ГОСУДАРСТВЕННАЯ ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ

Л.Д. ЛАППО, М.А. ПОПОВ

МАТЕМАТИКА

ГИА 9

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ

2013

- Теоретический курс
- Подробный анализ всех типов заданий
- Задачи для самостоятельного решения с ответами
- Варианты экзаменационных заданий с ответами и подробными разборами решений

ГОСУДАРСТВЕННАЯ ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

Л.Д. Лаппо
М.А. Попов

МАТЕМАТИКА

Рекомендовано ИСМО Российской Академии Образования для подготовки выпускников всех типов образовательных учреждений РФ к сдаче экзаменов в форме ГИА

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ

Теоретический курс

Подробный анализ всех типов заданий

Задачи для самостоятельного решения с ответами

Варианты экзаменационных заданий с ответами и подробными разборами решений

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА, 2013

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Л24

Лаппо, Л.Д.

Л24 Государственная итоговая аттестация (в новой форме). Математика: сборник заданий / Л.Д. Лаппо, М.А. Попов. — М. : Издательство «Экзамен», 2013. — 158, [2] с. (Серия «ГИА. Сборник заданий»)

ISBN 978-5-377-05479-5

Пособие предназначено для учителя и включает все, что может понадобиться учителю-предметнику для подготовки школьников к Государственной итоговой аттестации (в новой форме):

— характеристика основных тем курса, вынесенных на экзамен;
— подробный анализ всех типов тестов и заданий;
— анализ критериев оценки выполнения экзаменационных заданий;
— анализ образцов выполнения заданий;
— разбор типичных ошибок (по результатам проведенных экзаменов);
— методические приемы формирования умений, необходимых для успешной сдачи Государственной итоговой аттестации (в новой форме);
— материалы для проведения предэкзаменационных работ.

Пособие предназначено учителям и методистам, использующим тесты для подготовки учащихся к Государственной итоговой аттестации (в новой форме) 2013 года, оно также может быть использовано учащимися для самоподготовки и самоконтроля.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Формат 84x108/32. Гарнитура «Таймс».
Бумага газетная. Уч.-изд. л. 3,56. Усл. печ. л. 8,4.
Тираж 20 000 экз. Заказ № 12425.

ISBN 978-5-377-05479-5

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

I. Числа и выражения

1. Выражения, преобразования выражений

Числовые выражения составляются из чисел с использованием знаков действий (« + », « – », «·», «:») и скобок. Например, 32 : 4; 21 · 3 + 5; 3·(2 : 0,2 –4) – числовые выражения.

Значением числового выражения называется число, получающееся в результате выполнения всех действий в этом числовом выражении. Например, значения числовых выражений, приведенных выше, равны соответственно 8; 68 и 18.

Выражение, в котором встречается деление на нуль, не имеет числового значения, так как на нуль делить нельзя. Говорят, что такие выражения не имеют смысла.

Выражение, содержащее некоторые переменные величины, называется выражением с переменными (например, $10t$; $20a + 10b$; $3c:d$ и т.д.).

Значение выражения с переменными при данных значениях переменных – это значение числового выражения, которое получится, если в выражение с переменными вместо каждой переменной подставить данное ее значение.

Например, значение выражения $20t + 10b$ при $t = 0{,}1$, $b = 0{,}2$ равно $20 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}2 = 2 + 2 = 4$; значение выражения $3c:d$ при $c = 1$; $d = 3$ равно $(3 \cdot 1):3 = 1$.

Для преобразования выражений применяются основные свойства сложения и умножения чисел:

1) для любых чисел a и b верны равенства $a + b = b + a$, $ab = ba$ (переместительное свойство);

2) для любых чисел a, b и c верны равенства $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(ab)c = a(bc)$ (сочетательное свойство);

3) для любых чисел a, b и c верно равенство $a(b + c) = ab + ac$ (распределительное свойство).

Два выражения называются тождественно равными, если их значения равны при любых значениях переменных.

Тождество – это равенство, верное при любых значениях переменных.

Тождественное преобразование выражения – это замена выражения другим, тождественно равным ему, выражением.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найдите значение выражения $(3:(0{,}2 - 0{,}1) + 4) \cdot 5$.

Решение: 1) $0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}1$;
2) $3:0{,}1 = 30$;
3) $30 + 4 = 34$;
4) $34 \cdot 5 = 170$.

Ответ: 170.

Пример 2. Найдите значение выражения
$(2mx + 3n) \cdot y$ при $x = 1$; $y = 2$; $m = 0{,}5$; $n = 0{,}3$.

