^{2x+1}\leq\frac{1}{2}$ или $2^{2x+1}\geq 2$, $2^{2x+1}\leq 2^{-1}$; $y=2^t$ – возрастает,

$2x+1\leq -1$, $2x\leq -2$, $x\leq -1$; $2x+1\geq 1$, $2x\geq 0$, $x\geq 0$.

Ответ: $x\in(-\infty;-1]\cup[0;\infty)$.

170. а) $x^2\cdot 3^x-3^{x+1}\leq 0$, $3^x(x^2-3)\leq 0$, $3^x>0$ при всех x, значит, $x^2-3\leq 0$, $-\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{3}$. Ответ: $x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$.

б) $3{,}7^{\frac{x^2+2x-15}{x-4}}>1$; $y=3{,}7^t$ – возрастает, $\frac{x^2+2x-15}{x-4}>0$,

$\frac{(x+5)(x-3)}{x-4}>0$. $(x+5)(x-3)(x-4)>0$. Ответ: $x\in(-5;3)\cup(4,\infty)$.

в) $x^2\cdot 5^x-5^{2+x}<0$, $5^x(x^2-25)<0$, $5^x>0$ при любых x, значит, $x^2-25<0$, $-5<x<5$;

г) $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}$, $4\cdot 2^x-8\cdot 2^x-16\cdot 2^x>5\cdot 5^x-25\cdot 5^x$, $-25\cdot 5^x$, $-20\cdot 2^x>-20\cdot 5^x$, $2^x<5^x$, разделим обе части неравенства на $5^x>0$. $\left(\frac{2}{5}\right)^x<1$; $y=\left(\frac{2}{5}\right)^t$ – убывает, $x\geq 0$.

15. Логарифмические уравнения и неравенства

171. а) $\log_3^2 x=4-3\log_3 x$, $x>0$; $\log_3 x=y$,
$y^2+3y-4=0$, $y_1=-4$, $y_2=1$; $\log_3 x=-4$ или $\log_3 x=1$;
$x_1=\frac{1}{81}$. $x_2=3$;

б) $\frac{1}{2}\lg(2x-1)=1-\lg\sqrt{x-9}$. $\begin{cases}2x-1>0,\\x-9>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>\frac{1}{2},\\x>9;\end{cases}$ $x>9$;

$\frac{1}{2}\lg(2x-1)+\frac{1}{2}\lg(x-9)=1$, $\frac{1}{2}\lg(2x-1)(x-9)=1$, $\lg(2x-10)(x-9)=2$,

$(2x-10)(x-9)=100$, $2x^2-18x-10x+90-100=0$,

$2x^2-28x-10=0$, $x^2-14x-5=0$, $x_1=7+3\sqrt{6}$, $x_2=7-3\sqrt{6}$ – не удовлетворяет ОДЗ. Ответ: $7+3\sqrt{6}$

в) $\log_3\sqrt{x-5}+\log_3\sqrt{2x-3}=1$; $\begin{cases}x-5>0,\\2x-3>0;\end{cases}$ $x>5$;

$\frac{1}{2}\log_3(x-5)+\frac{1}{2}\log_3(2x-3)=1$, $\frac{1}{2}\log_3(x-5)(2x-3)=1$,

$\log_3(x-5)(2x-3)=2$, $(x-5)(2x-3)=9$, $2x^2-3x-10x+15-9=0$,

$2x^2-13x+6=0$, $x_1=6$, $x_2=\frac{1}{2}$ – не удовлетворяет ОДЗ.

г) $3\lg^2(x-1)-10\lg(x-1)+3=0$; $x>1$. $\lg(x-1)=y$,

$3y^2-10y+3=0$, $y_1=3$, $y_2=\frac{1}{3}$; $\lg(x-1)=3$ или $\lg(x-1)=\frac{1}{3}$,

$x-1=1000$, $x=1001$; $x-1=\sqrt[3]{10}$, $x=1+\sqrt[3]{10}$.

Ответ: $1+\sqrt[3]{10}$; 1001.

172. а) $2\log_5(\lg x)=\log_5(10-9\lg x)$, $x>0$, $\lg x>0$, $10-9\lg x>0$, т.е.

$x>1$, $\lg x<\frac{10}{9}$; $\log_5(\lg x)^2=\log_5(10-9\lg x)$, $(\lg x)^2=10-9\lg x$

$\lg x=y$, $y^2+9y-10=0$, $y=-10$ или $y=1$; $\lg x=-10$, $x=10^{-10}$ – не удовлетворяет условиям; $\lg x=1$, $x=10$.

б) $\lg(3^x+x-17)=x\lg 30-x$, $\lg(3^x+x-17)=\lg 30^x-x$,

$\lg(3^x+x-17)-\lg 30^x=-x$, $\lg\frac{3^x+x-17}{30^x}=\lg 10^{-x}$,

$\frac{3^x+x-17}{30^x}=\frac{1}{10^x}$, $3^x+x-17=3^x$, $x-17=0$, $x=17$.

в) $2\lg(\lg x)=\lg(3-2\lg x)$; $\begin{cases}\lg x>0,\\3-2\lg x>0,\\x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>1,\\x>0,\\\lg x<\frac{3}{2};\end{cases}$

$\lg(\lg x)^2 = \lg(3-2\lg x)$, $(\lg x)^2 = 3-2\lg x$. $\lg x = -3$ или $\lg x = 1$, $x_1 = 0{,}001$ – не удовлетворяет ОДЗ; $x_2 = 10$.

г) $x - x\lg 5 = \lg(2^x + x - 3)$, $x - \lg 5^x = \lg(2^x + x - 3)$,

$x = \lg(2^x + x - 3) + \lg 5^x$, $\lg 10^x = \lg((2^x + x - 3)\cdot 5^x)$,

$10^x = (2^x + x - 3)\,5^x$, $10^x = 10^x + x\cdot 5^x - 3\cdot 5^x$, $x\cdot 5^x - 3\cdot 5^x = 0$, $5^x(x-3) = 0$, $5^x > 0$, $x = 3$

173. а) $\log_2 x + \dfrac{4}{\log_x 2} = 5$, $x \neq 1$, $x > 0$, $\log_2 x + 4\log_2 x = 5$, $5\log_2 x = 5$,

$\log_2 x = 1$. $x = 2$.

б) $\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x = 6$, $x \neq 1$, $x > 0$, $\log_3 x + 2 + \log_3 x = 6$,

$2\log_3 x = 4$. $\log_3 x = 2$, $x = 9$.

в) $2\log_{\sqrt{3}} x + \log_x \dfrac{1}{3} = 3$, $x \neq 1$, $x > 0$, $4\log_3 x + \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}} x} = 3$,

$4\log_3 x - \dfrac{1}{\log_3 x} = 3$. $\log_3 x = y$, $4y - \dfrac{1}{y} - 3 = 0$,

$4y^2 - 3y - 1 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = -\dfrac{1}{4}$; $\log_3 x = 1$ или $\log_3 x = -\dfrac{1}{4}$,

$x = 3$; $x = 3^{-\frac{1}{4}}$, $x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Ответ: 3; $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

г) $\log_{\sqrt{2}} x + 4\log_{x^2} x + \log_8 x = 16$, $2\log_2 x + 2 + \dfrac{1}{3}\log_2 x = 16$, $x \neq 1$,

$x > 0$, $2\dfrac{1}{3}\log_2 x = 14$, $\log_2 x = \dfrac{14\cdot 3}{7}$, $\log_2 x = 6$, $x = 2^6$, $x = 64$.

174. а) $x^{\log_2 x - 2} = 8$, $x > 0$, $x \neq 1$. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2: $(\log_2 x - 2)\log_2 x = \log_2 8$,

$\log_2^2 x - 2\log_2 x = 3$. $\log_2 x = y$, $y^2 - 2y - 3 = 0$,

$y_1 = 3$, $y_2 = -1$; $\log_2 x = 3$ или $\log_3 x = -1$, $x = 8$; $x = \dfrac{1}{3}$.

б) $x^{\log_5 x} = 125x^2$, $x > 0$, $x \neq 1$. $\log_5 x \cdot \log_5 x = \log_5 125 + 2\log_5 x$,

$\log_5^2 x - 2\log_5 x - \log_5 125 = 0$. $\log_5 x = y$, $y^2 - 2y - 3 = 0$, $y_1 = 3$,

$y_2 = -1$; $\log_5 x = 3$ или $\log_5 x = -1$, $x = 125$; $x = \dfrac{1}{5}$.

в) $x^{\lg x} = 10000$, $x > 0$;

$\lg x \lg x = \lg 10000$, $\lg^2 x = 4$, $\lg x = 2$ или $\lg x = -2$, $x_1 = 100$, $x_2 = \frac{1}{100}$

г) $x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9}$, $x > 0$, $x \neq 1$. $(\log_3 x - 3)\log_3 x = \log_3 \frac{1}{9}$; $\log_3^2 x - 3\log_3 x = -2$

Пусть $\log_3 x = 1$ или $\log_3 x = 2$, $x_1 = 3$; $x_2 = 9$

175. а) $3\log_2^2 \sin x + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$; $3\log_2^2 \sin x + \log_2(2\sin^2 x) = 2$,

$3\log_2^2 \sin x + \log_2 2 + 2\log_2 \sin x = 2$; $\log_2 \sin x = y$,

$3y^2 + 2y - 1 = 0$, $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{1}{3}$, $\log_2 \sin x = -1$ или $\log_2 \sin x = \frac{1}{3}$

$\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = \sqrt[3]{2}$ – не имеет смысла; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$,

б) $\log_{0,1} \sin 2x + \lg \cos x = \lg 7$; $-\lg \sin 2x + \lg \cos x = \lg 7$,

$\lg \frac{\cos x}{\sin 2x} = \lg 7$, $\frac{\cos x}{\sin 2x} = 7$, $\cos x - 7\sin 2x = 0$, $\cos x(1 - 14\sin x) = 0$,

$\cos x = 0$ – не удовлетворяет условию, $\sin x = \frac{1}{14}$,

$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{14} + \pi n$, $n \in Z$. Ответ: $(-1)^n \arcsin \frac{1}{14} + \pi n$, $n \in Z$.

в) $\log_7 5^{\sqrt{x+2}} = (x-4)\log_7 5$; $\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x-4 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2, \\ x \geq 4; \end{cases}$ $x \geq 4$;

$\log_7 5^{\sqrt{x+2}} = \log_7 5^{x-4}$, $5^{\sqrt{x+2}} = 5^{x-4}$, $\sqrt{x+2} = x - 4$,

$x + 2 = x^2 - 8x + 16$, $x^2 - 9x + 14 = 0$, $x_1 = 2$ – не удовлетворяет условию, $x_2 = 7$;

г) $\lg(3 \cdot 5^x + 24 \cdot 20^x) = x + \lg 18$, $\lg(3 \cdot 5^x + 24 \cdot 20^x) = \lg 10^x \cdot 18$,

$3 \cdot 5^x + 24 \cdot 20^x - 10^x \cdot 18 = 0$, $5^x(3 + 24 \cdot 4^x - 18 \cdot 2^x) = 0$. $5^x \neq 0$,

$24 \cdot 2^{2x} - 18 \cdot 2^x + 3 = 0$. $2^x = y$, $24y^2 - 18y + 3 = 0$,

$8y^2 - 6y + 1 = 0$, $y_1 = \frac{1}{2}$; $y_2 = \frac{1}{4}$; $2^x = \frac{1}{2}$ или $2^x = \frac{1}{4}$, $x_1 = -1$; $x_2 = -2$

176. а) $\log_2(x^2 - x - 4) < 3$; $x^2 - x - 4 > 0$, $x < \frac{1-\sqrt{17}}{2}$ или $x > \frac{1+\sqrt{17}}{2}$,

$\log_2(x^2 - x - 4) < \log_2 8$; $y = \log_2 t$ – возрастает, $x^2 - x - 4 < 8$,

$x^2 - x - 12 < 0$, $(x-4)(x+3) < 0$, $-3 < x < 4$. Ответ: $x \in (-3; \frac{1-\sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{17}}{2}, 4)$

б) $\log_{\sqrt{3}-1}(5-2x)>2$; $5-2x>0, x<2,5$; $\log_{\sqrt{3}-1}(5-2x)>\log_{\sqrt{3}-1}(\sqrt{3}-1)^2$;

$y=\log_{\sqrt{3}-1}t$ – убывает, $5-2x<(\sqrt{3}-1)^2$,

$5-2x<3-2\sqrt{3}+1$, $-2x<-1-2\sqrt{3}$, $x>0,5+\sqrt{3}$. Ответ: $x\in(0,5+\sqrt{3};\ 2,5)$.

в) $\lg(x^2-x+8)\geq 1$; $x^2-x+8>0$ при любых x;
$\lg(x^2-x+8)\geq\lg 10$; $y=\lg t$ – возрастает, $x^2-x+8\geq 10$,
$(x-2)(x+1)\geq 0$, $x\leq -1$ или $x\geq 2$. Ответ: $x\in(-\infty;-1]\cup[2;\infty)$.

г) $\log_{\sqrt{7}-1}(3-2x)<2$; $3-2x>0$; $x<1,5$; $\log_{\sqrt{7}-1}(3-2x)<$

$<\log_{\sqrt{7}-1}\left(\sqrt{7}-1\right)^2$; $y=\log_{\sqrt{7}-1}$ – возрастает, $3-2x<\left(\sqrt{7}-1\right)^2$,

$3-2x<7-2\sqrt{7}+1$, $-2x<8-2\sqrt{7}-3$, $2x>2\sqrt{7}-5$,

$x>\sqrt{7}-2,5$. Ответ: $x\in(\sqrt{7}-2,5;\ 1,5)$.

177. а) $2\log_2 x<2+\log_2(x+3)$; $\begin{cases}x>0,\\x+3>0;\end{cases}$ $x>0$; $2\log_2 x<\log_2 4+\log_2(x+3)$,

$\log_2 x^2<\log_2 4(x+3)$; $y=\log_2 t$ – возрастает; $x^2<4x+12$,

$(x-6)(x+2)<0$, $-2<x<6$. Ответ: $(-2; 6)$.

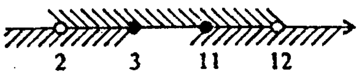
б) $\log_{\frac{1}{6}}(10-x)+\log_{\frac{1}{6}}(x-3)\geq -1$; $\begin{cases}10-x>0,\\x-3>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<10,\\x>3;\end{cases}$

$3<x<10$; $\log_{\frac{1}{6}}(10-x)(x-3)\geq\log_{\frac{1}{6}}6$; $y=\log_{\frac{1}{6}}t$ – убывает,

$(10-x)(x-3)\leq 6$, $10x-30-x^2+3x-6\leq 0$, $-x^2+13x-36\leq 0$,
$(x-9)(x-4)\geq 0$, $x\leq 4$ или $x\geq 9$. Ответ: $x\in(3;4]\cup[9;10)$.

в) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)+\log_{\frac{1}{3}}(12-x)\geq -2$;

$\begin{cases}x>2,\\x<12;\end{cases}$ $2<x<12$;



$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)(12-x)\geq\log_{\frac{1}{3}}9$; $y=\log_{\frac{1}{3}}t$ – убывает,

$(x-2)(12-x)\leq 9$, $12x-x^2-24+2x-9\leq 0$, $x^2-14x+33\geq 0$,
$(x-3)(x-11)\geq 0$, $x\leq 3$ или $x\geq 11$.
Ответ: $x\in(2;\ 3]\cup[11;\ 12)$.

г) $\log_{0,5}(4-x)\geq\log_{0,5}2-\log_{0,5}(x-1)$;

$\begin{cases}4-x>0,\\x-1>0;\end{cases}$ $1<x<4$;

$\log_{0.5}(4-x)+\log_{0.5}(x-1)\geq\log_{0.5}(4-x)(x-1)\geq\log_{0.5}2$;

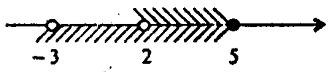
$y=\log_{0.5}t$ – убывает, $(4-x)(x-1)\leq 2$, $4x-4-x^2+x-2\leq 0$,

$-x^2+5x-6\leq 0$, $(x-3)(x-2)\geq 0$, $x\leq 2$ или $x\geq 3$.

Ответ: $x\in(1;2]\cup[3;4)$.

178. а) $\lg(x^2+x-6)-\lg(x+3)\leq\lg 3$;

$\begin{cases}x^2+x-6>0,\\x+3>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<-3, \text{ или } x>2,\\x>-3;\end{cases}$ $x>2$;



$\lg\dfrac{(x^2+x-6)}{x+3}\leq\lg 3$;

$y=\lg t$ – возрастает;

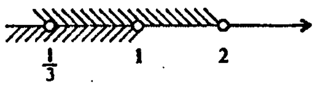
$\dfrac{x^2+x-6}{x+3}\leq 3$, $\dfrac{x^2+x-6-3x-9}{x+3}\leq 0$, $\dfrac{x^2-2x-15}{x+3}\leq 0$,

$\dfrac{(x-5)(x+3)}{x+3}\leq 0$, $(x-5)(x+3)^2\leq 0$, $x\neq -3$, $x\leq 5$. Ответ: $(2;5]$.

б) $\log_2\dfrac{3x-1}{2-x}<1$; $\dfrac{3x-1}{2-x}>0$, $\dfrac{1}{3}<x<2$; $\log_2\dfrac{3x-1}{2-x}<\log_2 2$; $\dfrac{3x-1}{2-x}<2$,

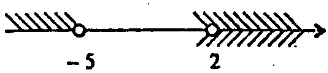
$\dfrac{3x-1-4+2x}{2-x}<0$, $\dfrac{5x-5}{2-x}<0$, $5(x-1)(2-x)<0$, $x<1$ или $x>2$.

Ответ: $x\in(\frac{1}{3};1)$.



в) $\ln(x^2+3x-10)-\ln(x-2)\geq\ln 4$;

$\begin{cases}x^2+3x-10>0,\\x-2>0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-2)(x+5)>0,\\x>2;\end{cases}$ $x>2$;



$y=\ln t$ – возрастает,

$\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}\geq 4$, $\dfrac{x^2+3x-10-4x+8}{(x-2)}\geq 0$, $\dfrac{x^2-x-2}{(x-2)}\geq 0$,

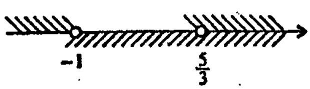
$\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)}\geq 0$,

$(x+1)(x-2)^2\geq 0$, $x\neq 2$, $x>-1$, $x\neq 2$. Ответ: $x\in(2;\infty)$.