Решение: Подставим значения переменных в выражение:
$(2mx + 3n) \cdot y = (2 \cdot 0{,}5 \cdot 1 + 3 \cdot 0{,}3) \cdot 2 = (1 + 0{,}9) \cdot 2 =$
$= 1{,}9 \cdot 2 = 3{,}8$.

Ответ: 3,8.

Пример 3. Вычислите значение выражения
$11{,}2 \cdot 3{,}1 - 11{,}2 \cdot 1{,}1 + 22{,}4 \cdot (-0{,}5)$.

Решение: $11{,}2 \cdot 3{,}1 - 11{,}2 \cdot 1{,}1 + 22{,}4 \cdot (-0{,}5) =$
$= 11{,}2 \cdot (3{,}1 - 1{,}1) - 11{,}2 = 11{,}2 \cdot 2 - 11{,}2 = 11{,}2 \cdot (2 - 1) = 11{,}2$.

Ответ: 11,2.

Пример 4. Упростите выражение
$(3x - 2y - 2) - (x - y) - 4 + 2x + y + 1$.

Решение: $(3x - 2y - 2) - (x - y) - 4 + 2x + y + 1 =$
$= 3x - 2y - 2 - x + y - 4 + 2x + y + 1 =$
$= (3x - x + 2x) - (2y - y - y) - (2 + 4 - 1) = 4x - 5.$
Ответ: $4x - 5$.

2. Степень с натуральным показателем, ее свойства.

Степенью некоторого числа a с натуральным показателем n (n>1) называется выражение $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ раз}}$.

$a^1 = a$. При $a \neq 0$ считают $a^0 = 1$.
Например,
$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$; $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$ и т.д.

Свойства степени с натуральным показателем:

1) для любого положительного числа a: $a^n>0$; $0^n = 0$.

2) для отрицательного числа a: $a^n>0$, если n – четное число и $a^n<0$, если n – нечетное число;

3) $a^2 \geq 0$ для любого числа a;

4) для любого числа a и любых натуральных чисел m и n: $a^m a^n = a^{m+n}$;

5) для любого числа $a \neq 0$ и любых натуральных чисел m и n таких, что $m > n$: $a^m : a^n = a^{m-n}$;

6) для любых чисел a и b и любого натурального числа n: $(ab)^n = a^n b^n$;

7) для любого числа a и любых натуральных чисел m и n: $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$.

Рассмотрим несколько примеров:

Пример 1. Найдите значение выражения: $(-2)^3 \cdot 3^2 + 16^2$.

Решение: Вначале выполним возведения в степень:
$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$; $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$; $16^2 = 16 \cdot 16 = 256$.
Теперь найдем значение выражения:
$(-2)^3 \cdot 3^2 + 16^2 = (-8) \cdot 9 + 256 = 256 - 72 = 184$.

Ответ: 184.

Пример 2. Упростите выражение $2x^2 \cdot x^3 - x^7 : x^2$.

Решение: Пользуясь свойствами 4) и 5), имеем:
$2x^2 \cdot x^3 - x^7 : x^2 = 2x^{2+3} - x^{7-2} = 2x^5 - x^5 = x^5$.

Ответ: x^5.

Пример 3. Упростите выражение $\left(\left(x^2 y\right)^3\right)^4$.

Решение: Пользуясь свойствами 6) и 7), имеем:

$$\left(\left(x^2 y\right)^3\right)^4 = \left(x^2 y\right)^{3\cdot 4} = \left(x^2 y\right)^{12} = \left(x^2\right)^{12} \cdot y^{12} = x^{2\cdot 12} \cdot y^{12} = x^{24} y^{12}.$$

Ответ: $x^{24}y^{12}$.

3. Одночлены, многочлены

Одночленом называется выражение, являющееся произведением чисел, переменных и их степеней.

Например, выражения $2a^2b$, $2x^2 \cdot (-4)^3 yz^2$, $-5x^4$ – одночлены.

Стандартный вид одночлена – это произведение числового множителя, который стоит на первом месте, и степеней различных переменных.

Например, стандартным видом одночлена $(-2)^3 x^4 y \cdot (-3)$ является $24x^2y$.

Коэффициент одночлена – это числовой множитель этого одночлена, записанного в стандартном виде.

Степень одночлена – это сумма показателей степеней всех его переменных. Если одночлен является числом (не содержит переменных), то его степень считают равной нулю.

Многочлен – это выражение, являющееся суммой одночленов (если многочлен состоит из двух членов, его называют двучленом; если из трех – трехчленом).

Стандартный вид многочлена – это сумма одночленов стандартного вида без подобных слагаемых. Наибольшая из степеней одночленов, входящих в многочлен стандартного вида, называется степенью этого многочлена.

Степенью произвольного многочлена называется степень многочлена стандартного вида, тождественно равного исходному многочлену.