г) $\log_3\dfrac{3x-5}{x+1}\leq 1$; $\dfrac{3x-5}{x+1}>0$, $(3x-5)(x+1)>0$, $x\in(-\infty;-1)\cup(\frac{5}{3},\infty)$,

$\log_3\dfrac{3x-5}{x+1}\leq\log_3 3$; $\dfrac{3x-5}{x+1}\leq 3$, $\dfrac{3x-5-3x-3}{x+1}\leq 0$, $x+1>0$, $x>-1$.

Ответ: $x\in(\frac{5}{3};\infty)$.



179. а) $\log_2(4^x-5\cdot2^x+8)>2$; $4^x-5\cdot2^x+8>0$ при любых x,

$\log_2(4^x-5\cdot2^x+8)>\log_2 4$; $4^x-5\cdot2^x+8>4$, $4^x-5\cdot2^x+4>0$. $2^x=y$,
$y^2-5y+4>0$, $(y-1)(y-4)>0$, $y<1$ или $y>4$, $2^x<1, 2^x>4$,

$x<0$; $x>2$. Ответ: $x\in(-\infty;\ 0)\cup(2;\ \infty)$.

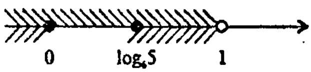
б) $\log_{0,5}^2 x+6\geq 5\log_{0,5}x$, $x>0$. $\log_{0,5}x=y$,
$y^2-5y+6\geq0$, $(y-2)(y-3)\geq0$, $y\leq2$ или $y\geq3$; $\log_{0,5}x\leq2$ или
$\log_{0,5}x\geq3$; $y=\log_{0,5}t$ – убывает, $x\geq0{,}25$, $x\leq0{,}125$.
Ответ: $x\in(0;\ 0{,}125]\cup[0{,}25;\ \infty)$.

в $\lg^2x\geq\lg x+2$, $x>0$. $\lg x=y$, $y^2-y-2\geq0$, $(y+1)(y-2)\geq0$,

$y\leq-1$ или $y\geq2$; $\lg x\leq-1$ или $\lg x\geq2$; $x\leq\frac{1}{10}$, $x\geq100$.

г) $\log_{\frac{1}{\sqrt5}}(6^{x+1}-36^x)\geq-2$; $6^{x+1}-36^x>0$, $x<1$;

$\log_{\frac{1}{\sqrt5}}(6^{x+1}-36^x)\geq\log_{\frac{1}{\sqrt5}}5$; $y=\log_{\frac{1}{\sqrt5}}t$ – убывает,



$$6^{x+1}-36^x\leq\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^{-2},\quad 6^{x+1}-36^x\leq5,\quad -6^{2x}+6\cdot6^x-5\leq0.$$

$6^x=y$, $y^2-6y+5\geq0$, $(y-5)(y-1)\geq0$, $y\leq1$ или
$y\geq5$; $6^x\leq1$ или $6^x\geq5$, $x\leq0$, $x\geq\log_6 5$.
Ответ: $x\in(-\infty;\ 0]\cup[\log_6 5;\ 1)$.

16. Системы рациональных уравнений и неравенств

180. а) $\begin{cases}2x+3y=-1,\\5x+4y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}-8x-12y=4,\\15x+12y=3;\end{cases}$ $7x=7$, $x=1$; $2+3y=-1$, $y=-1$.

б) $\begin{cases}3x-9y=12,\\4x-12y=16;\end{cases}$ $\begin{cases}x-3y=4,\\x-3y=4.\end{cases}$

x и y – произвольные, бесконечное множество решений.

в) $\begin{cases} x+2y=7, \\ 2x-3y=5; \end{cases}$ $\begin{cases} -2x-4y=-14 \\ 2x-3y=5; \end{cases}$ $-7y=-9,\ y=\frac{9}{7};\ x+\frac{18}{7}=7,$

$x=4\frac{3}{7}.$ Ответ: $(4\frac{3}{7};\ 1\frac{2}{7}).$

г) $\begin{cases} 5x-8y=0, \\ x-1{,}6y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} 5(1+1{,}6y)-8y=0, \\ x=1+1{,}6y; \end{cases}$ $5+8y-8y=0,\ 5\neq 0.$

не имеет решений.

181. а) $\begin{cases} \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{13}{6}, \\ x+y=5; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{y}{5-y}+\frac{5-y}{y}=\frac{13}{6}, \\ x=5-y, \end{cases}$ $x\neq 0,\ y\neq 0,$

$\frac{6y^2+(5-y)^2\cdot 6-13y(5-y)}{y(5-y)\cdot 6}=0,\quad \frac{25y^2-125y+150}{y(5-y)}=0,$

$y^2-5y+6=0,\quad y\neq 0, y\neq 5;$

$y(5-y)\neq 0;\quad y_1=2;\ y_2=3;\ x_1=3;\ x_2=2$. Ответ: (3; 2); (2; 3).

б) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^3-y^3=7; \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=1, \\ (x-y)(x^2+xy+y^2)=7; \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=1, \\ x^2+xy+y^2=7; \end{cases}$

$\begin{cases} x=1+y, \\ (1+y)^2+(1+y)y+y^2=7; \end{cases}$ $1+2y+y^2+y+y^2+y^2-7=0,$

$y^2+y-2=0,\ (y-1)(y+2)=0,\ y_1=1,\ y_2=-2;$

$x_1=2,\ x_2=-1.$ Ответ: (2; 1); (–1; –2).

в) $\begin{cases} \frac{y}{x}=2, \\ (x-1)^2+y^2=1; \end{cases}$ $x\neq 0,$ $\begin{cases} y=2x, \\ (x-1)^2+4x^2=1; \end{cases}$

$x^2-2x+1+4x^2-1=0,\ 5x^2-2x=0,\ x(5x-2)=0,$

$x_1=0$ – не удовлетворяет условию; $x_2=0{,}4$

$y=0{,}8.$ Ответ: (0,4; 0,8).

г) $\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x+y=5; \end{cases}$ $5(x^2-xy+y^2)=35,$ $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x=5-y; \end{cases}$

$(5-y)^2-(5-y)y+y^2=7,\ 25-10y+y^2-5y+y^2+y^2=7,$

$3y^2-15y+18=0,\ y^2-5y+6=0,\ y_1=2,\ y_2=3;\ x_1=3,\ x_2=2.$

Ответ: (3; 2); (2; 3).

182. а) $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=45, \\ x+y=5; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-y)(x-y)(x+y)=45, \\ x+y=5; \end{cases}$

$5(x-y)^2=45,\ (x-y)^2=9,$ $\begin{cases} x-y=3, \\ x+y=5 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-y=-3, \\ x+y=5; \end{cases}$

$2x=8,\ x_1=4,\ y_1=1;\ 2x=2,\ x_2=1,\ y_2=4.$ Ответ: (4; 1); (1, 4) б) $\begin{cases} x^2y^3+x^3y^2=12, \\ x^2y^3-x^3y^2=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2y^2(y+x)=12, \\ x^2y^2(y-x)=4; \end{cases}$ $x\neq 0$ и $y\neq 0$. Разделим первое уравнение на второе. $\frac{y+x}{y-x}=3$, $y+x=3y-3x$, $y=2x$.

$x^2\cdot 8x^3+x^3\cdot 4x^2=12$, $8x^5+4x^5=12$, $12x^5=12$, $x=1$, $y=2$.

в) $\begin{cases} x^2y^3=16, \\ x^3y^2=2; \end{cases}$ $x\neq 0$, $y\neq 0$.

$\frac{y}{x}=8$, $y=8x$; $x^2\cdot(8x)^3=16$, $2^9\cdot x^5=2^4$, $x^5=\frac{1}{32}$, $x=\frac{1}{2}$, $y=4$.

г) $\begin{cases} x^2-xy=28, \\ y^2-xy=-12; \end{cases}$ $(x-y)^2=16$, $x-y=4$ или $x-y=-4$,

$x=4+y$ или $x=-4+y$, $(4+y)^2-(4+y)\cdot y=28$ или

$(-4+y)^2-(-4+y)y=28$, $16+8y+y^2-4y-y^2=28$, $4y=12$,

$y=3$, $x=7$; $-4y=12$, $y=-3$, $x=-7$. Ответ: (7; 3); (–7; –3).

183. а) $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^3\cdot y^3=-8; \end{cases}$ $\begin{cases} x^3=7-y^3, \\ (7-y^3)y^3=-8; \end{cases}$ $7y^3-y^6+8=0$.

$y^6-7y^3-8=0$. $y^3=z$, $z^2-7z-8=0$,

$z_1=8$, $z_2=-1$; $y^3=8$ или $y^3=-1$, $y_1=2$, $y_2=-1$;

$x_1^3=7-8$, $x_2^3=7+1$, $x_1=-1$; $x_2=2$. Ответ: (–1; 2); (2; –1)

б) $\begin{cases} x^2+y^4=5, \\ xy^2=2; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{4}{y^4}+y^4=5, \\ x=\frac{2}{y^2}, \\ y\neq 0, \end{cases}$ $4+y^8-5y^4=0$, $y^4=z$,

$z^2-5z+4=0$, $z_1=4$, $z_2=1$; $y^4=4$, $y^4=1$, $y_1=\sqrt{2}$,

$y_2=-\sqrt{2}$, $y_3=1$, $y_4=-1$; $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=2$.

Ответ: (1; $\sqrt{2}$); (1; – $\sqrt{2}$); (2; 1); (2; –1).

в) $\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ xy=2; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{8}{y^3}+y^3=9, \\ x=\frac{2}{y}, \\ y\neq 0; \end{cases}$ $8+y^6-9y^3=0$, $y^3=z$.

$z^2-9z+8=0$, $z_1=8$, $z_2=1$; $y_1^3=8$, $y_2^3=1$, $y_1=2$, $y_2=1$;
$x_1=1$, $x_2=2$. Ответ: (1; 2); (2; 1).

г) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5,\\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=13;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{1}{x}=5-\frac{1}{y},\\ \left(5-\frac{1}{y}\right)^2+\frac{1}{y^2}=13,\\ x\neq 0, y\neq 0;\end{cases}$ $25-\frac{10}{y}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^2}=13$,

$\frac{2}{y^2}-\frac{10}{y}+12=0$; $\frac{1}{y}=z$,

$z^2-5z+6=0$, $z_1=2$, $z_2=3$; $y_1=\frac{1}{2}$, $y_2=\frac{1}{3}$, $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{3}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$.

184. а) $\begin{cases}x-5y=7,\\ ax-y=-3;\end{cases}$ $\begin{cases}x-5y=7,\\ -5ax+5y=15;\end{cases}$ $x-5ax=22$, $x(1-5a)=22$;

при $a\neq\frac{1}{5}$ – 1 решение; при $a=\frac{1}{5}$ – нет решений;

б) $\begin{cases}x+2y=a,\\ 2x+4y=5;\end{cases}$ если $a=2{,}5$ – бесконечное множество решений;

если $a\neq 2{,}5$ – нет решений;

в) $\begin{cases}x+ay=2,\\ 3x-2y=-6;\end{cases}$ $\begin{cases}-3x-3ay=-6,\\ 3x-2y=-6;\end{cases}$ $-3ay-2y=0$, $y(3a+2)=12$;

если $a=-\frac{2}{3}$ – бесконечное множество решений; если $a\neq-\frac{2}{3}$ – одно решение;

г) $\begin{cases}x-y=2,\\ 2x-2y=2a;\end{cases}$ при $a=2$ – бесконечно много решений;

при $a\neq\frac{1}{2}$ – нет решений.

185.

а) $\begin{cases}2x>3-\frac{13x-2}{11},\\ \frac{x}{6}+\frac{2}{3}(x-7)<\frac{3x-20}{9};\end{cases}$ $\begin{cases}22x>33-13x+2,\\ 3x+12(x-7)<2(3x-20);\end{cases}$

$\begin{cases} 35x > 35, \\ 9x < 44; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ x < \dfrac{44}{9}. \end{cases}$

Ответ: $x \in (1;\ 4\frac{8}{9})$.

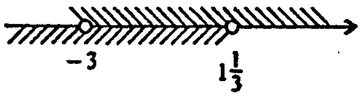
б) $\begin{cases} x - \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x+4}{3} \le \dfrac{x-1}{4} - 2, \\ 1{,}5x - 2{,}5 < x; \end{cases}$ $\begin{cases} 12x - 6(x+1) - 4(x+4) \le 3(x-1) - 24, \\ 1{,}5x - x < 2{,}5; \end{cases}$

$\begin{cases} 12x - 6x - 6 - 4x - 16 \le 3x - 3 - 24, \\ 0{,}5x < 2{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} -x \le -5, \\ x < 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 5, \\ x < 5. \end{cases}$

Ответ: нет решений.

в) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x}{3} \ge \dfrac{x-1}{4} - x - 2, \\ 0{,}5x < 2 - x; \end{cases}$ $\begin{cases} 6(x+1) - 4x \ge 3(x-1) - 12x - 24, \\ 0{,}5x + x < 2; \end{cases}$

$\begin{cases} 6x + 6 - 4x \ge 3x - 3 - 12x - 24, \\ 1{,}5x < 2; \end{cases}$



$\begin{cases} 11x \ge -33, \\ x < \dfrac{20}{15}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge -3, \\ x < \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

Ответ: $x \in [-3;\ 1\frac{1}{3})$.

г) $\begin{cases} 2(3x-1) < 3(4x+1) + 16, \\ 4(2+x) < 3x + 8; \end{cases}$ $\begin{cases} 6x - 2 < 12x + 3 + 16, \\ 8 + 4x < 3x + 8; \end{cases}$ $\begin{cases} -6x < 21, \\ x < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x > -3{,}5, \\ x < 0. \end{cases}$ Ответ: $x \in (-3{,}5;\ 0)$.

17. Системы иррациональных уравнений

186. а) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 18; \end{cases}$ $\begin{cases} -2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = -8, \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 18. \end{cases}$ $5\sqrt{y} = 10$, $\sqrt{y} = 2$, $y = 4$,

$\sqrt{x} - 2 = 4$, $\sqrt{x} = 6$, $x = 36$. Ответ: (36; 4).

б) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x} = 8 - \sqrt{y}, \\ (8 - \sqrt{y})\sqrt{y} = 15; \end{cases}$ $8\sqrt{y} - y - 15 = 0$.

$\sqrt{y} = z$, $z^2 - 8z + 15 = 0$, $z_1 = 3$, $z_2 = 5$,

$\sqrt{y_1} = 3$, $\sqrt{y_2} = 5$, $y_1 = 9$, $y_2 = 25$, $\sqrt{x_1} = 8 - 3$, $\sqrt{x_2} = 8 - 5$,

$x_1 = 25$, $x_2 = 9$. Ответ: (25; 9); (9; 25).

в) $\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8. \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19; \end{cases}$ $\begin{cases} 6\sqrt{x}-2\sqrt{y}=16, \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19. \end{cases}$ $7\sqrt{x}=35,\ \ x=25,$

$5+2\sqrt{y}=19,\ 2\sqrt{y}=14,\ \sqrt{y}=7,\ y=49.$ Ответ: (25; 49).

г) $\begin{cases} \sqrt{xy}=12, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x}=\dfrac{12}{\sqrt{y}}, \\ \dfrac{12}{\sqrt{y}}+\sqrt{y}-7=0. \end{cases}$ $\sqrt{y}=z,$

$\dfrac{12}{z}+z-7=0,\ 12+z^2-7z=0,\ z_1=3,\ z_2=4,\ \sqrt{y_1}=3,\ \sqrt{y_2}=4,$

$y_1=9,\ y_2=16,\ \sqrt{x_1}=7-3,\ \sqrt{x_2}=7-4,\ \sqrt{x_1}=4,\ \sqrt{x_2}=3,\ x_1=16,\ x_2=9.$

187.

а) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=30, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5; \end{cases}$ $\sqrt{xy}\cdot 5=30,\ \sqrt{xy}=6,$

$\sqrt{x}=\dfrac{6}{\sqrt{y}},\ \ y\neq 0,\ \ \sqrt{y}+\dfrac{6}{\sqrt{y}}-5=0.\ \ \sqrt{y}=z,$

$z^2-5z+6=0,\ z_1=2,\ z_2=3,\ \sqrt{y_1}=2,\ \sqrt{y_2}=3,\ y_1=4,\ y_2=9,$

$\sqrt{x_1}=5-2,\ x_1=9,\ \sqrt{x_2}=5-3,\ x_2=4$. Ответ: (4; 9), (9; 4).

б) $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7, \\ xy=9; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7 \\ \sqrt{xy}=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=7+3, \\ xy=9; \end{cases}$

$\begin{cases} x=10-y, \\ (10-y)y-9=0; \end{cases}$ $y^2-10y+9=0,$ $\begin{cases} y_1=9, \\ x_1=1; \end{cases}$ $\begin{cases} y_2=1, \\ x_2=9. \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=6, \\ x-y=12; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=6, \\ \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=12; \end{cases}$ $\begin{cases} \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\cdot 6=12, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=6; \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=6; \end{cases}$ $2\sqrt{x}=8,\ \sqrt{x}=4,\ x=16,\ 4+\sqrt{y}=6,\ \sqrt{y}=2,\ y=4.$

г) $\begin{cases} xy=64, \\ x-y+\sqrt{xy}=20; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{xy}=8, \\ x-y+8=20; \end{cases}$ $\begin{cases} (12+y)y=64, \\ x=12+y; \end{cases}$

$12y+y^2-64=0,$ $\begin{cases} y_1=4, \\ x_1=16; \end{cases}$ и $\begin{cases} y_2=-16, \\ x_2=-4. \end{cases}$

188. а) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=26.\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6.\end{cases}$ $\sqrt[4]{x}=u,\ \ \sqrt[4]{y}=v,$ $\begin{cases}u^2+v^2=26,\\ u+v=6;\end{cases}$

$\begin{cases}(6-v)^2+v^2=26,\\ u=6-v;\end{cases}$ $36-12v+v^2+v^2=26,$

$v^2-6v+5=0,$ $\begin{cases}v_1=1,\\ u_1=5;\end{cases}$ $\begin{cases}v_2=5,\\ u_2=1;\end{cases}$ $\sqrt[4]{x_1}=5,$ $\sqrt[4]{x_2}=1,$ $x_1=625,$ $x_2=1,$

$\sqrt[4]{y_1}=1,$ $\sqrt[4]{y_2}=5,$ $y_1=1,$ $y_2=625.$ Ответ: (625; 1), (1; 625).

б) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\frac{3}{4},\\ xy=1;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{1}{\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{y}-\frac{15}{4}=0,\\ x=\frac{1}{y},\\ y\neq 0.\end{cases}$ $\sqrt[3]{y}=z,$

$\frac{1}{z}-z-\frac{15}{4}=0,$ $4z^2-15z+4=0,$ $z_1=-4,$ $z_2=\frac{1}{4},$ $\sqrt[3]{y_1}=-4,$ $\sqrt[3]{y_2}=\frac{1}{4},$

$\begin{cases}y_1=-64,\\ x_1=-\frac{1}{64};\end{cases}$ $\begin{cases}y_2=-\frac{1}{64},\\ x_2=-64.\end{cases}$ Ответ: $(-\frac{1}{64};\ -64),\ (\frac{1}{64};\ 64).$

в) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=5.\\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1;\end{cases}$ $\begin{cases}(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})=5,\\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1;\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=5.\\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1;\end{cases}$ $\sqrt[4]{x}=a,$

$\sqrt[4]{y}=b;$ $\begin{cases}a+b=5,\\ a-b=1;\end{cases}$ $a=3,$ $b=2.$ $\sqrt[4]{x}=3,$ $x=81,$ $\sqrt[4]{y}=2,$ $y=16.$

Ответ: (81; 16).

г) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3,\\ xy=8;\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3,\\ \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}=2.\end{cases}$ Пусть $\sqrt[3]{x}=a,$ $\sqrt[3]{y}=b;$

$\begin{cases}a+b=-3,\\ ab=2.\end{cases}$ $\begin{cases}a=-b-3,\\ (-b-3)b=2;\end{cases}$ $\begin{matrix}-b^2-3b-2=0,\\ b^2+3b+2=0,\end{matrix}$

$\sqrt[3]{y}=-1,$ $y=(-1)^3,$ $y=-1,$ $\sqrt[3]{x}=-2,$ $x=(-2)^3,$ $x=-8;$

$\sqrt[3]{y}=-2,$ $y=-8,$ $\sqrt[3]{x}=-1,$ $x=-1.$ Ответ: (–8; –1), (–1; –8).

18. Системы тригонометрических уравнений

189. а) $\begin{cases}\sin x\cdot\cos y=0{,}25,\\ \sin y\cdot\cos x=0{,}75.\end{cases}$

Сложим уравнения, затем вычтем из первого второе уравнение:

$\begin{cases}\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y=1,\\ \sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y=-\dfrac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}\sin(x+y)=1,\\ \sin(x-y)=-\dfrac{1}{2},\end{cases}$

$\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z,\\ x-y=(-1)^k\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\pi k,\ k\in Z;\end{cases}$ $2x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n+(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z,\ n\in Z,$

$x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n+(-1)^k\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z,\ n\in Z,$

$2y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n-(-1)^k\dfrac{\pi}{6}-\pi k,\ k\in Z,\ n\in Z,$

$y=\dfrac{\pi}{4}+\pi n-(-1)^k\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z,\ n\in Z.$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n+(-1)^k\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2};\ \dfrac{\pi}{4}+\pi n+(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}\right),k\in Z,\ n\in Z.$

б) $\begin{cases}x-y=-\dfrac{1}{3},\\ \cos^2(\pi x)-\cos^2(\pi y)=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x-y=-\dfrac{1}{3},\\ (\cos\pi x-\cos\pi y)(\cos\pi x+\cos\pi y)=0;\end{cases}$

$-2\sin\dfrac{\pi x+\pi y}{2}\cdot\sin\dfrac{\pi x-\pi y}{2}\cdot2\cos\dfrac{\pi x+\pi y}{2}\cdot\cos\dfrac{\pi x-\pi y}{2}=0,$

$\sin\pi(x+y)\sin(x-y)\pi=0,$

$\sin\dfrac{\pi x+\pi y}{2}=0$, или $\sin\dfrac{\pi x-\pi y}{2}=0$, или $\cos\dfrac{\pi x+\pi y}{2}=0$, или

$\cos\dfrac{\pi x-\pi y}{2}=0;$ $\dfrac{\pi x+\pi y}{2}=\pi m,\ m\in Z,$ $\dfrac{\pi x-\pi y}{2}=\pi k,\ k\in Z,$

$\dfrac{\pi x+\pi y}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in Z,$ $\dfrac{\pi x-\pi y}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$

1) $\begin{cases}x+y=2m,\ m\in Z,\\ x-y=-\dfrac{1}{3};\end{cases}$ $2x=2m-\dfrac{1}{3},\ x=m-\dfrac{1}{6},\ y=m+\dfrac{1}{6},\ m\in Z;$

2) $\begin{cases} x-y=2k, \ k\in Z, \\ x-y=-\dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $k=-\dfrac{1}{6}$, решений нет;

3) $\begin{cases} x+y=1+2l, \ l\in Z, \\ x-y=-\dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $2x=\dfrac{2}{3}+2l, \ x=\dfrac{1}{3}+l, \ y=\dfrac{2}{3}+l, \ l\in Z$;

4) $\begin{cases} x-y=1+2n, \ n\in Z, \\ x-y=-\dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $n=-\dfrac{2}{3}$, нет решений.

Ответ: $\left(m-\dfrac{1}{6}; m+\dfrac{1}{6}\right)$, $\left(\dfrac{1}{3}+l; \dfrac{2}{3}+l\right)$, $l\in Z$; $m\in Z$.

в) $\begin{cases} 4\sin x\cdot\sin y=3, \\ \mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y=3; \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x\cdot\sin y=\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}=3; \end{cases}$ $\dfrac{\frac{3}{4}}{\cos x\cdot\cos y}=3,$

$\cos x\cdot\cos y=\dfrac{1}{4}$, $\begin{cases} \sin x\cdot\sin y=\dfrac{3}{4}, \\ \cos x\cdot\cos y=\dfrac{1}{4}; \end{cases}$ $\sin x\cdot\sin y+\cos x\cdot\cos y=1, \quad \cos(x-y)=1,$

$\sin x\cdot\sin y-\cos x\cdot\cos y=\dfrac{1}{2}, \quad -\cos(x+y)=\dfrac{1}{2},$

$\cos(x+y)=-\dfrac{1}{2}, \ x+y=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, \ k\in Z$; $\begin{cases} x-y=2\pi n, \ n\in Z, \\ x+y=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, \ k\in Z; \end{cases}$

$2x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n+2\pi k, \ k\in Z, \ n\in Z$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n+\pi k, \ k\in Z, \ n\in Z$,

$y=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n+\pi k-2\pi n, \ k\in Z, \ n\in Z$, $y=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k-\pi n, \ k\in Z, \ n\in Z$.

Ответ: $(\dfrac{\pi}{3}+\pi k+\pi n; \dfrac{\pi}{3}+\pi k-\pi n), (-\dfrac{\pi}{3}+\pi k+\pi n; -\dfrac{\pi}{3}+\pi k-\pi n)$, $k\in Z, \ n\in Z$.

г) $\begin{cases} \sin^2 x=\cos x\cdot\cos y, \\ \cos^2 x=\sin x\cdot\sin y; \end{cases}$ $1=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y, \quad \cos(x-y)=1,$

$x-y=2\pi n, \ n\in Z, \quad x=2\pi n+y, \ n\in Z; \quad \sin^2(2\pi n+y)=$

$=\cos(2\pi n+y)\cdot\cos y, \ n\in Z, \quad \sin^2 y=\cos^2 y, \ \sin^2 y-\cos^2 y=0,$

$\mathrm{tg}^2 y=1, \ \cos y\neq 0, \ y=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi k, \ k\in Z, \ \mathrm{tg}y=\pm 1, x=2\pi n\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi k, \ k\in Z$.

Ответ: $(\dfrac{\pi}{4}+\pi k+2\pi n; \dfrac{\pi}{4}+\pi k), (-\dfrac{\pi}{4}+\pi k+2\pi n; -\dfrac{\pi}{4}+\pi k), k\in Z, \ n\in Z$.

190. а) $\begin{cases} tgx + tgy = 2, \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = 2, \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Перемножив уравнения, получим:

$\begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z,$

$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n - y,\ n \in Z,\ \cos(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n - y) \cdot \cos y = \dfrac{1}{2},\ n \in Z,$

$\cos(\dfrac{\pi}{2} - y) \cdot \cos y = \dfrac{1}{2},\ \sin y \cdot \cos y = \dfrac{1}{2},$

$\sin 2y = 1,\ 2y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z,\quad y = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z,$

$x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n - \pi k,\ k \in Z,\ n \in Z.$

б) $\begin{cases} x + y = \dfrac{5\pi}{2}, \\ \sin x + \cos 2y = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{2} - y, \\ \sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - y\right) + \cos 2y = -1; \end{cases}$

$\cos y + \cos 2y = -1,\ \cos y + 2\cos^2 y - 1 = -1,\ 2\cos^2 y + \cos y = 0,$

$\cos y(2\cos y + 1) = 0,\ \cos y = 0$ или $\cos y = -\dfrac{1}{2};$

$y_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,\quad y_2 = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z,\ y_3 = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z;$

$x_1 = \dfrac{5\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} - \pi n,\ n \in Z,\quad x_1 = \pi n,\ n \in Z,$

$x_2 = \dfrac{11\pi}{6} - 2\pi k,\ k \in Z,\quad x_3 = \dfrac{19\pi}{6} - 2\pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $(\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi n), (\dfrac{11\pi}{6} - 2\pi k; \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k), (\dfrac{19\pi}{6} - 2\pi k; -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k),\ k \in Z, n \in Z'$

в) $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \mathrm{ctg}x \cdot \mathrm{ctg}y = 3. \end{cases}$ Перемножим уравнения:

$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$ $\sin x \cdot \sin y + \cos x \cdot \cos y = 1,\ \cos(x-y) = 1,$

$x-y=2\pi n,\ n\in Z,\quad x=2\pi n+y,\ n\in Z$,

$\sin(2\pi n+y)\cdot\sin y=\frac{1}{4},\ n\in Z,\quad \sin y\cdot\sin y=\frac{1}{4},\ \sin^2 y=\frac{1}{4}$,

$\sin y=\pm\frac{1}{2},\quad y=(-1)^k\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)+\pi k,\ k\in Z$,

$x=2\pi n+(-1)^k\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)+\pi k,\ k\in Z,\ n\in Z$.

Ответ: $((-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k+2\pi n;\ (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k),\ ((-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k+2\pi n;$ $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k)\ k\in Z,\ n\in Z$.

г) $\begin{cases}\cos 2y+\cos x=1,\\ x+y=\frac{\pi}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}\cos 2y+\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=1,\\ x=\frac{\pi}{2}-y;\end{cases}$

$\cos 2y+\sin y=1,\ 1-2\sin^2 y+\sin y=1$,

$-2\sin^2 y+\sin y=0,\ \sin y(-2\sin y+1)=0,\ \sin y=0$ или $\sin y=\frac{1}{2}$,

$y_1=\pi n,\ n\in Z,\quad y_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi n,\ k\in Z;\ x_1=\frac{\pi}{2}-\pi n,\ n\in Z$,

$x_2=\frac{\pi}{2}-(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $(\frac{\pi}{2}-\pi n;\ \pi n),(\frac{\pi}{2}-(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k;(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k),\ n\in Z,\quad k\in Z$.

19. Системы показательных и логарифмических уравнений

191. а) $\begin{cases}9^{x+y}=729,\\ 3^{x-y-1}=1;\end{cases}$ $\begin{cases}9^{x+y}=9^3,\\ 3^{x-y-1}=3^0;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=3,\\ x-y-1=0;\end{cases}$ $2x=4,\ x=2,\ y=1$.

б) $\begin{cases}2^x-2^y=16,\\ x+y=9;\end{cases}$ $\begin{cases}2^{9-y}-2^y=16,\\ x=9-y;\end{cases}$ $\frac{2^9}{2^y}-2^y-16=0$.

$2^y=z,\quad \frac{512}{z}-z-16=0,\quad 512-z^2-16z=0$,

$z^2+16z-512=0,\quad z_1=16,\ z_2=-32;\ 2^{y_1}=16,\ 2^{y_2}=-32$ – решений нет.

$y=4,\ x=5$; Ответ: (5; 4).

в) $\begin{cases}\left(\sqrt{5}\right)^{x-y}=25,\\ 6^{6y-x-1}=1;\end{cases}$ $\begin{cases}5^{\frac{x-y}{2}}=5^2\\ 6^{6y-x-1}=6^0,\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{x-y}{2}=2,\\ 6y-x-1=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x-y=4,\\ -x+6y=1;\end{cases}$

$5y=5,\ y=1,\ x=5.$ Ответ: $(5;\ 1)$.

г) $\begin{cases}3^x+3^y=28,\\ x-y=3;\end{cases}$ $\begin{cases}3^{3+y}+3^y=28,\\ x=3+y;\end{cases}$ $27\cdot3^y+3^y=28,\ 28\cdot3^y=28,$

$y=0,\ x=3.$ Ответ: $(3;\ 0)$.

192. а) $\begin{cases}4^{\log_4 2x}-y=-1\\ 5^{2x-y}+5^x=5{,}2;\end{cases}$ $\begin{cases}2x-y=-1,\\ 5^{-1}+5^x=5{,}2;\end{cases}$ $\begin{cases}y=2x+1,\\ 5^x=5;\end{cases}$ $\begin{cases}y=3,\\ x=1.\end{cases}$

б) $\begin{cases}2^x+3^y=17\\ 2^{x+2}+3^{y+1}=5;\end{cases}$ $\begin{cases}2^x+3^y=17,\\ 4\cdot2^x-3\cdot3^y=5.\end{cases}$ $2^x=u,\ 3^y=v,$

$\begin{cases}u+v=17,\\ 4u-3v=5;\end{cases}$ $\begin{cases}-4u-4v=-68,\\ 4u-3v=5;\end{cases}$ $-7v=-63,\ v=9,\ u=8;\ 2^x=8,$

$3^y=9;\ x=3,\ y=2.$

в) $\begin{cases}3^{\log_3(y+x)}=2,\\ 2^{2x+y}=16;\end{cases}$ $\begin{cases}y+x=2,\\ 2x+y=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=2,\\ 2x+y=4;\end{cases}$ $x=2,\ y=0.$

г) $\begin{cases}\log_{\sqrt{2}}(y-x)=4,\\ 3^x+2\cdot3^{y-2}=171;\end{cases}$ $\begin{cases}3^x+2\cdot3^{4+x-2}=171,\\ y=4+x;\end{cases}$

$3^x+2\cdot3^{4+x-2}=171,\ 3^x+18\cdot3^x=171,\ 19\cdot3^x=171,\ 3^x=9,\ x=2,\ y=6.$

193. а) $\begin{cases}3^x\ 7^y=63,\\ 3^x+7^y=16.\end{cases}$ $3^x=u;\ 7^y=v,$ $\begin{cases}u\cdot v=63,\\ u+v=16;\end{cases}$

$\begin{cases}(16-v)v=63,\\ u=16-v;\end{cases}$ $16v-v^2-63=0,\ v^2-16v+63=0,\ v_1=7,\ v_2=9;$

$u_1=9,\ u_2=7;\ 3^{x^1}=9,\ 3^{x^2}=7;\ x_1=2,\ x_2=\log_3 7;\ 7^{y^1}=7,\ 7^{y^2}=9;$

$y_1=1,\ y_2=\log_7 9.$ Ответ: $(2;\ 1)$; $(\log_3 7;\ \log_7 9)$.

б) $\begin{cases}3^x-2^{2y}=77,\\ \sqrt{3^x}-2^y=7;\end{cases}$ $\begin{cases}3^x-2^{2y}=77,\\ 3^{\frac{x}{2}}-2^y=7.\end{cases}$ $3^{\frac{x}{2}}=u,\ 2^y=v,$

$\begin{cases}u^2-v^2=77,\\ u-v=7;\end{cases}$ $\begin{cases}7(u+v)=77,\\ u-v=7;\end{cases}$ $\begin{cases}u+v=11,\\ u-v=7;\end{cases}$ $u=9,\ v=2;$

$3^{\frac{x}{2}}=9,\ \frac{x}{2}=2,\ x=4,\ 2^y=2;\ y=1.$ Ответ: $(4;\ 1)$.

в) $\begin{cases} 4^x\ 4^y = 64, \\ 4^x - 4^y = 63 \end{cases}$ $4^x = u,\ 4^y = v,$ $\begin{cases} u \cdot v = 64, \\ u - v = 63; \end{cases}$

$\begin{cases} (63+v)v = 64, \\ u = 63+v; \end{cases}$ $v^2 + 63v - 64 = 0,\ v_1 = -64,\ v_2 = 1;\ u_1 = -1,\ u_2 = 64;$

$4^x = -64$ – уравнение не имеет смысла; $4^x = 1.\ x = 0;$

$4^y = -1$ – уравнение не имеет смысла; $4^y = 64,\ y = 3.$

г) $\begin{cases} \sqrt{2^x} - 3^y = -7, \\ 2^x - 3^y = -5; \end{cases}$ $2^{\frac{x}{2}} - 2^x = -2,\ 2^x - 2^{\frac{x}{2}} - 2 = 0.$ Пусть $2^{\frac{x}{2}} = z,$

тогда $z^2 - z - 2 = 0,\ z_1 = 2,\ z_2 = -1;\ 2^{\frac{x}{2}} = 2,\ 2^{\frac{x}{2}} = -1$ – уравнение не имеет смысла; $\frac{x}{2} = 1,\ x = 2;\ 2^2 - 3^y = -5,\ 3^y = 9,\ y = 2.$

194. а) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5. \end{cases}$ $\lg x = u,\ \lg y = v,$ $\begin{cases} u - v = 1, \\ u^2 + v^2 = 5; \end{cases}$

$\begin{cases} u = 1 + v, \\ (1+v)^2 + v^2 = 5; \end{cases}$ $1 + 2v + v^2 + v^2 = 5,\ 2v^2 + 2v - 4 = 0,$

$v^2 + v - 2 = 0,\ v_1 = -2,\ v_2 = 1;\ u_1 = -1,\ u_2 = 2;\ \lg x = -1,\ \lg x = 2,$

$x_1 0{,}1,\ x_2 = 100;\ \lg y = -2,\ \lg y = 1,\ y = 0{,}01,\ y = 10.$

Ответ: (0,1; 0,001); (100; 10).

б) $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, y > 0, \\ \log_2(x^2 + y^2) = \log_2 32, \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 16; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, y > 0, \\ x^2 + y^2 = 32, \\ xy = 16; \end{cases}$

$x = \frac{16}{y},\ \frac{256}{y^2} + y^2 = 32,\ y^4 - 32y^2 + 256 = 0,\ (y^2 - 16)^2 = 0,$

$y_1 = 4,\ y_2 = -4$ – на удовлетворяет условию $x > 0$; $x_1 = 4$. Ответ: (4; 4).

в) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0; \end{cases}$ $2\lg x = 12,\ \lg x = 6,\ x = 10^6;\ 6 + \lg y = 5,$

$\lg y = -1,\ y = \frac{1}{10}.$ Ответ: $(10^6; 0{,}1)$.

г) $\begin{cases} \log_2(x+1) = \log_2\left(y + \frac{1}{4}\right), \\ \log_2 x - 2\log_2\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x + 1 > 0, \\ y + \frac{1}{4} > 0, \\ y - \frac{1}{2} > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x > -1, \\ y > -\frac{1}{4}, \\ y > \frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ y > \frac{1}{2}; \end{cases}$

$$\begin{cases} x+1=y+\frac{1}{4}, \\ x=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=-\frac{3}{4}, \\ x=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2; \end{cases} \quad \left(y-\frac{1}{2}\right)^2-y=-\frac{3}{4},$$

$$y^2-y+\frac{1}{4}-y+\frac{3}{4}=0, \ y^2-2y+1=0, \ (y-1)^2=0, \ y=1, \ x=0{,}25.$$

195. а) $\begin{cases} y-\log_3 x=1, \\ x^y=3^{12}; \end{cases}$ $x>0, \ x\neq 1.$ $\begin{cases} y=1+\log_3 x, \\ y\log_3 x=12\log_3 3; \end{cases}$ $\begin{cases} y=1+\log_3 x, \\ (1+\log_3 x)\log_3 x=12 \end{cases}$

$\log_3=z, \ (1+z)z=12, \ z^2+z-12=0, \ z_1=-4, \ z_2=3;$

$\log_3 x_1=-4, \ \log_3 x_2=3; \ x_1=\frac{1}{81}, \ x_2=21; \ y_1=1-4, \ y_1=-3,$

$y_2=1+3, \ y_2=4.$ Ответ: $(\frac{1}{81};-3)$; $(27;4)$.

б) $\begin{cases} 3^{1+\log_3(x^2+y^2)}=15, \\ \log_3(x^2-y^2)-\log_3(x-y)=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2\neq 0, \\ x^2-y^2\neq 0, \\ x>y; \end{cases}$

$\begin{cases} 3\cdot 3^{\log_3(x^2+y^2)}=15, \\ \frac{x^2-y^2}{x-y}=1; \end{cases}$ $\begin{cases} 3\left(x^2+y^2\right)=15, \\ (x+y)=1; \end{cases}$ $\begin{cases} 3(1-y)^2+3y^2=15, \\ x=1-y; \end{cases}$

$3-6y+3y^2+3y^2-15=0, \ 6y^2-6y-12=0, \ y^2-y-2=0,$
$y_1=2, \ y_2=-1; \ x_1=-1, \ x_2=2;$ $(-1;2)$ – не является решением системы.

в) $\begin{cases} \log_5 x+3^{\log_3 y}=7, \\ x^y=5^{12}; \end{cases}$ $\begin{cases} \log_5 x+y=7, \\ y\log_5 x=12\log_5 5; \end{cases}$ $\begin{cases} y=7-\log_5 x, \\ y(\log_5 x)=12; \end{cases}$

$(7-\log_5 x)\cdot\log_5 x=12. \ \log_5 x=z, \ (7-z)z=12,$

$7z-z^2-12=0, \ z^2-7z+12=0, \ z_1=3, \ z_2=4; \ \log_5 x_1=3,$

$x_1=125, \ y_1=4; \ \log_5 x_2=4, \ x_2=625, \ y_2=3.$

Ответ: $(125;4)$; $(625;3)$.

г) $\begin{cases} 5^{1+\log_5(x^2-y^2)}=25, \\ \log_5\left(x^2-y^2\right)=\log_5(x+y); \end{cases}$ $\begin{cases} 5\cdot\left(x^2-y^2\right)=25, \\ \frac{x^2-y^2}{x+y}=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ x-y=1; \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=1; \end{cases}$ $x=3, \ y=2.$ Ответ: $(3;2)$.

196. а) $\begin{cases}\log_4 x-\log_2 y=0,\\ x^2-2y^2=8;\end{cases}$ $\begin{cases}\log_4 x-2\log_4 y=0,\\ x^2-2y^2=8;\\ x>0,\ y>0;\end{cases}$

$x=y^2$, $y^4-2y^2-8=0$, $y=2$ или $y=-2$ – не удовлетворяет условию системы; $y=2$, $x=4$. Ответ: $(4;2)$.

б) $\begin{cases}3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=81,\\ \lg\sqrt{xy}=1+\lg 3;\end{cases}$ $\begin{cases}3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=3^4,\\ \lg\sqrt{xy}=\lg 10\cdot 3,\\ x>0,\ y>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0,\ y>0,\\ 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=4,\\ \sqrt{xy}=30;\end{cases}$

$\begin{cases}x>0,\ y>0,\\ 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=4,\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=30.\end{cases}$ Пусть $\sqrt{x}=u$, $\sqrt{y}=v$, тогда $\begin{cases}2u-v=4,\\ u\cdot v=30;\end{cases}$

$\begin{cases}v=2u-4,\\ u\cdot(2u-4)=30;\end{cases}$ $2u^2-4u-30=0$, $u^2-2u-15=0$, $u_1=5$, $u_2=-3$;

$v_1=6$, $v_2=-10$; $\sqrt{x}=5$, $\sqrt{x}=-3$ – уравнение решений не имеет;

$x=25$, $\sqrt{y}=6$, $\sqrt{y}=-10$ – уравнение решений не имеет; $y=36$.

в) $\begin{cases}\log_9 x-\log_3 y=0,\\ x^2-5y^2+4=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0,\ y>0,\\ x=y^2,\\ x^2-5y^2+4=0;\end{cases}$ $y^4-5y^2+4=0$,

$y=2$, $x=4$; $y=-2$ – не удовлетворяет условию;
$y=1$, $x=1$; $y=-1$ – не удовлетворяет условию.
Ответ: $(4;2)$, $(1;1)$.

г) $\begin{cases}2\log_2 x-3^y=15,\\ 3^y\log_2 x=2\log_2 x+3^{y+1}.\end{cases}$

Пусть $\log_2 x=u$, $3^y=v$, тогда $\begin{cases}2u-v=15,\\ v\cdot u=2u+3v;\end{cases}$

$\begin{cases}v=2u-15,\\ (2u-15)u=2u+3(2u-15);\end{cases}$ $2u^2-15u-2u-6u+45=0$,

$2u^2-23u+45=0$, $u_1=9$, $u_2=2{,}5$; $v_1=3$, $v_2=-10$; $\log_2 x_1=9$,

$\log_2 x_2=2{,}5$; $x_1=512$, $x_2=2^{2,5}$; $3^y=3$, $y_1=1$, $3^y=-10$ – уравнение не имеет смысла. Ответ: $(512;1)$.

20. Задачи на составление уравнений и систем уравнений

197. Пусть x км/ч – скорость автобуса по старому расписанию, тогда $(x + 10)$ км/ч – скорость по новому расписанию; t – время движения по старому расписанию; $(t - \frac{2}{3})$ – время движения по новому расписанию. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x \cdot t = 325, \\ (x+10)\left(t - \frac{2}{3}\right) = 325; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{325}{t}, \\ xt - \frac{2}{3}x + 10t - \frac{20}{3} = xt; \end{cases}$$

$-2x + 30t - 20 = 0,\ -\frac{325}{t} + 15t - 10 = 0,\ 3t^2 - 2t - 65 = 0,\ t_1 = 5,$

$t_2 = -\frac{26}{6}$ – не является решением по смыслу задачи;

$x = 325 : 5 = 65$ (км/ч); $x + 10 = 65 + 10 = 75$ (км/ч).

Ответ: скорость автобуса по старому расписанию 65 км/ч, по новому – 75 км/ч.

198. Пусть скорость течения x км/ч, тогда $(15 - x)$ км/ч – скорость лодки против течения и $(x + 15)$ км/ч – скорость лодки по течению. Можно составить уравнение по условию задачи.

$$\frac{139\frac{1}{3}}{x+15} + \frac{139\frac{1}{3}}{15-x} = 20,\ \frac{418}{3(x+15)} + \frac{418}{3(15-x)} = 20,\ x \neq 15,\ x \neq -15;$$

$418(15-x)+418(x+15)=60(15^2-x^2),\ 418(15 - x + x + 15) = 30(15^2 - x^2),$

$209 \cdot 30 = 30 \cdot (15^2 - x^2),\ 209 = 15^2 - x^2,\ x^2 = 16,\ x_1 = -4$ – не является решением: $x_2 = 4$. Ответ: скорость течения 4 км/ч.

199. Пусть x км/ч – первоначальная скорость; t – время в пути, тогда $x \cdot t = 220$; $(x + 5)$ км/ч – новая скорость, $(t - 2\frac{1}{6})$ ч – время, затраченное на оставшийся путь, тогда $2x + (x + 5)(t - 2\frac{1}{6}) = xt$.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x \cdot t = 220, \\ 2x + (x+5)\left(t - 2\frac{1}{6}\right) = xt; \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{220}{x}, \\ 2x + xt + 5t - 2\frac{1}{6}x - \frac{65}{6} = xt; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=\dfrac{220}{x}, \\ 5t-\dfrac{1}{6}x-\dfrac{65}{6}=0; \end{cases} \quad \frac{5\cdot 220}{x}-\frac{x}{6}-\frac{65}{6}=0,\ 6600-x^2-65x=0,$$

$x^2+65x-6600=0$, $x_1=55$, $x_2=-120$ – не является решением.

Ответ: первоначальная скорость 55 км/ч.

200. Пусть ч км/ч – скорость I теплохода, тогда (x + 6) км/ч – скорость второго теплохода. Т.к. они двигались перпендикулярно:

$(2x)^2+(2(x+6))^2=60^2$, $4x^2+4(x+6)^2=60^2$,

$4x^2+4x^2+48x+144=3600$, $x^2+6x-432=0$, $x_1=18$, $x_2=-24$ – не решение. x + 6 = 18 + 6 = 24 (км/ч). Ответ: 18 км/ч, 24 км/ч.

201. Пусть t – время до встречи первого тела; (t – 5) с – время движения второго тела. Путь первого тела:

$$t\frac{12+6(t-1)}{2}=6t+3t^2-3t=3t^2+3t.$$

Путь второго тела: $12(t-5)$. $3t^2+3t+12t-60=390$,

$t^2+5t-150=0$, $t_1=10$, $t_2=-15$ – не является решением, т.к. мы пользуемся положительным временем. Ответ: 10 с.

202. Пусть n – дневная норма по плану; тогда

$$\frac{2160}{n}=\frac{2320-3n}{n+80}+4,\ 2160n+80\cdot 2160=2320n-3n^2+4n^2+320n,$$

$n^2+480n-172800=0$, $n_1=240$, $n_2=-700$ – не может выражать объем грунта. Ответ: 240 м^3.

203. Пусть x – число дней, необходимое I бригаде, тогда x + 6 – число дней, необходимое второй бригаде. Имеем уравнение:

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+6}=\dfrac{1}{4}$, $x^2+6x-8x+24=0$, $x^2-2x-24=0$, $x_1=6$, $x_2=-4$ – не может выражать число дней; x + 6 = 12 Ответ: 6 дней, 12 дней.

204. Пусть затребовали x машин; грузоподъемность каждой машины $\dfrac{60}{x}$. Имеем уравнение:

$$\frac{60}{x}-0{,}5=\frac{60}{x+4},\ 120(x+4)-(x+4)x=120x,\ x^2+4x-480=0,$$

$x_1=20$, $x_2=-24$ – не является решением.

Ответ: 20 машин.

205. Пусть x% меди в первом куске, $(x + 15)$% меди во втором куске. Имеем уравнение:

$$\frac{5\cdot 100}{x}+\frac{4\cdot 100}{x+15}=30,\ 50x+750+40x=3x^2+45x,\ x^2-15x-250=0,$$

$x_1 = 25$, $x_2 = -10$ – не является решением. Ответ: 25%

206. Пусть x г – было количество раствора; $\frac{40}{x}$ – процентное содержание соли в первоначальном растворе; $x + 200$ – количество нового раствора; $\frac{40}{x+200}$ – процентное содержание соли в новом растворе. По условию задачи имеем уравнение: $\frac{40}{x}-\frac{40}{x+200}=0{,}1$

$40x + 8000 - 40x = 0{,}1(x^2 + 200x)$, $x^2 + 200x - 8000 = 0$, $x_1 = 200$,
$x_2 = -400$ – не является решением по смыслу задачи.

$\frac{40}{200}\cdot 100\% = 20\%$, $200 - 40 = 160$ (г). Ответ: 20%, 160 г воды.

207. Пусть x – скорость третьей машины; t – время движения третьей машины до встречи с первой. Составим систему:

$$\begin{cases} xt = 40\cdot\frac{1}{2}+40t, \\ x\left(t+\frac{3}{2}\right)=50\cdot 2+50t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{20+40t}{t}, \\ xt+\frac{3}{2}x=100+50t; \end{cases}$$

$$100+50t-\frac{3}{2}x=20+40t,\quad 80+10t=\frac{3}{2}x,\quad 80+10t=\left(\frac{20+40t}{t}\right)\cdot\frac{3}{2},$$

$160t+20t^2=60+120t$, $t^2+2t-3=0$, $t_1=1$, $t_2=-3$ – не является решением задачи; $x = 20 + 40 = 60$ (км/ч). Ответ: 60 км/ч.

208. Пусть V м/с – скорость поезда; S м – длина поезда. $S = 7V$,

$V=\frac{378+7V}{25}$, $25V=378+7V$, $18V=378$, $V=21$ (м/с);

$S = 7 \cdot 21 = 147$ (м). Ответ: $V = 21$ м/с, $S = 147$ м.

209. Пусть V_1 км/ч – первоначальная скорость первого пешехода; V_2 км/ч – второго пешехода. Имеем : $5(V_1 + V_2) = 50$,

$V_1+V_2=10$, $V_2=10-V_1$; $\frac{5V_1}{V_2+1}-\frac{50-V_1}{V_1-1}=2$,

$5V_1(V_1-1)-(50-5V_1)(V_2+1)=2(V_2+1)(V_1-1)$;

$V_2=10-V_1$, поэтому

$5V_1(V_1-1)-(50-5V_1)(10-V_1+1)=2(10-V_1+1)(V_1-1)$,

$V_1^2+38V_1-264=0$, $V_1=6$ км/ч, $V_2=4$ км/ч.

Ответ: 6 км/ч, 4 км/ч.

210. Пусть двигателей типа A изготовили x штук и y – типа B

Составим систему: $\begin{cases}2x+3y=130,\\x+2y=80;\end{cases}$ $\begin{cases}x=80-2y,\\160-4y+3y=130;\end{cases}$ $y=30$, $x=20$

Ответ: 20 двигателей типа A , 30 двигателей типа B.

211. Пусть x дней нужно первому рабочему, тогда второму необходимо $25-x$. Составим уравнение, приняв всю работу за 1:

$\frac{1}{12}=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(25-x)}$; $x(25-x)=6(25-x)+6x$, $25x-x^2=150-6x+6x$,

$x^2-25x+150=0$, $x_1=15$. $x_2=10$. Тогда второй соответственно за 10 и 15 дней. Ответ: 15 дней и 10 дней.

212. Пусть x масса первой жидкости, тогда масса II в смеси $60-x$

Объем первой жидкости $\frac{x}{1{,}2}$, объем второй $\frac{60-x}{1{,}6}$, объем всей смеси $\frac{x}{1{,}2}+\frac{60-x}{1{,}6}$, плотность смеси равана

$60:\left(\frac{x}{1{,}2}+\frac{60-x}{1{,}6}\right)=\frac{60\cdot 4{,}8}{4x+3(60-x)}=\frac{288}{x+180}$. По условию $8\cdot\frac{288}{x+180}=x$, откуда $x^2+180x-2304=0$, $x=12$ или $x=-192$ – не является решением.

Следовательно, при $x=12$ плотность смеси равна $\frac{288}{x+180}$, то есть 1,5 г/см^3; первой жидкости 12 г, второй – 48 г.

Ответ: 12 г, 48 г, 1,5 г/см^3.

213. Пусть x – масса серебра в сплаве, тогда $m+3$ серебра составит 90%, а масса серебра в нем равна $x+3$; таким образом, $\frac{9}{10}(m+3)=x+3$. В сплаве массой $m+2$ серебро составит 84%; но серебра в добавленных 2 кг сплава содержится $2\cdot\frac{9}{10}$ кг $=\frac{9}{5}$ кг, поэтому в новом сплаве серебро составит $\left(x+\frac{9}{5}\right)$ кг и $\frac{84}{100}(m+2)=x+\frac{9}{5}$. Получим систему:

$$\begin{cases}\frac{9}{10}(m+3)=x+3,\\ \frac{84}{100}(m+2)=x+\frac{9}{5};\end{cases} \begin{cases}9(m+3)=10(x+3),\\ 21(m+2)=25(x+\frac{9}{5});\end{cases} \begin{cases}9m+27=10x+30,\\ 21m+42=25x+45;\end{cases}$$

$$\begin{cases}9m=10x+3,\\ 21m=25x+3;\end{cases} \begin{cases}m=\frac{10x+3}{9},\\ 21\cdot\frac{10x+3}{9}=25x+3;\end{cases} \quad \frac{7}{3}(10x+3)=25x+3,$$

$70x+21=75x+9$, $5x=21-9$, $x=\frac{12}{5}$, $x=2{,}4$, $m=\frac{10\cdot 2{,}4+3}{9}$, $m=\frac{27}{9}$,

$m=3$. $2{,}4\% - a\%$, $3-100\%$, $a=\frac{2{,}4}{3}\cdot 100=80\%$

Ответ: масса сплава 3 кг, процентное содержание серебра 80%.

214. Пусть первая точка делает оборот за x с, тогда вторая – за $(x-5)$ с Тогда за 1 мин. первая точка сделает $\frac{60}{x}$ оборотов, вторая $\frac{60}{x+5}$ оборотов. По условию $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+5}=1$, значит $60(x+5-x)=x(x+5)$, $x^2+5x-300=0$, $x=-20$ (не подходит) или $x=15$. Получили, что первая точка делает полный оборот за 15 с, вторая за 20 с. Скорость первой точки 4 м/с, второй 3 м/с. Ответ: 4 м/с, 3 м/с.

215. Пусть число десятков a, число единиц b. Число равно $10a+b$

$a^2+b^2=13$; $10a+b-9=10b+a$. $\begin{cases}a^2+b^2=13,\\ 9a-9b=9;\end{cases}$ $\begin{cases}a^2+b^2=13,\\ a-b=1;\end{cases}$

$(b+1)^2+b^2=13$, $b^2+2b+1+b^2=13$, $2b^2+2b-12=0$, $b^2+b-6=0$,

$b=2$ или $b=-3$ – не цифра. По смыслу $b>0$, поэтому $b=2$, $a=3$ и исходное число равно 32. Ответ: 32

216.