Для того, чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и сложить полученные произведения.

Для того, чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго многочлена и сложить полученные произведения.

Разложить многочлен на множители означает представить этот многочлен в виде произведения двух или нескольких многочленов.

Формулы сокращенного умножения:

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

2) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ab + 3ab^2 \pm b^3$;

3) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;

4) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Приведите одночлен $2a^2 \cdot (-3)^2 b^3 \cdot a \cdot a(-2)b$ к стандартному виду, назовите его коэффициент и степень.

Решение:
$2a^2 \cdot (-3)^2 \cdot b^3 \cdot a \cdot (-2) \cdot b = 2 \cdot 9 \cdot (-2)a^2 \cdot a \cdot b^3 \cdot b = -36a^3b^4$.

Коэффициент данного одночлена равен (–36), а его степень равна 4.

Ответ: $-36a^3b^4$; -36; 4.

Пример 2. Упростите выражение $2x(x-3)^2 - (x-1)(2x^2+2)$.

Решение: $2x(x-3)^2 - (x-1)(2x^2+2) =$
$= 2x(x^2 - 6x + 9) - (2x^3 + 2x - 2x^2 - 2) = 2x^3 - 12x^2 + 18x -$
$- 2x^3 + 2x^2 - 2x + 2 = 16x + 2 - 10x^2$.

Ответ: $16x + 2 - 10x^2$.

Пример 3. Разложите на множители многочлен
$x^3 - 8y^2 + 2x^2y + 4xy^2 + 8y - 5x$.

Решение: $x^3 - 8y^2 + 2x^2y + 4xy^2 + 8y - 5x =$
$= (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4) + 2y(x^2 + 2xy + 4) - 5x =$
$= (x - 2y + 2y)(x^2 + 2xy + 4) - 5x = x(x^2 + 2xy + 4 - 5) =$
$= x(x^2 + 2xy - 1)$.

Ответ: $x(x^2 + 2xy - 1)$.

4. Рациональные дроби и их свойства.

Целые выражения – это выражения, составленные из чисел и переменных с использованием действий сложения, вычитания, умножения и деления на число, отличное от нуля.

Дробные выражения допускают также деление на выражение с переменными.

Целые и дробные выражения называют рациональными выражениями.

Допустимые значения переменных – это те значения переменных, при которых выражение имеет смысл.

Рациональная дробь – это дробь, числителем и знаменателем которой являются многочлены.

Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель некоторой рациональной дроби умножить на один и тот же многочлен, не равный тождественно нулю, то получится дробь, равная исходной.

Тождество – это равенство, которое верно при всех допустимых значениях переменных, входящих в это равенство.

Свойства действий с рациональными дробями:

Если a, b, c – многочлены, причем многочлен c не равен нулю тождественно, то верно:

1) $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$;

2) $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.

Если a, b, c, d – многочлены, причем многочлены b и d тождественно не равны нулю, то верно:

3) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$;

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

Если a, b, c, d – многочлены, причем многочлены b, c и d тождественно не равны нулю, то верно:

5) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

Рассмотрим несколько примеров:

Пример 1. Сократите дробь $\frac{x^2-2xy+y^2-1}{x-y+1}$.

Решение:

$$\frac{x^2-2xy+y^2-1}{x-y+1}=\frac{(x-y)^2-1}{x-y+1}=\frac{(x-y-1)(x-y+1)}{x-y+1}=$$
$$=x-y-1$$

Ответ: $x-y-1$.

Пример 2. Упростите выражение $\frac{2x^2-5}{(x-5)^3}-\frac{45}{(x-5)^3}$.

Решение: $\frac{2x^2-5}{(x-5)^3}-\frac{45}{(x-5)^3}=\frac{2(x^2-25)}{(x-5)^3}=$

$$=\frac{2(x-5)(x+5)}{(x-5)(x^2+5x+25)}=\frac{2x+10}{x^2+5x+25}$$

Ответ: $\frac{2x+10}{x^2+5x+25}$.

Пример 3. Упростите выражение $\left(\frac{3a^2}{a-b}-\frac{3a^2}{a+b}\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{4(a+b)^2}$.

Решение: $\left(\frac{3a^2}{a-b}-\frac{3a^2}{a+b}\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{4(a+b)^2}=$

$$=\frac{3a^2(a+b)-3b^2(a-b)}{a^2-b^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{4(a+b)^2}=\frac{3a^3+3a^2b-3ab^2-3b^3}{4(a+b)^2}=$$

$$=\frac{3(a^3-b^3)+3ab(a-b)}{4(a+b)^2}=\frac{3(a-b)(a^2+ab+b^2)+3ab(a-b)}{4(a+b)^2}=$$

$$=\frac{3(a-b)(a^2+2ab+b^2)}{4(a+b)^2}=\frac{3}{4}a-\frac{3}{4}b.$$

Ответ: $\frac{3}{4}a-\frac{3}{4}b$.