$a^2-b^2=55$, $a,b\in N$ $(a-b)(a+b)=55$, причем $a-b$, $a+b$ – натуральные числа. Но $55=55\cdot 1=5\cdot 11$, поэтому либо

$\begin{cases}a-b=1,\\ a+b=55,\end{cases}$ либо $\begin{cases}a-b=5,\\ a+b=11\end{cases}$

Из первой системы $2b=54$, $b=27$ и $a=28$;
из второй системы $2a=16$, $a=8$ и $b=3$

Ответ: 27 и 28, 3 и 8

§ 5. Производная, первообразная, интеграл и их применения

21. Производная

217. а) $\Delta f = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,

$\Delta f = \frac{1}{2}(1{,}1)^2-\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}(1{,}1^2-1^2)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}21=0{,}105$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{0{,}105}{0{,}1}=1{,}05$;

б) $\Delta f=\sqrt{2{,}21-1}-\sqrt{2-1}=1{,}1-1=0{,}1$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{0{,}1}{0{,}21}=\frac{10}{21}$;

в) $\Delta f=3-2(2{,}2)-(3-2\cdot 2)=3-4{,}4-3+4=-0{,}4$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{-0{,}4}{0{,}2}=-2$;

г) $\Delta f=\frac{1}{1{,}1+1}-\frac{1}{1}=\frac{1}{2{,}1}-1=\frac{10}{21}-1=-\frac{11}{21}$,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{-\frac{11}{21}}{0{,}1}=-\frac{11\cdot 10}{21}=-\frac{110}{21}=-5\frac{5}{21}.$$

218.

а) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1-4(x+\Delta x)-(1-4x)}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1-4x-4\Delta x-1+4x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-4\Delta x}{\Delta x}=-4$;

б) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1{,}5(x+\Delta x)^2-1{,}5x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1{,}5x^2+3x\Delta x+1{,}5\Delta^2x-1{,}5x^2}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x-1{,}5\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x+1{,}5\Delta x)=3x$; при $x_0=2$ имеем $f'(x_0)=6$;

в) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3(x+\Delta x)+2-3x-2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3x+3\Delta x+2-3x-2}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$;

г) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}=\frac{(x+\Delta x)^3+1-x^3-1}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta^2x+\Delta^3x+1-x^3-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+\Delta^2x)}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x^2\ \ 3x\Delta x+\Delta^2x)=3x^2$; при $x_0=-1$ имеем $f'(x_0)=3$.

219. а) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+5,\quad f'(x)=x^3-x^2+x-1$,

б) $f(x)=(4-x^2)\sin x,\quad f'(x)=(4-x^2)'\cdot\sin x+(4-x^2)(\sin x)'=$
$=-2x\cdot\sin x+(4-x^2)\cos x$;

в) $f(x)=(x^2+5)(x^3-2x+2),\quad f'(x)=2x(x^3-2x+2)-(x^2+5)(3x^2-2)=$
$=2x^4-4x^2+4x-3x^4+2x^2-15x^2+10=-x^4-17x^2+4x+10$;

г) $f(x)=\frac{\cos x}{2-x^3}$,

$$f'(x)=\frac{-\sin x(2-x^3)-\cos x\cdot(-3x^2)}{\left(2-x^3\right)^2}=\frac{-2\sin x+x^3\sin x+3x^2\cos x}{\left(2-x^3\right)^2}$$

220. а) $f(x)=\frac{3}{x^3}-\sqrt[5]{x}+\frac{5}{\sqrt[3]{x}}=3\cdot x^{-3}-x^{\frac{1}{5}}+5\cdot x^{-\frac{1}{3}}$,

$$f'(x)=3\cdot(-3x^{-4})-\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}+5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot x^{-1\frac{1}{3}}=-\frac{9}{x^4}-\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}-\frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}},$$

б) $f(x)=(2-\sqrt{x})\mathrm{tg}x$, $f'(x)=\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{tg}x+\frac{2-\sqrt{x}}{\cos^2 x}$;

в) $f(x)=\frac{x^3-3x}{1-2x}$,

$$f'(x)=\frac{(3x^2-3)(1-2x)-(x^3-3x)(-2)}{(1-2x)^2}=\frac{3x^2-6x^3-3+6x+2x^3-6x}{(1-2x)^2}=\frac{-4x^3+3x^2-3}{(1-2x)^2},$$

г) $f(x)=\frac{\sin x}{1-2\cos x}$, $f'(x)=\frac{\cos x(1-2\cos x)-\sin x\cdot 2\sin x}{(1-2\cos x)^2}=\frac{\cos x-2}{(1-2\cos x)^2}$

221. а) $f(x)=2^x+\lg x,\ f'(x)=2^x\ln 2+\frac{1}{x\ln 10}$;

б) $f(x)=e^{-3x}+2\log_3 2x,\quad f'(x)=-3e^{-3x}+\frac{4}{2x\ln 3}=-3e^{-3x}+\frac{2}{x\ln 3}$,

в) $f(x)=x^2\cdot 5^{2x},\quad f'(x)=2x\cdot 5^{2x}+x^2\cdot 2\cdot 5^{2x}\cdot\ln 5=2\cdot 5^{2x}\ x(1+x\ln 5)$,

г) $f(x)=\frac{\ln x}{e^x+e^{-x}},\quad f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(e^x+e^{-x})-\ln x(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$

222.
а) $f(x)=\sin 3x+\cos 5x,\quad f'(x)=3\cos 3x-5\sin 5x$;

б) $f(x)=\sqrt[4]{1+x^2}+\frac{1}{(2x-1)^3},\quad f'(x)=\frac{2x}{4\sqrt[4]{\left(1+x^2\right)^3}}-\frac{6}{(2x-1)^4}$.

в) $f(x)=(3-2x^3)^5$, $f'(x)=5(3-2x^3)^4\cdot(-6x^2)=-30x^2(3-2x^3)^4$;

г) $f(x)=\lg(3x)+3\mathrm{tg}(2x-\frac{\pi}{4})$,

$$f'(x)=\frac{3}{3x\ln 10}+\frac{3\cdot 2}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{x\ln 10}+\frac{6}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

223.

а) $f'(x)=4x^3-4x$, $4x^3-4x=0$, $4x(x^2-1)=0$, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$;

б) $f'(x)=3\cos 2x-5\cos x-1$, $3\cos 2x-5\cos x-1=0$,

$6\cos^2 x-3-5\cos x-1=0$. $\cos x=y$, $6y^2-5y-4=0$,

$y_1=1\frac{1}{12}$, $y_2=-\frac{1}{2}$; $\cos x=1\frac{1}{12}$ – не имеетсмысла;

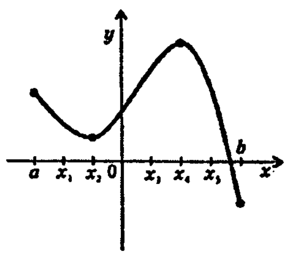
$\cos x=-\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$;

в) $f'(x)=-x^4+10x^2-9$, $-x^4+10x^2-9=0$, $x^4-10x^2+9=0$;
Пусть $x^2=y$, тогда $y^2-10y+9=0$, $y_1=9$, $y_2=1$; $x^2=9$, $x^2=1$;
$x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=1$, $x_4=-1$;

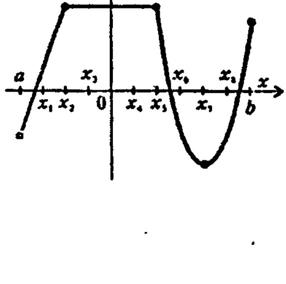
г) $f'(x)=1-2\sin 2x$, $1-2\sin 2x=0$, $\sin 2x=\frac{1}{2}$, $2x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$,

$x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

224.



а) 1) а) $f'(x)>0$ в точке x_3;
б) $f'(x)<0$ в точках x_1, x_5;
в) $f'(x)=0$ в точках x_2 и x_4.
2) а) $f'(x)>0$ при $x\in(x_2;x_4)$;
б) $f'(x)<0$ при $x\in(a;x_2)\cup(x_4;b)$;
в) $f'(x)=0$ при x_2 и x_4.
3) Функция имеет производную во всех точках $(a;\ b)$.

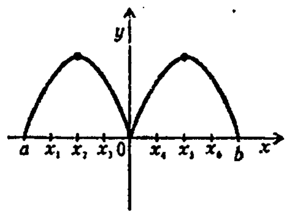


б) 1) а) $f'(x)>0$ в точках x_1 и x_8;
б) $f'(x)<0$ в точке x_6;
в) $f'(x)=0$ в x_2, x_3, x_4, x_5, x_7.
2) а) $f'(x)>0$ при $x\in(a;x_2)\cup(x_7;b)$;
б) $f'(x)<0$ при $x\in(x_5;\ x_7)$;
в) $f'(x)=0$ при $x\in(x_2;\ x_5)$ и в x_7.
3) Функция не имеет производной во всех x_2, x_5.

в) 1) а) $f'(x) > 0$ x_1 и x_4;

б) $f'(x) < 0$ в x_3, x_6;

в) $f'(x) = 0$ в x_2, и x_5.



2) а) $f'(x) > 0$ при $x \in (a; x_2) \cup (0; x_5)$;

б) $f'(x) < 0$ при $x \in (x_2; 0) \cup (x_5; b)$;

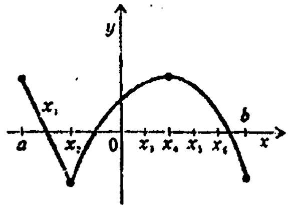
в) $f'(x) = 0$ в x_2 и x_5.

3) Производная не существует в точке 0.

г) 1) а) $f'(x) > 0$ в x_3;

б) $f'(x) < 0$ в x_1, x_5, x_6;

в) $f'(x) = 0$ в x_4.



2) а) $f'(x) > 0$ при $x \in (x_2; x_4)$;

б) $f'(x) < 0$ при $x \in (a; x_2) \cup (x_4; b)$;

в) $f'(x) = 0$ в x_4.

3) Производная не существует в x_2.

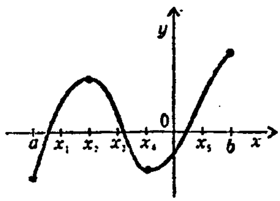
225.

а) $y'(x_1) > y'(x_2)$;

б) $y'(x_1) > y'(x_3)$;

в) $y'(x_2) = y'(x_4)$;

г) $y'(x_3) < y'(x_5)$.



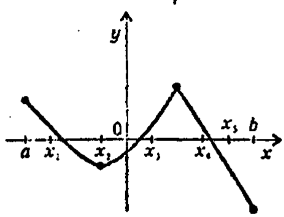
226.

а) $y'(x_1) < y'(x_2)$;

б) $y'(x_3) > y'(x_5)$;

в) $y'(x_4) = y'(x_5)$;

г) $y'(x_2) > y'(x_4)$.



227.

$(uvw)' = (u \cdot (vw))' = u'(vw) + u(vw)' = u'vw + u(v'w + vw') = u'vw + uv'w + uvw'$,

что требовалось доказать.

22. Применение производной к исследованию функций

228. $f(x) \approx (x_0) + f'(x_0)\Delta x$; а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, $f'(x) = x^2 - 1$,

$$f(x_1) \approx f(2) + f'(2) \cdot 0{,}0057 = \frac{8}{3} - 2 + 3 \cdot 0{,}0057 = \frac{2}{3} + 0{,}0171 =$$

$$= 0{,}6667 + 0{,}0171 = 0{,}6838,$$

$f(x_2) \approx f(2) - f'(2) \cdot 0{,}021 \approx 0{,}6667 - 0{,}063 \approx 0{,}6037 \approx 0{,}604;$

б) $f(x) = 2 + 4x - x^2 + \frac{1}{4}x^4,\quad f'(x) = 4 - 2x + x^3;\quad x_1 = 3 + 0{,}005,$

$$f(x_1) \approx f(3) + 0{,}005 f'(3) = 2 + 12 - 9 + \frac{1}{4} \cdot 81 + 0{,}005(4 - 6 + 27) =$$

$$= 5 + 20\frac{1}{4} 0{,}005 \cdot 25 = 5 + 20{,}25 + 0{,}125 = 25{,}375;\quad x_2 = 2 - 0{,}0.,$$

$$f(x_2) \approx f(2) - 0{,}02 f'(2) = 2 + 8 - 4 + \frac{1}{4} \cdot 16 - 0{,}02(4 - 4 + 8) =$$

$$= 10 - 0{,}02 \cdot 8 = 10 - 0{,}16 = 9{,}84.$$

229. а) $\sqrt{9{,}009} = \sqrt{9(1 + 0{,}001)} = 3\sqrt{1 + 0{,}001} \approx 3\left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}001\right) = 3 + 0{,}0005 = 3{,}0005;$

б) $1{,}0001^{15} = (1 + 0{,}0001)^{15} = 1 + 15 \cdot 0{,}0001 = 1{,}0015,$

в) $0{,}999^{-5} = (1 - 0{,}001)^{-5} \approx 1 - 0{,}001 \cdot (-5) = 1{,}005$

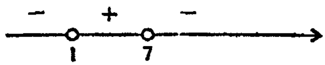
г) $\sqrt[3]{8{,}008} = \sqrt[3]{8(1{,}001)} = 2\sqrt[3]{1 + 0{,}001} \approx 2\left(1 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}001\right) \approx 2 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}001 \approx$

$$\approx 2 + 0{,}666 \cdot 0{,}001 = 2{,}006.$$

230.

а) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x + 18,\quad D(f) = (-\infty; \infty),\quad f'(x) = -x^2 + 8x - 7.$

критические точки:



$$f'(x) = 0,\ -x^2 + 8x - 7 = 0,\ x^2 - 8x + 7 = 0,\ x_1 = 7,\ x_2 = 1;$$

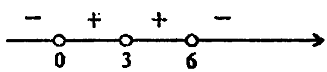
$f'(0) < 0,\ f(2) > 0,\ f'(8) < 0;$

$f(x)$ возрастает при $x \in [1; 7]$, убывает при $x \in (-\infty; 1] \cup [7; \infty)$;
$x_{min} = 1,\ x_{max} = 7.$

б) $f(x) = \frac{2x^2}{3 - x},\quad D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; \infty),$

$$f'(x) = \frac{4x(3 - x) + 2x^2}{(3 - x)^2} = \frac{-4x^2 + 12x + 2x^2}{(3 - x)^2} = \frac{-2x^2 + 12x}{(3 - x)^2}.$$

Критические точки: $\frac{-2x^2 + 12x}{(3 - x)^2}$,



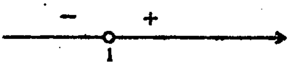
$$-2x^2 + 12x = 0\qquad x(2x - 12) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 6;$$

$f'(-1)<0,\ f'(1)>0,\ f'(4)>0,\ f'(7)<0$;

$f(x)$ возрастает при $x\in[0;3)$ и $(3;6]$, убывает при $x\in(-\infty;0]\cup[6;\infty)$, $x_{\min}=0,\ x_{\max}=6$;

в) $f(x)=\dfrac{x(x^3-4)}{2}=\dfrac{1}{2}(x^4-4x),\ D(f)=(-\infty;\infty)$,

$f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot(4x^3-4)=2x^3-2;\ f'(x)=0,\quad 2x^3-2=0,$



$2(x^3-1)=0,\quad x^3=1,\ x=1.$

$f'(0)<0,\ f'(2)>0$; $f(x)$ возрастает при $x\in[1;\infty)$, убывает при $x\in(-\infty;1]$; $x_{\min}=1$;

г) $f(x)=\dfrac{x}{4-x},\quad D(f)=(-\infty;4)\cup(4;\infty$,

$f'(x)=\dfrac{4-x-x(-1)}{(4-x)^2}=\dfrac{4-x+x}{(4-x)^2}=\dfrac{4}{(4-x)^2}$; при любом $x\neq4\quad x>0$, поэтому функция возрастает на $D(f)$, экстремумов нет.

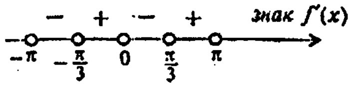
231. а) $f(x)=\cos2x-2\cos x,\quad D(f)=(-\infty;\infty)$,

$f'(x)=-2\sin2x+2\sin x;\ -4\sin x\cdot\cos x+2\sin x=0,$

$-2\sin x(2\cos x-1)=0,\ \sin x=0$ или $2\cos x=1,\ x=\pi n,\ n\in Z$ или

$\cos x=\dfrac{1}{2},\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; $f(x)$ возрастает при

$x\in\left[-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n;\ 0+2\pi n\right]\cup$



$\cup\left[\dfrac{\pi}{3}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right],\ n\in Z,$

убывает на

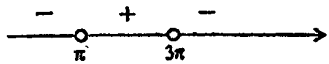
$x\in\left[-\pi+2\pi n;\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[2\pi n;\ \dfrac{\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in Z,$

$x_{\min}=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ x_{\min}=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ x_{\max}=0+2\pi n$,

б) $f(x)=2-\sin\dfrac{x}{2},\ D(f)=(-\infty;\infty),\quad f'(x)=-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2},\ -\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}=0.$

$\cos\dfrac{x}{2}=0,\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\ x=\pi+2\pi n,\ n\in Z.$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0,\ f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) > 0;$

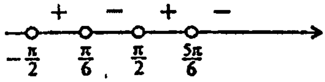


возрастает при $x \in [\pi + 4\pi n;\ 3\pi + 4\pi n]$, $n \in Z$, убывает при $x \in [-\pi + 4\pi n;\ \infty + 4\pi n]$, $n \in Z$, $x_{\min} = \pi + 4\pi n$, $n \in Z$, $x_{\max} = 3\pi + 4\pi n$, $n \in Z$;

в) $f(x) = 2\sin x + 2\cos 2x$, $D(f) = (-\infty; \infty)$, $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$;

$2\cos x - 2\sin 2x = 0,$

$2\cos x - 4\sin x \cdot \cos x = 0,$



$2\cos x(1 - 2\sin x) = 0,\quad \cos x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$,

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z;$ возрастает при

$x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right],\quad n \in Z$,

убывает при

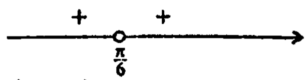
$x \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n) \cup (\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{6} + 2\pi n),\quad x_{\max} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n;$

$x_{\max} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\quad x_{\min} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in Z.$

г) $f(x) = 3x - \cos 3x$, $D(f) = (-\infty; \infty)$, $f'(x) = 3 + 3\sin 3x$;

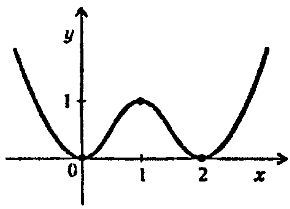
$3 - 3\sin 3x = 0,\ \sin 3x = 1,\ 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z,$



$f'(0) > 0,\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0;$ возрастает на $(-\infty; \infty)$.

232. а) $f(x) = x^2(x-2)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2;$

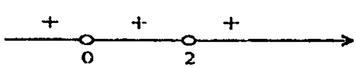


1) $D(f)$ $x \in (-\infty; \infty)$; 2) $E(f): y \in (-\infty; 0)$;

3) нули: $x^2(x-2)^2 = 0,$

$x_1 = 0,\ x_2 = 2;$

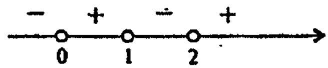
4) промежутки знакопостоянства:



$f(-2) > 0;\ f(5) > 0;\ f(1) > 0,\ y \geq 0$ при любом x;

5) $f(-x) = (-x)^2(-x-2)^2 = x^2(-x-2)^2 \neq f(x) \neq -f(x)$,
ни четная, ни нечетная;

6) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$; найдем критические точки:
$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0$, $4x(x^2 - 3x + 2) = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$,
возрастает при
$x \in [0;\ 1] \cup [2;\ \infty]$,

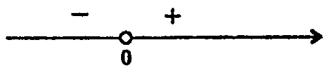


убывает при $x \in (-\infty;\ 0] \cup$
$\cup [1;\ 2]$, $x_{min} = 0$, $x_{min} = 2$, $x_{max} = 1$, $f'(3) > 0$, $f(0) = 0$,
$f(1) = 1$, $f(2) = 0$;

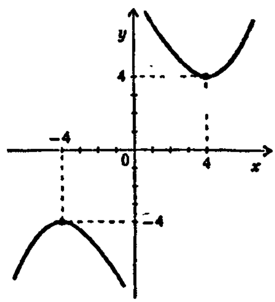
б) $f(x) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{16 + x^2}{2x}$;

1) $D(f): x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$; 2) $E(f): y \in (-\infty;\ 4) \cup (4;\ \infty)$;

3) нулей нет;
4) знакопостоянство:
$y > 0$ при $x > 0, y < 0$ при $x < 0$;



5) $f(-x) = \dfrac{16 + (-x)^2}{2(-x)} = -\dfrac{16 + x^2}{2x} = -f(x)$ −
нечетная;

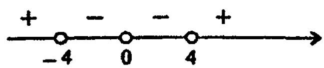


6) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot 2x - (16 + x^2)2}{4x^2} =$

$= \dfrac{4x^2 - 32 - 2x^2}{4x^2} =$

$= \dfrac{2x^2 - 32}{4x^2} = \dfrac{x^2 - 16}{2x^2}$;

7) критические точки: $\dfrac{x^2 - 16}{2x^2} = 0$, $x_1 = 4$, $x_2 = -4$;
$f'(5) > 0$, $f(1) < 0$, $f'(-1) < 0$, $f'(-5) > 0$; $x_{max} = -4$,
$f(-4) = -4$, $x_{min} = 4$,
$f(4) = 4$,



возрастает при $x \in (-\infty;\ -4] \cup [4;\ \infty)$,
убывает при $x \in [4;\ 0) \cup (0;\ 4]$;

в) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$;

1) $D(f) \cdot x \in (-\infty; \infty)$;

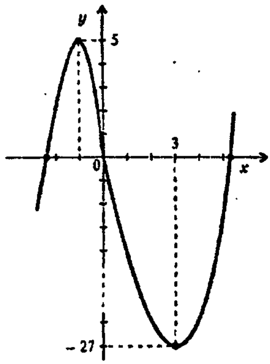
2) $E(f) : y \in (-\infty; \infty)$;

3) нули: $x^3 - 3x - 9x = 0$,

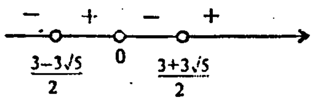
$x(x^3 - 3x - 9) = 0$,

$x_1 = 0$,

$x_2 = \dfrac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \dfrac{3 - 3\sqrt{5}}{2}$;



4) знак: $f(20) > 0$;



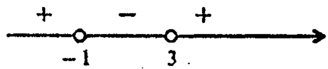
5) $f'(-x) = (-x)^3 - 3(-x^2) - 9(-x) = -x^3 - 3x^2 + 9x \neq f(x) \neq -f(x)$ – ни четная, ни нечетная;

6) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$; найдем критические точки:

$3x^2 - 6x - 9 = 0$,

$x^2 - 2x - 3 = 0$,

$x_1 = 3$, $x_2 = -1$;



возрастает при $x \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty)$, убывает при $x \in [-1; 3]$,

$x_{max} = -1$, $x_{min} = 3$, $f(-1) = 5$, $f(3) = -27$;

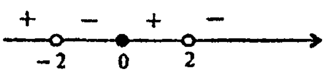
г) $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$;

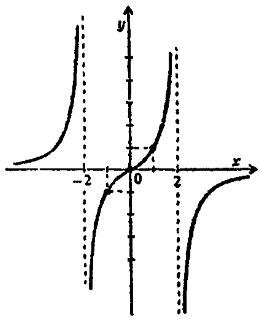
1) $D(f)$ $x \in (-\infty; 2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$;

2) $E(f)$ $y \in (-\infty; \infty)$;

3) нули: $\dfrac{x}{4 - x^2} = 0$, $x = 0$,

4) знак:



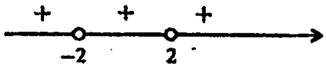


$f(3) < 0, f(1) > 0, f(-1) < 0, f(-3) > 0$;

5) $f'(-x) = \dfrac{-x}{4 - (-x)^2} = -\dfrac{x}{4 - x^2}$ – функция нечетная;

6) $f(x)=\dfrac{4-x^2-x(-2x)}{(4-x^2)^2}=\dfrac{4-x^2+2x^2}{(4-x^2)^2}=\dfrac{x^2+4}{(4-x^2)^2}$;

$x=\pm 2$ – точки разрыва функции;

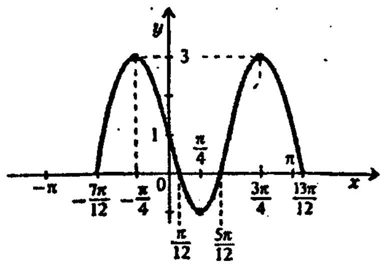


возрастает при $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$, $f(5)>0$,

$f'(0)>0$, $f'(-5)>0$, экстремумов нет.

233.

а) $f(x)=1-2\sin 2x$;



1) $D(f): x\in(-\infty;\infty)$;

2) $E(f): y\in[-1;3]$;

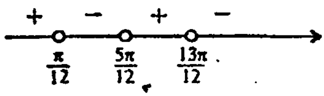
3) нули: $1-2\sin 2x=0$,

$\sin 2x=\dfrac{1}{2}$, $2x=$

$=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$,

$x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$,

4) знак:

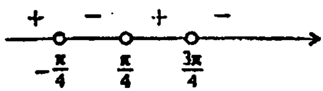


5) $f(-x)=1-2\sin(-2x)=1+2\sin 2x\neq f(x)\neq -f(x)$ – ни четная, ни нечетная;

6) $f'(x)=-4\cos 2x$;

критические точки: $-4\cos 2x=0$, $2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$, $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$,

$n\in Z$; возрастает при



$x\in\left[-\dfrac{3\pi}{4}+\pi n;\ -\dfrac{\pi}{4}+\pi n\right],\ n\in Z$,

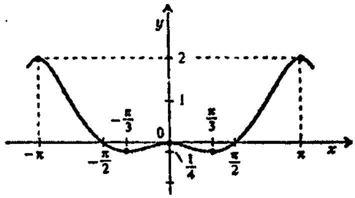
убывает при $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ \dfrac{\pi}{4}+\pi n\right],\ n\in Z$,

$x_{max}=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$, $x_{min}=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$, $f(-\dfrac{\pi}{4}+\pi n)=3,\ n\in Z$,

$f(\dfrac{\pi}{4}+\pi n)=-1,\ n\in Z$;

7) периодическая с $T = \pi$;

б) $f(x)=\cos^2 x-\cos x$;



1) $D(f)\quad x\in(-\infty;\ \infty)$;

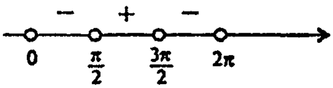
2) $E(f)\quad y\in[-\frac{1}{4},\ 2]$;

3) нули: $\cos^2 x-\cos x=0$,
$\cos x(\cos x-1)=0$,

$\cos x_1=0$ или $\cos x_2-1=0$, $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$,

$\cos x_2=1$, $x_2=2\pi k,\ k\in Z$;

4) знак:



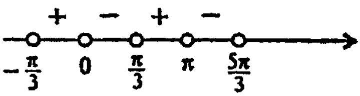
5) $f(-x)=\cos^2(-x)-\cos(-x)=\cos^2 x-\cos x$ – четная;

6) $f'(x)=-2\cos x\cdot\sin x+\sin x=\sin x(1-2\cos x)$;

критические точки: $\sin x(1-2\cos x)=0$, $\sin x_1=0$ или

$1-2\cos x=0$, $x_1=\pi n,\ n\in Z$, $\cos x=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$,

$x_3=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$.



$x_{max}=\pi n,\ n\in Z$,

$x_{min}=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x_{min}=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$;

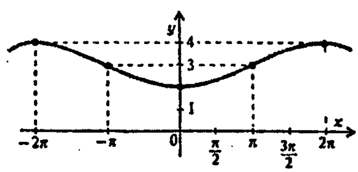
$f\ -\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{4}$, $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$, $f(\pi)=2$; возрастает при

$x\in[-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ 0+2\pi n]\cup[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \pi+2\pi n],\ n\in Z$,

убывает при $x\in[2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n]\cup[\pi+2\pi n;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n;\ ],\ n\in Z$;

7) периодическая с $T = 2\pi$;

в) $f(x)=3-\cos\frac{x}{2}$;



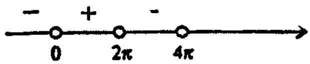
1) $D(f)$: $x \in (-\infty; \infty)$; 2) $E(f)$: $y \in [2; 4]$;

3) нули: $3 - \cos\frac{x}{2} = 0$, $\cos\frac{x}{2} = 3$, нет корней;

4) $y > 0$ при всех $x \in D(f)$;

5) $f(-x) = 3 - \cos(-\frac{x}{2}) = 3 - \cos\frac{x}{2}$ – четная;

6) $f'(x) = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$;

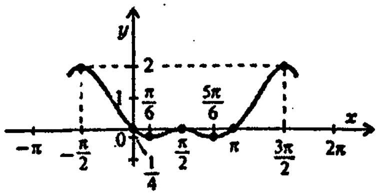


критические точки: $\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$, $\frac{x}{2} = \pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$;

возрастает на $[0 + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n]$, $n \in Z$, убывает на $[2\pi + 2\pi n;\ 4\pi + 2\pi n]$, $n \in Z$; $x_{max} = 2\pi + 4\pi n$, $n \in Z$, $f(2\pi) = 4$, $x_{min} = 4\pi n$, $n \in Z$, $f(0) = 2$.

7) периодическая с Т = 4π;

г) $f(x) = \sin^2 x - \sin x$;



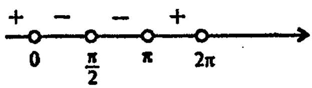
1) $D(f)$: $x \in (-\infty; \infty)$;

2) $E(f)$: $y \in [-\frac{1}{4}; 2]$;

3) нули:
$\sin^2 x - \sin x = 0$, $\sin x(\sin x - 1) = 0$,

$\sin x_1 = 0$ или $\sin x_2 = 1$, $x_1 = \pi n$, $n \in Z$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$;

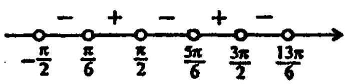
4) знак:



5) $f(x) = \sin^2(-x) - \sin(-x) = \sin^2 x + \sin x \neq f(x) \neq -f(x)$ – ни четная, ни нечетная;

6) $f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x - \cos x$;
критические точки: $2\sin x \cdot \cos x - \cos x = 0$,

$\cos x(2\sin x - 1) = 0$, $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, $\sin x = \frac{1}{2}$,



$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$, возрастает при

$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, убывает при

$x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $n \in Z, \cdot k \in Z$,

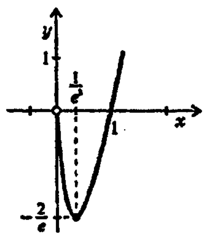
$x_{\max} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,\ x_{\min} = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$;

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4};\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2.$

7) периодическая с $T_0 = 2\pi$.

234.

а) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$; 1) $D(f)$: $x \in (0; \infty)$;



2) $E(f)$ $y \in \left[-\frac{2}{e^2}; \infty\right)$;

3) нули: $\sqrt{x} \ln x = 0,\ x_1 = 0$,

$x_2 = 1;\ 0 \in D(f)$;

4) знак:

5) ни четная, ни нечетная;

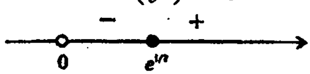
6) $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}$;

критические точки:

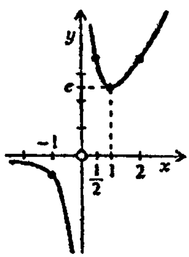
$\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = 0,\ \frac{x \ln x + 2x}{2x\sqrt{x}} = 0,\ x \ln x + 2x = 0,\ x(\ln x + 2) = 0,$

$x = 0,\ \ln x_2 = -2,\ 0 \in D(f),\ x_2 = e^{-2}$; возрастает при $x > e^{-2}$,

убывает при $x \in (0;\ e^{-2}]$; $x_{\min} = e^{-2},\ f\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{2}{e}$.



7) не периодическая.

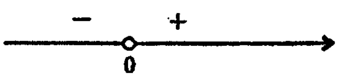


б) $f(x) = \frac{e^x}{x}$, 1) $D(f)\cdot$ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;

2) $E(f)$ $y \in (-\infty; 0) \cup [e; \infty)$;

3) нулей нет;

4) знак:



$y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$;

5) $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{-x} = -\dfrac{1}{xe^{x}} \neq f(x) \neq -f(x)$ – ни четная, ни нечетная;

6) $f'(x) =$ критические точки:

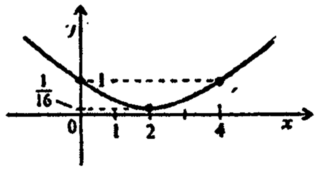
$\dfrac{e^{x}x - e^{x}}{x^{2}} = 0$, $\dfrac{e^{x}(x-1)}{x^{2}} = 0$, $x = 1$,

убывает при $x \in (-\infty; 0)$ и $(0; 1]$, возрастает при

$x \in [1; \infty)$; $x_{\min} = 1$, $f(1) = e$;

7) не периодическая;

в) $f(x) = 2^{x^2-4x}$;



1) $D(f)$: $x \in (-\infty; \infty)$;

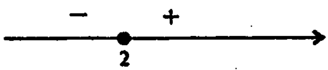
2) $E(f)$: $y \in [\frac{1}{16}; \infty)$;

3) нулей нет;

4) $y > 0$ при всех $x \in D(f)$;

5) $f(-x) = 2^{(-x)^2-4(-x)} = 2^{x^2+4x} \neq f(x) \neq -f(x)$ – ни четная, ни нечетная;

6) $f'(x) = 2^{x^2-4x} \cdot \ln 2 \cdot (2x-4)$;



$2^{x^2-4x} \cdot \ln 2 \cdot (2x-4) = 0$,

возрастает при $x \in [2; \infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 2]$,

$x_{\min} = 2$, $f(2) = \dfrac{1}{16}$;

7) не периодическая;

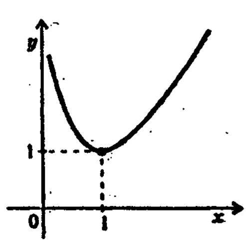
г) $f(x) = x - \ln x$;

1) $D(f)$: $x \in (0; \infty)$; 2) $E(f)$: $y \in [1; \infty)$; 3) нулей нет;

4) знак $y > 0$ при всех x;

5) ни четная, ни нечетная;

6) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$;



критические точки:

$\dfrac{x-1}{x} = 0$, $x = 1$,

убывает при $x \in (0; 1]$,

возрастает при $x \in [1; \infty)$,

$x_{\min} = 1$, $f(1) = 1$;

7) не периодическая.

235. а) Найдем значения функции на концах промежутка:

$f(1) = 18\cdot 1+8\cdot 1-3\cdot 1 = 18+8-3 = 23$, $f(3) = 18\cdot 9+8\cdot 27-3\cdot 81 = 135$.

Критические точки функции:

$f'(x) = 36x+24x^2-12x^3$, $36x+24x^2-12x^3 = 0$,

$3x+2x^2-x^3$, $x(3+2x-x^2) = 0$, $x_1 = 0$,

$x^2-2x-3 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$, $-1 \in [1; 3]$.

Значение функции в критической точке: $f(0) = 0$.

Ответ наибольшее значение функции равно 135, наименьшее – 0.

б) $f(0) = 2\cos 0-\cos 0 = 2-1 = 1$, $f(\pi) = 2\cos\pi-\cos 2\pi = -2-1 = -3$,

$f'(x) = -2\sin x+2\sin 2x$, $-2\sin x+2\sin 2x = 0$, $-2\sin x+4\sin x\cdot\cos x = 0$,

$-2\sin x(1-2\cos x) = 0$, $\sin x = 0$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{3}$,

$f(\pi) = -3$. $f(\frac{\pi}{3}) == 2\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3} = 1\frac{1}{2}$.

в) $f(x) = \frac{2}{x}+x^2$ $[\frac{1}{2}; 1]$,

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4+\frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}$, $f(1) = \frac{2}{1}+1 = 3$, $f'(x) = -\frac{2}{x^2}+2x$,

$f'(x) = 0$, $-\frac{2}{x^2}+2x = 0$. $-2+2x^3 = 0$, $x^3 = 1$, $x = 1$, $f(1) = 3$.

г) $f(x) = \sin x-x$, $[-\pi; \pi]$, $f(-\pi) = \sin(-\pi)-(-\pi) = \pi$,

$f(\pi) = \sin\pi = -\pi$, $f'(x) = \cos x-1$, $\cos x-1 = 0$, $\cos x = 1$, $x = \frac{\pi}{2}$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

Ответ наибольшее значение функции π, наименьшее $-\pi$.