Пример 4. Выполните деление: $\frac{x^2-3x}{2y^2}:\frac{x-3}{4y}$.

Решение: $\frac{x^2-3x}{2y^2}:\frac{x-3}{4y}=\frac{x(x-3)\cdot 4y}{2y^2(x-3)}=\frac{2x}{y}$.

Ответ: $\frac{2x}{y}$.

5. Квадратные корни.

Натуральные числа – это числа 1, 2, 3, 4, ..., которые употребляются при счете. Множество натуральных чисел обозначается $\mathbb{N}$.

Целые числа – это натуральные числа, противоположные им числа и число нуль (..., – 4, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, 4, ...). Множество целых чисел обозначается $\mathbb{Z}$.

Рациональные числа – это целые и дробные числа. Множество рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$.

Всякое рациональное число может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Q}$ («$\in$» – знак принадлежности некоторому множеству).

Всякое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби, и обратно: всякая бесконечная десятичная периодическая дробь есть некоторое рациональное число.

Однако рациональные числа – не все числа. Например, число, квадрат которого равен 2 (длина диагонали квадрата со стороной 1) не является рациональным.

Бесконечные десятичные непереодические дроби называют иррациональными числами.

Действительные числа – это рациональные и иррациональные числа. Множество действительных чисел обозначают Ў .

Квадратный корень из числа a – это число, квадрат которого равен a. Например, 4 и – 4 – квадратные корни из 16, т.к. $4^2 = (-4)^2 = 16$.

Арифметический квадратный корень из числа a – это неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают $\sqrt{a}$.

Например, $\sqrt{25} = 5$, т.к. $5 \geq 0$ и $5^2 = 25$; $\sqrt{0} = 0$, т.к. $0 \geq 0$ и $0^2 = 0$.

То есть, $\sqrt{a} = b$, если $b \geq 0$ и $b^2 = a$.

Так как квадрат любого числа – неотрицательное число, то при $a<0$ выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла.

В зависимости от a уравнение $x^2 = a$:

1) не имеет корней при $a<0$;

2) имеет единственный корень, равный нулю, при $a = 0$;

3) имеет два корня $x_1 = -\sqrt{a}$ и $x_2 = -\sqrt{a}$ при $a > 0$.

Свойства арифметического квадратного корня:

1) Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;

2) Если $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

3) При любых значениях *a* верно равенство $\sqrt{a^2} = |a|$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найдите значение выражения
$\left(\sqrt{36} \cdot \sqrt{0{,}01} - \sqrt{0{,}04} \cdot \sqrt{25}\right)^2$.

Решение: $\left(\sqrt{36} \cdot \sqrt{0{,}01} - \sqrt{0{,}04} \cdot \sqrt{25}\right)^2 = (6 \cdot 0{,}1 - 0{,}2 \cdot 5)^2 =$
$= (-0{,}4)^2 = 0{,}16.$

Ответ: 0,16.

Пример 2. Решите уравнение $x^2 = 3^2 + \sqrt{256}$.

Решение: $x^2 = 9 + 16 = 25$;
$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$.

Ответ: ± 5.

Пример 3. Найдите значение выражения $\sqrt{32 \cdot 18 \cdot 81}$.

Решение: $\sqrt{32 \cdot 18 \cdot 81} = \sqrt{16 \cdot 2 \cdot 18 \cdot 81} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{81} =$
$= 4 \cdot 6 \cdot 9 = 216.$

Ответ: 216.

Пример 4. Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{8 \cdot 36}{18}}$.

Решение: $\sqrt{\frac{8\cdot 36}{18}}=\sqrt{\frac{2\cdot 4\cdot 36}{2\cdot 9}}=\sqrt{\frac{4\cdot 36}{9}}=\frac{\sqrt{4\cdot 36}}{\sqrt{9}}=$

$=\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{36}}{3}=\frac{2\cdot 6}{3}=4$.

Ответ: 4.

Пример 5. Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{75}-x}{x^2-75}+x+5\sqrt{3}\right):\left(x^2+10\sqrt{3}x+74\right).$$

Решение: 1) $\frac{\sqrt{75}-x}{x^2-75}+x+5\sqrt{3}=$

$$=-\frac{x-\sqrt{75}}{\left(x-\sqrt{75}\right)\left(x+\sqrt{75}\right)}+x+5\sqrt{3}=x+5\sqrt{3}-\frac{1}{x+5\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\left(x+5\sqrt{3}\right)^2-1}{x+5\sqrt{3}}=\frac{x^2+10\sqrt{3}x+74}{x+5\sqrt{3}}.$$

2) $\frac{x^2+10\sqrt{3}x+74}{x+5\sqrt{3}}:\left(x^2+10\sqrt{3}x+74\right)=\frac{1}{x+5\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{1}{x+5\sqrt{3}}$.

6. Степень с целым показателем и ее свойства.

Если $a\neq 0$ и n – целое отрицательное число, то $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$.

Выражение 0^n при $n\in\mathbb{Z}$, $n\leq 0$ не имеет смысла.

Например, $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{9}}=9$.

Свойства степени с целым показателем:
Для всех $a \neq 0$ и любых $m, n \in \mathbb{Z}$ верны равенства:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

3) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$.

Для всех $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любого $n \in$ ў верны равенства

4) $(ab)^n = a^n b^n$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Стандартный вид числа b – это его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$, $n \in \mathbb{Z}$. Число n называется порядком числа b.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Вычислите $\left(5 \cdot 10^{-2} + 6^{-1} \cdot 36 - 20^{-1}\right)^2$.

Решение:

$$\left(5 \cdot 10^{-2} + 6^{-1} \cdot 36 - 20^{-1}\right)^2 = \left(5 \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{1}{6} \cdot 36 - \frac{1}{20}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{20} + 6 - \frac{1}{20}\right)^2 = 6^2 = 36.$$

Ответ: 36.

Пример 2. Упростите выражение $\left(a^{-2} - b^{-2}\right) : \dfrac{(a-b)}{ab}$.

Решение: $\left(a^{-2} - b^{-2}\right) : \dfrac{(a-b)}{ab} = \left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right) \cdot \dfrac{ab}{(a-b)} =$

$$= \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{ab}{a-b} = -\frac{(a-b)(a+b)}{(ab)^2} \cdot \frac{ab}{a-b} = -\frac{a+b}{ab}.$$

Ответ: $-\dfrac{a+b}{ab}$.

Пример 3. Представьте число 36782 в стандартном виде и назовите его порядок.

Решение: $36782 = 3678{,}2 \cdot 10 = 367{,}82 \cdot 10^2 = 36{,}782 \cdot 10^3 = 3{,}6782 \cdot 10^4$. Порядок числа равен 4.

Ответ: $3{,}6782 \cdot 10^4$; порядок 4.

7. Корень *n*-й степени, степень с рациональным показателем и их свойства.

Число, n-я степень которого равна a, называется корнем n-й степени из числа a $(n \in \mathbb{N})$ и обозначается $\sqrt[n]{a}$.

Неотрицательное число, n-я степень которого равна неотрицательному числу a, называется арифметическим корнем n-й степени из числа a.

Свойства арифметического корня n-й степени:

1) Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2) Если $a \geq 0$, $b>0$, то $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

3) Если $n,k \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

4) Если $n,k \in \mathbb{N}$ и $a \geq 0$, то $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Если $a>0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Если $m,n \in \mathbb{N}$, то $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Свойства степени с рациональным показателем:
Для любого $a>0$ и p, $q \in \mathbb{Q}$:

1) $a^p a^q = a^{p+q}$;

2) $a^p : a^q = a^{p-q}$;

3) $(a^p)^q = a^{pq}$.

Для любых $a>0$, $b>0$ и $p \in \mathbb{Q}$:

4) $(ab)^p = a^p \cdot b^p$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найдите значение выражения

$$\sqrt[3]{8 \cdot 0{,}001} \cdot \sqrt[5]{\frac{243}{32}}.$$

Решение:

$$\sqrt[3]{8 \cdot 0{,}001} \cdot \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{0{,}001} \cdot \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = 2 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{3}{2} = 0{,}3.$$

Ответ: 0,3.

Пример 2. Упростите выражение

$$\left(\left(a^{-0{,}4} b^{0{,}2}\right)^5 \cdot a^2 b\right)^{\frac{1}{3}}.$$

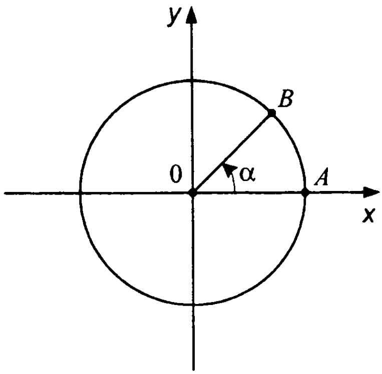
Решение: $\left(\left(a^{-0{,}4} b^{0{,}2}\right)^5 \cdot a^2 b\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\left(a^{-0{,}4}\right)^5 \cdot \left(a^{0{,}2}\right)^5 \cdot a^2 b\right)^{\frac{1}{3}} =$

$$= \left(a^{-2} \cdot b \cdot a^2 b\right)^{\frac{1}{3}} = \left(b^2\right)^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $b^{\frac{2}{3}}$.