236. Если первое слагаемое x, то второе слагаемое $10 - x$. Исследовав функцию $y = x^3 + (10-x)^3$ на $[0; 10]$, найдем её а) наибольшее; б) наименьшее значения на этом промежутке.

$f(0) = 1000$, $f(10) = 1000$, $f'(x) = 60x-300$, $60x-300 = 0$, $x = 5$;

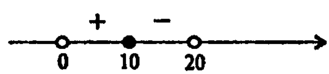
$f(5) = 125 + 125 = 250$.

237. Пусть первый катет x см, тогда второй $20-x$ см. Исследуем функцию $S(x) = \frac{1}{2}x(20-x)$, равную площади этого треугольника, найдем её наибольшее значение на $D(S)$.

$S'(x) = 10-x$, $S'(15)<0$, $S'(5)>0$,

10 – точка максимума.

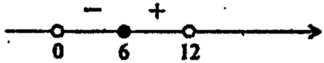
Ответ I, II катеты по 10 см



238. Пусть одна диагональ x см, вторая $12-x$ см. Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон.

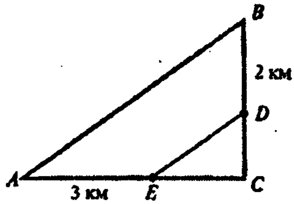
$P(x)=x^2+(12-x)^2$ на $D(P)$.

$P'(x)=4x-24$, $4x-24=0$, $x=6$,



$x=6$ – точка минимума, значит, $S(6)=72$ – нименьшее значение.
Ответ: 72 см^2.

239.



Пусть первая машина находится в пункте B, а вторая в пункте A. Когда первая машина прибудет в пункт D, а вторая машина в пункт E. Это время обозначим t.

$DC=2-40t$, $EC=3-50t$,

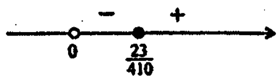
$DE=\sqrt{(2-40t)^2+(3-50t)^2}$.

Рассмотрим функцию $S(t)=\sqrt{(2-40t)^2+(3-50t)^2}$ и найдем её наименьшее значение на $M(S)$.

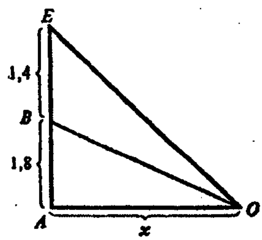
$$S'(t)=\frac{8200t-460}{2\sqrt{(2-40t)^2+(3-50t)^2}},\ 8200t-460=0,\ t=\frac{23}{410},$$

$$(2-40t)^2+(3-50t)^2=4-160t+1600t^2+9-300t+2500t^2=4100t^2-460t,$$

$\frac{23}{410}$ – точка минимума, значит, $S\left(\frac{23}{410}\right)$ – наименьшее.



240.



Пусть наблюдатель находится за x м от стены в точке O. $\angle EOB$;

$\angle EOB=\angle EOA-\angle BOA$, поэтому:

$\operatorname{tg}\angle EOB=\operatorname{tg}(\angle EOA-\angle BOA)=$

$$=\frac{\frac{3,2}{x}-\frac{1,8}{x}}{1+\frac{3,2}{x}\cdot\frac{1,8}{x}}=\frac{1,4x}{x^2+5,76},$$

$f(x)=\frac{1,4x}{x^2+5,76}$. Так как $0<\angle EOB<\frac{\pi}{2}$ и при $\alpha\in(0;\ \frac{\pi}{2})$; $\operatorname{tg}\alpha$ возрастает, то найдем x, при котором $f(x)$ принимает наибольшее значение на $(0;\ \infty)$.

$$f'(x)=\frac{(x^2+5{,}76)-x\cdot 2x}{(x^2+5{,}76)^2}\cdot 1{,}4=\frac{1{,}4(5{,}76-x^2)}{(x^2+5{,}76)^2};\quad f'(x)=0 \text{ при } x=2{,}4.$$

При $x\in(2{,}4;\ \infty)$ $f'(x)<0$, при $x\in(2{,}4;\ \infty)$ $f(x)<f(2{,}4)$. аналогично, $f(x)<f(2{,}4)$ для $x\in(0;\ 2{,}4)$. Значит, $f_{max}=f(2,\ 4)$.

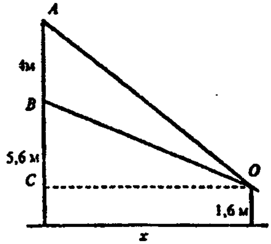
241.

Пусть наблюдатель находится за x м от статуи в точке O.

$\angle AOB=\angle AOC-\angle BOC$, $BC=4$ м.

$tg\angle AOB=tg(\angle AOC-\angle BOC)=$

$$=\frac{\frac{8}{x}-\frac{4}{x}}{1+\frac{8}{x}\cdot\frac{4}{x}}=\frac{4x}{x^2+32}=f(x).$$



$\angle AOB\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, а на $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ $\mathrm{tg}\alpha$ возрастает.

$$f'(x)=\frac{4(x^2+32)-4x\cdot 2x}{(x^2+32)^2}=\frac{128-4x^2}{(x^2+32)^2}=\frac{4(32-x^2)}{(x^2+32)^2};$$

$f'=0$ при $x=\pm\sqrt{32}=\pm4\sqrt{2}$. $f_{max}=f(4\sqrt{2})$. Ответ: $4\sqrt{2}$ м.

242. По теореме Пифагора $R^2=l^2-h^2$, $R^2=400-h^2$, где l – образующая; R – радиус оснований; h – высота конуса. Объем конуса равен: $V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi(400h-h^3)$ (см³). Таким образом, нужно найти наибольшее значение функции $f(h)=400h-h^3$ на $[0;\ 20]$.

$f'(h)=400h-h^3$, $f'(h)=0$ при $h=\frac{20}{\sqrt{3}}$. Имеем $f(0)=f(20)=0$, а $f\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)>0$, поэтому наибольшее значение $f(h)$ при $h=\frac{20}{\sqrt{3}}$.

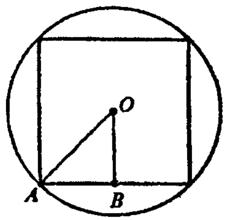
243.

Из теоремы Пифагора:

$\Delta AOB: AB^2=AO^2-BO^2$, т.е.

$r^2=R^2-\frac{h^2}{4}$, где r – радиус основания цилиндра; h – высота;

$V=\pi r^2h=\pi(R^2h-\frac{h^3}{4})$.

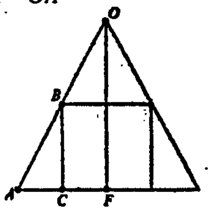


Определим наибольшее значение функции $V(h) = \pi(R^2h - \frac{h^3}{4})$ на $[0; 2R]$.

$V'(h) = \pi(R^2 - \frac{3}{4}h^2)$, $V'(h) = 0$ при $3h^2 = 4R^2$, т.е. при $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Т.к. как $V(0) = V(2R) = 0$, а $V\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = V_{\max}$, то функция $V(h)$ достигает наибольшего значения при $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Ответ: $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

244. Пусть h высота цилиндра, тогда $\frac{r}{R} + \frac{h}{H} = \frac{OB}{OA} + \frac{AB}{OA} = 1$.



Преобразовав, получим $h = \frac{(R-r)H}{R}$. Далее полная поверхность цилиндра равна:

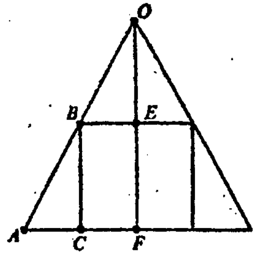
$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi\left(r^2 + \frac{r(R-r)H}{R}\right) =$

$= 2\pi\frac{r^2(R-H) + rRH}{R}$

Найдем наибольшее значение $S(r)$ при $V \in (0; \text{R})$. Функция S квадратичная при $R \neq H$, поэтому она может достигать наибольшего значения, если «ветви» параболы направлены вниз и абсцисса r_0 вершины параболы лежит на этом интервале.

$r_0 = -\frac{RH}{2(R-H}$, и: 1) $R - H < 0$ и 2) $-\frac{RH}{2(R-H} < R$, т.е. $H < 2(H-R)$, значит $R < \frac{H}{2}$. При $R = H$ получаем, что $S(r) = 2\pi rH$, функция не имеет наибольшего значения на $(0; \text{R})$. Ответ: $R = H$.

245. Пусть h и r высота и радиус основания цилиндра, соответственно, а H и R высота и радиус основания конуса. Получим:



$\frac{r}{R} + \frac{h}{H} = \frac{OB}{OA} + \frac{AB}{OA} = 1$, откуда

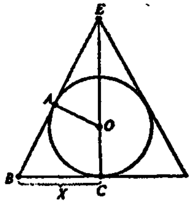
$H = \frac{Rh}{R-2}$, $V(R) = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{\pi R^2 h}{3(R-r)}$.

Найдем наименьшее значение функции $V(R)$ на $(2; \infty)$.

$V'(R) = \frac{\pi h(2R^3 - 3R^2 r)}{3(R-r)^2}$;

$V'(R)=0$ при $2R^3=3R^2r$, $R=1{,}5r$. Итак, $V(1{,}5r)=V_{\min}$ на $(r;\infty)$, так как V убывает на $(r;\ 1{,}5r)$ и возрастает на $[1{,}5;\infty)$.

246.



Рассмотрим осевое сечение конуса.

$\Delta OEA \propto \Delta BEC$.

Отсюда: $\frac{OA}{EO}=\frac{BC}{EB}$, т.е.

$\frac{R}{H-R}=\frac{x}{\sqrt{H^2+x^2}}$, значит, $\frac{R^2}{(H-R)^2}=\frac{x^2}{H^2+x^2}$.

$R^2H^2+R^2x^2=(H-R)^2x^2$, $x^2((H-R)^2-R^2)=R^2H^2$, откуда

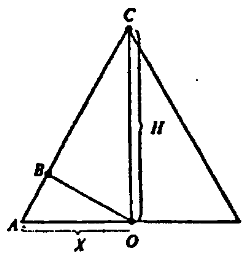
$x^2=\frac{R^2H}{H-2R}$. Таким образом, $V=\frac{1}{3}\pi x^2H=\frac{1}{3}\frac{\pi R^2H^2}{H-2R}$.

Найдем наименьшее значение $V(H)$ на $(2l;\infty)$.

$V'(H)=\frac{\pi R^2(H^2-4RH)}{3(H-2R)^2}$ и $V'(H)=0$ при $H=4R$. V убывает при $H\in(2R;4R)$ и возрастает при $H\in(4R;\infty)$, значит $V(4R)=V_{\min}$ на $(2R;\infty)$. Ответ: $4R$.

247. Рассмотрим осевое сечение конуса. $\Delta AOC \propto \Delta OBC$, значит:

$\frac{x^2}{\sqrt{H^2+x^2}}=\frac{R}{H}$, поэтому $x^2=\frac{H^2R^2}{H^2-R^2}$;



$V(H)=\frac{1}{3}\pi x^2H=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot\frac{H^3}{H^2-R^2}$;

$$V'(H)=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2((H^2-R^2)3H^2-H^3 2H)}{(H^2-R^2)}=$$

$$=\frac{\pi R^2(H^4-3H^2R^2)}{3(H^2-R^2)^2}.$$

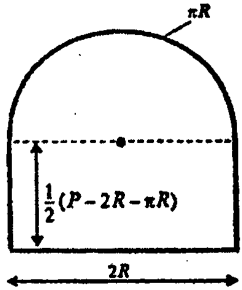
$V'(H)=0$ если $H=R\sqrt{3}$, Отьет: $H=R$.

248. $h^2=D^2-b^2$. Прочность балки R выражается формулой $R=kbh^2$. Также $R(b)=kb(D^2-b^2)=kb(1600-b^2)$. Найдем наибольшее значение функции $R(b)$ на промежутке $[0;\ 40]$.

$R'(b)=k(1600-3b^2)$ и $R'(b)=0$ при $b=\frac{40}{\sqrt{3}}$.

$R(0)=R(40)=0,\quad R\left(\frac{40}{\sqrt{3}}\right)>0$, значит, наибольшее значение R достигает при $b=\frac{40}{\sqrt{3}}$, при этом $h=40\sqrt{\frac{2}{3}}$.

249.



Пусть периметр равен P. Площадь окна

$S(R)=2R\cdot\frac{1}{2}(P-2R-\pi R)+\frac{1}{2}\pi R^2=$

$=PR-2R^2-\pi R^2+\frac{1}{2}\pi R^2=PR-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)R^2.$

Функция $S(R)$ – квадратичная $a_0<0$, следовательно, имеет точку максимума:

$S'(R)=P-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2R=P-(4+\pi)R,\quad S'(R)=0$

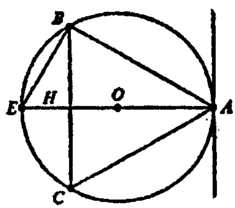
при $R=\frac{P}{4+\pi}$.

Тогда $\frac{1}{2}(P-(2+\pi)R)=\frac{1}{2}(P-\frac{2+\pi}{4+\pi}P=\frac{1}{2}P\cdot\frac{4+\pi-2-\pi}{4+\pi}=\frac{P}{4+\pi}$, т.е. прямоугольная часть окна на самом деле имеет форму квадрата.

250.

Пусть BC $2x$, а AH y. Тогда $S=xy$. Далее в прямоугольном ΔABE, поэтому $BH^2=EH\cdot HA$, или $x^2=y(2R-y)$ и $S^2=x^2y^2=y^3(2R-y)$.

Найдем наибольшее значение функции $f(y)=y^3(2R-y)$ на $[0;\ 2R]$.



$f'(y)=-4y^3+6Ry^2$, $f'(y)=0$ при $y=0$ и

$y=1{,}5R$. $f(0)=f(2R)=0$, $f(1{,}5R)=\frac{27}{16}R^4$.

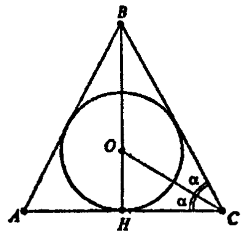
Таким образом, площадь треугольника наибольшая, если хорда проведена на расстоянии $1{,}5R$ от точки касания.

Ответ: $1{,}5R$ от точки касания.

251.

Если основание треугольника $2b$, и угол при основании 2α, то $r=OH=HC\cdot\operatorname{tg}\alpha=b\operatorname{tg}\alpha$. Выразим b через заданную площадь S треугольника: $S=0{,}5\cdot AC\cdot BH=b\cdot b\operatorname{tg}\alpha$, значит, $b^2=\frac{S}{\operatorname{tg}2\alpha}$. Найдем наибольшее значение квадрата радиуса:

$$r^2 = b^2\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{S\operatorname{tg}^2\alpha}{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{S(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}.$$



Пусть $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha$ $u(\alpha)$. Найдем наибольшее значение функции $u(\alpha)$ на $[0;\ \frac{\pi}{4}]$.

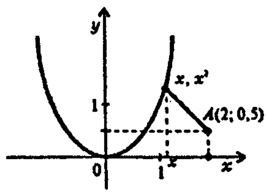
$$u'(a) = \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{3\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha};$$

$u'(a) = 0$ при $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, т.е. при $\alpha = \pi k \pm \frac{\pi}{6}$, $k \in Z$. $x_0 = \frac{\pi}{6}$,

$x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Далее: $u(0)=u(\frac{\pi}{4})=0$ и $u\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. $u_{\max}(\alpha) = u\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Угол при вершине равен $\pi - 4\alpha = \frac{\pi}{3}$.

252.

Расстояние между точкой на параболе и данной точкой A равно: $r(x) = \sqrt{(2-x)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}$.



$f(x) = r^2(x)$; так как $r(x) > 0$ для всех x, их минимумы должны совпадать.

$f'(x) = 2(2-x)(-1) + 2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\cdot 2x = -4 + 2x + 4x - 2x = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$, $f'(x) = 0$ при $x = 1$, причем при $x < 1$ имеем $f'(x) < 0$, при $x > 1$ имеем $f'(x) > 0$, значит $x = 1$ – точка минимума функции $f(x)$ и, следовательно, функции $r(x)$. Ответ: $(1;\ 1)$.

253. Если сторона основания x, то площадь основания $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$, а объем равен: $\frac{hx^2\sqrt{3}}{4}$ (h – высота призмы), значит $h = \frac{4V}{x^2\sqrt{3}}$. Полная поверхность $S(x)$ $x \in (0;\ \infty)$. $S'(x) = x\sqrt{3} - \frac{4V\sqrt{3}}{x^2}$. $S'(x) = 0$ при $x^3 = 4V$. $S(x)$ убывает при $x \in (0;\ \sqrt[3]{4V})$ и возрастает при $x \in (\sqrt[3]{4V};\ \infty)$, значит $S(\sqrt[3]{4V})$ – наименьшее значение S на $(0; \infty)$. Ответ: $\sqrt[3]{4V}$

23. Применения производной в физике и геометрии

254. а) $x_1(t)=2\frac{2}{3}t^3,\quad x^2(t)=2t-3$;

$x_1'(t)=8t^2,\quad x_2'(t)=2,\quad v_1(t)<v_2(t)$ при

$8t^2<2,\quad 4t^2<1,\quad t^2<\frac{1}{4},\quad -\frac{1}{4}<t<\frac{1}{4}$.

б) $x_1(t)=9t^2+1,\quad x_2(t)=t^3.\quad v_1(t)=18t,\quad v_2(t)=3t^2,\quad v_1(t)<v_2(t)$ при

$18t<t^2,\quad t^2-18t>0,\quad t(t-18)>0,\quad t>0$ и $t>18$.

255. $\varphi(t)=0{,}1t^2-0{,}5t+0{,}2;\quad \omega(t)=\varphi'(t)=0{,}2t-0{,}5;$

$\omega(20)=0{,}2\cdot 20-0{,}5=3{,}5\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)$.

256.

$r'(t)=0{,}01(\text{см/с}),\ S(t)=\pi r^2(t),\ S'(t)=2\pi r(t)r'(t);$ при $r=2$ см

$S'=2\pi\cdot 2\cdot 0{,}01=0{,}04\pi\ \text{см}^2/\text{с}$.

257.

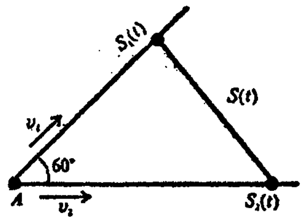
$s_1(t)=5t,\quad s_2(t)=2t^2-t$.