8. Тригонометрические выражения и тригонометрические формулы

Отметим на координатной оси Ox справа от точки O точку A и построим окружность с центром в точке O и радиусом OA (так называемым начальным радиусом).



Пусть при повороте на угол α против часовой стрелки начальный радиус OA переходит в радиус OB.

Тогда:

Синусом угла α называется отношение ординаты точки B к длине радиуса.

Косинусом угла α называется отношение абсциссы точки B к длине радиуса.

Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки B к ее абсциссе.

Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки B к ее ординате.

Если координаты точки B равны x и y, то:

$$\sin\alpha = \frac{y}{R};\ \cos\alpha = \frac{x}{R};\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x};\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}.$$

Приведем таблицу значений тригонометрических функций некоторых углов (прочерк сделан, когда выражение не имеет смысла):

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса:

1) Если α-угол I или II координатной четверти, то $\sin\alpha > 0$;

Если α-угол III или IV координатной четверти, то $\sin\alpha < 0$;

Если α-угол I или IV координатной четверти, то $\cos\alpha > 0$;

Если α-угол II или III координатной четверти, то $\cos\alpha < 0$;

Если α -угол I или III координатной четверти, то $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha > 0$;

Если α -угол II или IV координатной четверти, то $\mathrm{tg}\,\alpha < 0$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha < 0$.

2) Синус, тангенс и котангенс – нечетные функции; косинус – четная функция.

3) При изменении угла на целое число оборотов значения тригонометрических функций не меняются.

1 радиан – это мера центрального угла, которому соответствует длина дуги, равная длине радиуса окружности.

Связь радианов с градусами: $1° = \frac{\pi}{180}$ рад; 1 рад $= \frac{180°}{\pi}$.

Основные тригонометрические тождества:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

4) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$;

5) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

6) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Формулы приведения:

x	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Формулы сложения:

$\cos(a-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$,

$\cos(a+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$,

$\sin(a-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$,

$\sin(a+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$,

$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$,

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

•
Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha,$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найдите значение выражения

$\sin\alpha + \sin 2\alpha - \cos\alpha - \cos 2\alpha$ при $\alpha = 45°$.

Решение:

$$\sin 45° + \sin 90° - \cos 45° - \cos 90° = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 2. Вычислите $\left(2\sin\frac{\pi}{3}\operatorname{tg} 30° - \cos^2\pi + \sin\frac{\pi}{6}\right)^2$.

Решение: $\left(2\sin\frac{\pi}{3}\operatorname{tg} 30° - \cos^2\pi + \sin\frac{\pi}{6}\right)^2 =$

$$=\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-(-1)^2+\frac{1}{2}\right)^2=\left(1-1+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример 3. Известно, что $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ и $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$. Найдите значение остальных тригонометрических функций угла α.

Решение: Так как $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, то α – угол III координатной четверти, поэтому $\sin\alpha<0$.

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{16}}=-\frac{\sqrt{15}}{4};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{15}}{4}:\left(-\frac{1}{4}\right)=\sqrt{15};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Ответ: $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{4}$;

$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{15}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{15}}$.

Пример 4. Упростите выражение

$$\left(\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{1-\sin\alpha\cos\alpha}-\cos\alpha\right)\operatorname{ctg}\alpha.$$

Решение: $\left(\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{1-\sin\alpha\cos\alpha}-\cos\alpha\right)\operatorname{ctg}\alpha=$

$$=\left(\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{1-\sin\alpha\cos\alpha}-\cos\alpha\right)\operatorname{ctg}\alpha=$$

$$=\left(\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)}{1-\sin\alpha\cos\alpha}-\cos\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}\alpha=$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha-\cos\alpha)\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\sin\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cos\alpha .$$

Ответ: $\cos\alpha$.

Пример 5. Упростите выражение

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\sin 2\alpha}.$$

Решение: $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\sin 2\alpha}=$

$$=\frac{-\cos\alpha\cdot(-\operatorname{tg}\alpha)\cdot(-\cos\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: – 0,5.

Пример 6. Вычислите cos 15° и sin 15°.

Решение: $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos 15^\circ=\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

II. Уравнения и неравенства

1. Уравнения с одной переменной

Уравнение с одной переменной – это равенство, содержащее переменную.

Корень уравнения – это значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

Решить уравнение означает найти все его корни или доказать, что корней нет.

Равносильные уравнения – уравнения с одними и теми же корнями.

Следующие преобразования: перенос слагаемого из одной части в другую с изменением знака этого слагаемого; умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же не равное нулю число приводят уравнение к равносильному ему уравнению.

Линейное уравнение с одной переменной – это уравнение вида $ax = b$, где x – переменная, a и b – некоторые числа.

1) Если $a = b = 0$, то это уравнение имеет бесконечно много решений;

2) Если $a \neq 0$, то это уравнение имеет один корень: $x = \frac{b}{a}$;

3) Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то это уравнение не имеет корней.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решите уравнение $\frac{2x-1}{3}-\frac{x+1}{2}=2$.

Решение: $\frac{2x-1}{3}-\frac{x+1}{2}=2$;

$\frac{4x-2-3x-3}{6}=2$; $\frac{x-5}{6}=2$; $x-5=12$; $x=17$.

Ответ: 17.

Пример 2. Решите уравнение $5x+\frac{2x+3}{4}=\frac{3x-1}{2}+4x$.

Решение: $5x+\frac{2x+3}{4}=\frac{3x-1}{2}+4x$;

$\frac{22x+3}{4}=\frac{11x-1}{2}$

$44x+6=44x-4$; $6=-4$, то есть данное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

2. Системы линейных уравнений

Линейное уравнение с двумя переменными – это уравнение вида $ax+by=c$, где x и y – переменные, a, b и c – некоторые числа. Решение уравнения с двумя переменными (не обязательно линейного) – это пара значений переменных, при подстановке которых в уравнение оно обращается в верное равенство.

Общий вид системы линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ dx+ey=f. \end{cases}$$

Решение системы уравнений с двумя переменными (не обязательно линейных) – это пара значений переменных, при подстановке которых в уравнение системы каждое из них обращается в верное равенство.

Алгоритм решения системы линейных уравнений с двумя переменными методом подстановки:

1) выразить из какого-нибудь уравнения системы одну переменную через другую;

2) подставить в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение;

3) решить полученное уравнение с одной переменной;

4) найти соответствующее значение второй переменной и выписать решение системы.

Алгоритм решения системы линейных уравнений с двумя переменными методом сложения:

1) умножить почленно уравнения системы, подобрав множители таким образом, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположны;

2) сложить почленно левые и правые части уравнений системы;

3) решить полученное уравнение с одной переменной;

4) найти соответствующее значение второй переменной и выписать решение системы.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 1; \\ 2x - 3y = 2. \end{cases}$

Решение: Из второго уравнения системы: $x = \dfrac{2+3y}{2}$.

Подставим получившееся выражение в первое уравнение вместо x:

$\dfrac{2+3y}{4} - \dfrac{y}{3} = 1$; $\dfrac{6+9y-4y}{12} = 1$;

$5y + 6 = 12;\ 5y = 6;\ y = \frac{6}{5}.$

Найдем x: $x = \dfrac{2 + 3 \cdot \frac{6}{5}}{2} = \dfrac{14}{5}.$

Ответ: (2,8; 1,2).

Пример 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2; \\ 2x + 3y = 5. \end{cases}$

Решение: Умножив первое уравнение на (–4), получим систему $\begin{cases} -2x + y = -8 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}.$

Отсюда: $4y = -3;\ y = -\frac{3}{4};\ x = \dfrac{5 - 3y}{2} = \dfrac{5 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{2} = \dfrac{29}{8}.$

Ответ: $\left(\frac{29}{8}; -\frac{3}{4}\right).$

3. Квадратные уравнения

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x – переменная. a, b, c – некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется квадратным уравнением.

Квадратное уравнение с $a = 1$ (то есть уравнение вида $x^2 + bx + c = 0$) называется приведенным квадратным уравнением.

Неполные квадратные уравнения (хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю):

1) $b = c = 0$: $ax^2 = 0$.

Единственный корень $x = 0$.

2) $b = 0,\ c \neq 0$: $ax^2 + c = 0$.

Это уравнение равносильно уравнению $x^2 = -\dfrac{c}{a}$.

Если $\dfrac{c}{a} > 0$, то $-\dfrac{c}{a} < 0$ и уравнение не имеет корней.

Если $\dfrac{c}{a} < 0$, то $-\dfrac{c}{a} > 0$ и уравнение имеет 2 корня:

$x_1 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

3) $b \neq 0$, $c = 0$: $ax^2 + bx = 0$.

Это уравнение равносильно уравнению $x(ax + b) = 0$.

Оно имеет 2 корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

В общем виде квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$

1) при $D = b^2 - 4ac \geq 0$ имеет корни $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$;

2) при $D = b^2 - 4ac < 0$ не имеет корней.

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется дискриминантом квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Теорема Виета: Если x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$.

Обратная теорема Виета: Если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, а $x_1 \cdot x_2 = q$, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решите уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Решение: $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4^2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1;\ x_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Ответ: – 1; 3.

Пример 2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + 5x + 1 = 0$.

Решение: Пусть x_1 и x_2 – корни данного квадратного уравнения. Тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = -5$; $x_1 \cdot x_2 = 1$.

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$$
$$= (-5)^2 - 2 \cdot 1 = 25 - 2 = 23.$$

Ответ: 23.

Пример 3. Решите уравнение

$$\frac{2x+1}{x-1} - \frac{x+1}{x-2} = 2.$$

Решение: $\frac{2x+1}{x-1} - \frac{x+1}{x-2} = \frac{(2x+1)(x-2)-(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} =$

$$= \frac{2x^2-3x-2-x^2+1}{x^2-3x+2} = \frac{x^2-3x-1}{x^2-3x+2};$$

$$\frac{x^2-3x-1}{x^2-3x+2} = 2;$$

$x^2 - 3x - 1 = 2x^2 - 6x + 4;$

$x^2 - 3x + 5 = 0$

$D = 9 - 4 \cdot 5 = -11 < 0 \Rightarrow$ уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

4. Неравенства с одной переменной и их системы

Общий способ сравнения чисел:

Число a больше числа b ($a > b$), если их разность $a - b$ – положительное число; число a меньше числа b, если их разность $a - b$ – отрицательное число.

Свойства числовых неравенств:

1) Если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$;

2) Если $a < b$ и $b < c$, то $a < b < c$;

3) Если $a<b$ и $c \in \mathbb{R}$, то $a + c<b + c$;

4) Если $a<b$ и $c>0$, то $ac<bc$; если $a<b$ и $c<0$, то $ac>bc$;

5) Если $a<b$ и $c<d$, то $a + c<b + d$;

6) Если $a<b$ и $c<d$, a, b, c, d – положительные числа, то $ac<bd$.

Решение неравенства с одной переменной – это значение переменной, при котором неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство с одной переменной означает найти все его решения или доказать, что решений нет.

Решение системы неравенств с одной переменной – это значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

Решить систему означает найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Метод интервалов решения неравенств с одной переменной:

Если неравенство имеет вид $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) > 0$ (< 0), то в каждом из промежутков, на которые область определения разбивается точками x_1, x_2, ..., x_n, знак функции сохраняется, а при переходе через каждую из точек x_1, x_2, ..., x_n ее знак меняется.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решите неравенство $\frac{4x-1}{2} - x \geq 3x + 2$.

Решение: $\dfrac{4x-1-2x}{2} \geq 3x+2$;

$2x-1 \geq 6x+4$;

$4x \leq -5$;

$x \leq -\dfrac{5}{4}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{5}{4}\right]$.

Пример 2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}(2x-3)-3(x-1) \geq 1, \\ 2(x+5)-x \leq 3;\end{cases}$$

Решение: $\begin{cases}2x-3-3x+3 \geq 1, \\ 2x+10-x \leq 3;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \geq -1 \\ x \leq -7\end{cases}$ – нет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 3. Решите неравенство $3x^2 - x - \dfrac{5}{4} \geq 0$.

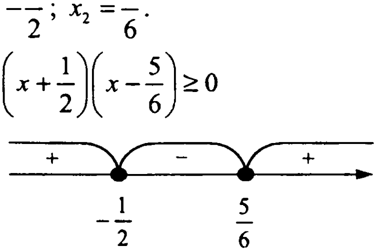
Решение:

Разложим квадратный трехчлен $3x^2 - x - \dfrac{5}{4}$ на множители.

Для этого найдем его корни: $D = 1 + 4 \cdot 3 \cdot \dfrac{5}{4} = 16$;

$x = \dfrac{1 \pm 4}{6}$; $x_1 = -\dfrac{1}{2}$; $x_2 = \dfrac{5}{6}$.

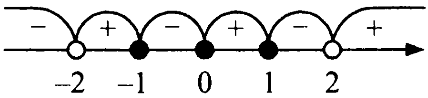
$$3x^2 - x - \frac{5}{4} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{6}\right) \geq 0$$



Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

Пример 4. Решите неравенство $\frac{x^3 - x}{x^2 - 4} \geq 0$.

Решение: $\frac{x(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$.



Ответ: $x \in (-2; -1] \cup [0; 1] \cup (2; +\infty)$.

III. Функции

1. Функции, их свойства. Линейная функция и обратная пропорциональность.

Функция – это такая зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.

Переменная x называется независимой переменной или аргументом.

Переменная y называется зависимой переменной и говорят, что переменная y является функцией от переменной x.

Область определения функции – это все