Найдем расстояние между телами

$s^2(t)=s_1^2(t)+s_2^2(t)-$

$-2s_1(t)s_2(t)\cdot\cos 60^\circ=$

$=s_1^2(t)+s_2^2(t)-s_1(t)s_2(t)$,



$$s(t)=\sqrt{s_1^2(t)+s_2^2(t)-s_1(t)s_2(t)}=\sqrt{25t^2+(2t^2-t)^2-5t(2t^2-t)}=$$

$$=\sqrt{25t^2+4t^4-4t^3+t^2-10t^3+5t^2}=\sqrt{4t^4-14t^3+31t^2};$$

скорость удаления тел друг от друга равна:

$$s'(t)=\frac{1}{2}(4t^4-14t^3+31t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(16t^3-42t^2+62t)=\frac{2(8t^3-21t^2+31t)}{2\sqrt{4t^4-14t^3+31t^2}}=$$

$$=\frac{t(8t^2-21t+31)}{t\sqrt{4t^2-14t+31}}=\frac{8t^2-21t+31}{\sqrt{4t^2-14t+31}}.$$ При $t=3$:

$$s'(3)=\frac{8\cdot 9-21\cdot 3+31}{\sqrt{4\cdot 9-14\cdot 3+31}}=\frac{72-63+31}{\sqrt{36-42+31}}=\frac{40}{\sqrt{25}}=8\ (\text{км/ч}).$$

258.

Пусть A удалена от нуля на x м,

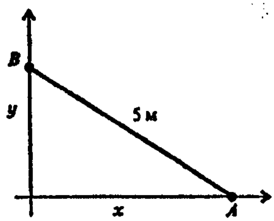
$x(t) = 2t$ (м);

Расстояние от B до начала координат

$y(t) = \sqrt{25 - x^2(t)} = \sqrt{25 - 4t^2}$.

Скорость B равна:

$$y'(t) = \frac{-8t}{2\sqrt{25-4t^2}} = \frac{-4t}{\sqrt{25-4t^2}};$$



в момент, когда $x = 3$ (м), $t = \frac{3}{2}$ (с),

значит, $$y'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{4 \cdot \frac{3}{2}}{\sqrt{25 - 4 \cdot \frac{9}{4}}} = -\frac{6}{\sqrt{25-9}} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

259. $x(t) = 2t$

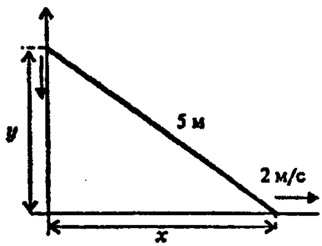
Верхний конец лестницы находится на высоте $y = \sqrt{25 - x^2}$,

$y(t) = \sqrt{25 - 4t^2}$;

скорость движения верхнего конца

$$y'(t) = \frac{1}{2}(25 - 4t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-8t) =$$

$$= \frac{-8t}{2\sqrt{25-4t^2}} = -\frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}};$$



скоростью конца лестницы является $\frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}$; Найдем ускорение:

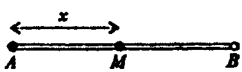
$$y''(t) = \frac{4\sqrt{25-4t^2} - 4t \cdot \frac{-4t}{\sqrt{25-4t^2}}}{\sqrt{25-4t^2}} = \frac{4(25 - 4t^2 + 4t^2)}{(25-4t^2)\sqrt{25-4t^2}} = \frac{100}{\sqrt{(25-4t^2)^3}}.$$

Ответ: $\frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}$; $\frac{100}{\sqrt{(25-4t^2)^3}}$.

260. $m(x) = kx^2$; $m(2) = 10$, $10 = k \cdot 4$, $k = 2{,}5$.

1) $m(12) = 2{,}5 \cdot 144 = 360$; $\rho(x) = m'(x) = 5x$.

2) $\rho(0) = 0$; $\rho(12) = 60$.



Ответ: 1) 360 г; $5x$ г/см; 2) 0 г/см; 60 г/см.

261. $\varphi(t)=kt^2$; при $t=8$ имеем $\varphi(t)=2\pi$, $2\pi=k\cdot 64$, $k=\dfrac{\pi}{32}$.

Угловая скорость колеса равна:

$\omega(t)=\varphi'(t)=\dfrac{\pi}{32}\cdot 2t=\dfrac{\pi}{16}t$; $\omega(48)=\dfrac{\pi}{16}\cdot 48=3\pi$.

262. $x(t)=-\dfrac{g}{2}t^2+v_0t+x_0$, $v_0=40$ (м/с), $x_0=10$ м, $g=10$ м/с^2;

$x(t)=-5t^2+40t+10$.

а) $x(5)=-5\cdot 25+40\cdot 5+10=210-125=85$ (м).

б) Тело в наивысшей точке при $v(t)=0$,

$v(t)=x'(t)=-10t+40$, $-10t+40=0$, $t=4$с;

$x(4)=-5\cdot 16+40\cdot 4+10=-80+160+10=90$ (м).

263. Угловой коэффициент касательной – $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$. Так как $\alpha=45°$, то $\operatorname{tg}\alpha=1$, найдем x_0, в которой

а) $f'(x_0)=1$ и б) $f'(x_0)=-1$.

$f'(x_0)=-x$. а) $-x=1$, $x=-1$, $f(-1)=-1{,}5$; б) $-x=-1$, $x=1$, $f(1)=-1{,}5$.

Ответ: а) $x_0=-1$, б) $x_0=1$, $M_1(-1;-1{,}5)$; $M_2(2;-1{,}5)$.

264. $\operatorname{tg}135°=-1$.

$f'(x)=3x^2+x-1$, $3x^2+x-1=-1$, $3x^2+x=0$, $x_1=0$, $x_2=-\dfrac{1}{3}$.

265. $f'(x)=3x^2+x-1$, $3x^2+x+1=0$, $D<0$, нет корней; угловой коэффициент касательной не обращается в ноль, касательная не параллельна оси Ox, поэтому пересекает эту ось.

266. $f'(x)=5x^4+2$; $f'(x)$ принимает положительные значения при всех x, значит, угловые коэффициенты всех касательных положительны, все касательные образуют с осью Ox острый угол.

267. $(x+2)^2=2-x^2$, $x^2+4x+4=2-x^2$, $2x^2+4x+2=0$, $x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$, $x=-1$;

при $x=-1$ $f(x)=g(x)$, это и означает, что точка с абсциссой $x_0=-1$ есть общая точка для графиков этих функций. Запишем уравнения касательных и графиков этх функций в точках с абсциссой, равной -1.

$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

$f'(x)=2x+4$, $f'(-1)=2$, $f(-1)=1$, $y_1=2(x+1)+2=2x+2+1=2x+3$;

$g'(x)=-2x$, $g'(-1)=2$, $g(-1)=1$, $y_2=2(x+1)+1=2x+3$

$y_1=2x+3$ и $y_2=2x+3$. Графики имеют общую касательную.

24. Первообразная

268. а) $F(x)=-4\cos x+\frac{1}{3}\sin 3x+c$; б) $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^{-4}}{4}+\frac{x^{3+\sqrt{3}}}{3+\sqrt{3}}+c$;

в) $F(x)=2x+3\ln|x-1|+c$; г) $F(x)=\mathrm{tg}2x-\mathrm{ctg}3x+c$.

269. Найдем c.

а) $F(x)=2\ln|x|+c,\quad 2=2\ln\frac{1}{e}+c,\quad 2=-2+c,\quad c=4$; $F(x)=2\ln|x|+4$

б) $F(x)=-\frac{1}{x}+\sin x+c,$

$-\frac{2}{\pi}=-\frac{1}{\frac{\pi}{2}}+\sin\frac{\pi}{2}+c,\quad -\frac{2}{\pi}=-\frac{2}{\pi}+1+c,\quad c=-1$; $F(x)=-\frac{1}{x}+\sin x-1$

в) $F(x)=-\frac{1}{3x^3}+c,\quad -3=-\frac{1}{24}+c,\quad c=-2\frac{23}{24}$; $F(x)=-\frac{1}{3x^3}-2\frac{23}{24}$;

г) $F(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+c,\quad 1=-\frac{1}{2}\cos 0+c,\quad 1=-\frac{1}{2}+c,\quad c=1{,}5$;

$F(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+1{,}5$.

270. $f(x)=2x-3$, $f(x)=x^2-3x+c$. Найдем c: $f(2)=2$, откуда $c=4$

Ответ: $f(x)=x^2-3x+4$.

271. $F(x)=x^3+C$, значит при $x=2$ и $y=3$. Получаем $3=2^3+C$
$C=-5$; $y=x^3-5$.

272. $x'(t)=\sin t\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t$, поэтому $x(t)=-\frac{1}{4}\cos 2t+c$.

$3=-0{,}25\cos\frac{\pi}{2}+c$, откуда $c=3$; $x(t)=-0{,}25\cos 2t+3$.

25. Интеграл

273. а) $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\cos(1{,}5\pi+0{,}5x)dx=2\sin(1{,}5\pi+0{,}5x)\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}=$

$=2\sin(1{,}5\pi+\frac{3\pi}{4})-2\sin(1{,}5\pi+\frac{\pi}{2})=-2\cos\frac{3\pi}{4}-2\sin 2\pi=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-0=\sqrt{2}$;

б) $\int_1^2(x^{-2}+x^2)dx=\left(-\frac{1}{x}+\frac{x^3}{-3}\right)\Big|_1^2=-\frac{1}{2}+\frac{8}{3}+1-\frac{1}{3}=\frac{17}{6}=2\frac{5}{6}$;

в) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 3x - \sin 2x)dx = \left(\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} =$

$= \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{6} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right) - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{12} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4};$

г) $\int\limits_{-5}^{-2} (5 - 6x - x^2)dx = \left(5x - 3x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-5}^{-2} = -10 - 12 + \frac{8}{3} - (-25 - 75 + \frac{125}{3}) =$

$-22 + \frac{8}{3} + 100 - \frac{125}{3} = 78 - 39 = 39.$

274. а) $\int\limits_0^a \cos\frac{x}{2}dx = 2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^a = 2\sin\frac{a}{2} - 2\sin 0 = 2\sin\frac{a}{2};$

1) наибольшее значение: 2 при $a = \pi + 4\pi n$ – интеграл равен 2,

2) наименьшее значение: –2 при $a = -\pi + 4\pi n$ – интеграл равен –2.

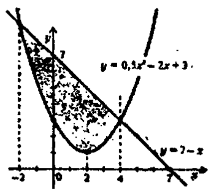
б) $\int\limits_0^{a+\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Bigg|_0^{a+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\sin 2(a + \frac{\pi}{2}) - \sin 2\cdot 0) =$

$= \frac{1}{2}\sin(\pi + 2a) = -\frac{1}{2}\sin 2a;$

1) наибольшее значение: $\frac{1}{2}$; $a = -\frac{\pi}{4} + \pi n$;

2) наименьшее значение: $-\frac{1}{2}$; $a = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

275. а)



Пределы интегрирования:

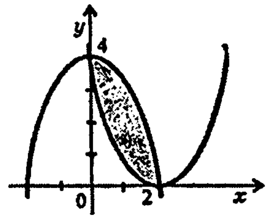
$0.5x^2 - 2x + 3 = 7 - x$, $0.5x^2 - 2x + 3 + x - 7 = 0$, $x^2 - 2x - 8 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$;

$$S=\int_{-2}^{4}(7-x)dx-\int_{-2}^{4}(0.5x^2-2x+3)=\left(7x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{4}-\left(\frac{x^3}{6}-x^2+3x\right)\Bigg|_{-2}^{4}=$$

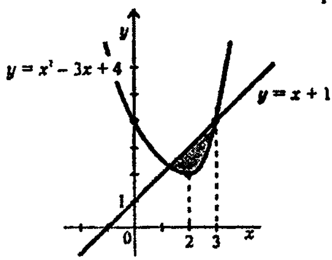
$$=28-8+14+2-(\frac{64}{6}-16+12+\frac{8}{6}-4+6)=10;$$

б) $$S=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2-\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=8-\frac{8}{3}-\left(\frac{8}{3}-8+8\right)=8-\frac{16}{3}=2\frac{2}{3};$$



в) Пределы интегрирования:

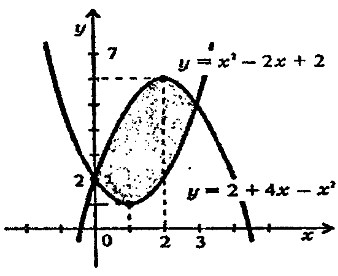


$x^2-3x+4=x+1,\quad x^2-4x+3=0,\quad x_1=3,\quad x_2=1;$

$$S=\int_1^3(x+1)dx-\int_1^3(x^2-3x+4)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_1^3-\left(\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=\frac{9}{2}+3-\frac{1}{2}-1-\left(9-\frac{27}{2}+12-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4\right)=6-4\frac{2}{3}=1\frac{1}{3};$$

г) Пределы интегрирования:

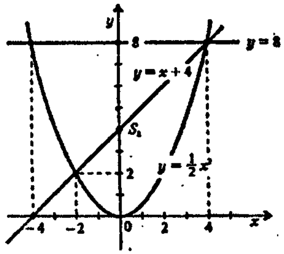


$x^2-2x+2=2+4x-x^2,\quad 2x^2-6x=0,\quad 2x(x-3)=0,\quad x_1=0,\ x_2=3,$

$$S=\int_0^3(2+4x-x^2)dx-\int_0^3(x^2-2x+2)dx=\left(2x+2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3-\left(\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right)\Big|_0^3=$$

$$=6+18-9-(9-9+6)=15-6=9.$$ **Ответ:** $S=9.$

276.



$$S_1=\int_{-4}^{4}8dx-\int_{-2}^{4}(x+4)dx=8x\Big|_{-4}^{4}-\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_{-2}^{4}=$$

$$=32+32-(8+16-2+8)=64-30=34;$$

$$S_2=\int_{-2}^{4}(x+4)dx-\int_{-2}^{4}\frac{1}{2}x^2dx=30-\left(\frac{x^3}{6}\right)\Big|_{-2}^{4}=30-\left(\frac{64}{6}+\frac{8}{6}\right)=30-12=18;$$

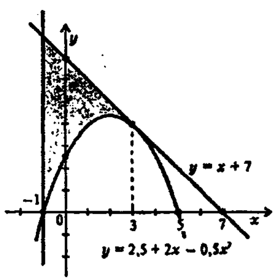
$$S_3=\int_{-4}^{-2}\frac{1}{2}x^2dx=\frac{x^3}{6}\Big|_{-4}^{-2}=-\frac{8}{6}+\frac{64}{6}=\frac{56}{6}=9\frac{1}{3};$$

$$S_{\text{I части}}=34-9\frac{1}{3}=24\frac{2}{3},\ S_{\text{II части}}=18.$$

277. Уравнение касательной:

$y'=2-x,$

$y'(3)=-1,\quad y(3)=4,\quad y=-1(x-3)+4=-x+7.$



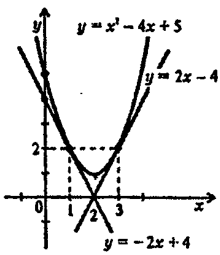
$$S=\int_{-1}^{3}(-x+7)dx-\int_{-1}^{3}(2{,}5+2x-0{,}5x^2)dx=\left(-\frac{x^2}{2}+7x\right)\Bigg|_{-1}^{3}-$$

$$-\left(2{,}5x+x^2-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-1}^{3}=-\frac{9}{2}+21+\frac{1}{2}+7-\left(7{,}5+9-\frac{9}{2}+2{,}5-1-\frac{1}{6}\right)=$$

$$=24-13\frac{5}{6}=10\frac{1}{6}\text{ (кв.ед.)}.$$

778. Уравнения касательных:

$y'(x)=2x-4,\ \ y'(1)=-2,\ \ y(1)=2,\ \ y_1=-2(x-1)+2=-2x+2+2=-2x+4,$

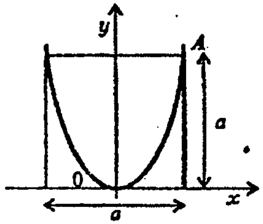


$$S=\int_{1}^{3}(x^2-4x+5)dx-\int_{1}^{2}(2x+4)dx-\int_{2}^{3}(2x-4)dx=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right)\Bigg|_{1}^{3}-$$

$$-(-x^2+4x)\Big|_{1}^{2}-(x^2+4x)\Big|_{2}^{3}=9-18+15-\frac{1}{3}+2-5-(-4+8+1-4)-$$

$$-(9-12-4+8)=2\frac{2}{3}-1-1=\frac{2}{3}.$$

779.



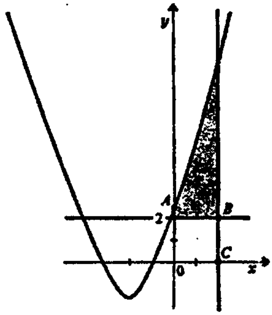
Введем систему координат так, что вершина параболы проходит через точку (0; 0), и уравнение парабола

$$y=kx^2,\qquad k=\frac{4}{a};\qquad y=\frac{4\cdot x^2}{a};$$

$$S_1=2\int_{0}^{a/2}\frac{4}{a}x^2dx=\frac{8}{a}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{0}^{a/2}=\frac{8}{a}\cdot\frac{a^3}{8\cdot 3}=\frac{a^2}{3};$$

$$S_2=a^2-\frac{a^2}{3};\qquad\qquad \frac{S_1}{S_2}=\frac{a^2}{3}\cdot\frac{3}{2a^2}=\frac{1}{2}.$$

280.



$$S=\int_0^2(x^2+4x+a)dx-S_{OABC}=\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+ax\right)\Bigg|_0^2-4=$$

$=\frac{8}{3}+8+2a-4=2a+\frac{20}{3}$, значит, $2a+\frac{20}{3}=12$, поэтому $a=\frac{8}{3}$.

281.

$f'(x)=a\cdot\pi\cos\pi x$;

$$\int_0^2(a\sin\pi x+b)dx=\left(-\frac{a}{\pi}\cos\pi x+bx\right)\Bigg|_0^2=-\frac{a}{\pi}\cdot1+2b+\frac{a}{\pi}=2b.$$

$f'(2)=2,\ 2=a\pi\cos2\pi,\ 2=a\pi,\ a=\frac{2}{\pi}$.

$\int_0^2 f(x)dx=4,\quad 2b=4,\ b=2.\quad$ Ответ: $a=\frac{2}{\pi},\ b=2.$

Учебно-методическое издание

Рылов Арсений Сергеевич
Сапожников Андрей Александрович

Домашняя работа по алгебре и началам анализа за 11 класс

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ 77.99.60.953.Д.013269.11.07 от 13.11.2007 г

Выпускающий редактор *Л.Д. Лаппо*
Дизайн обложки *И.Р. Захаркина*
Компьютерная верстка *М.В. Власова, Н.Н. Балахонцева*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр 1.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7
Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов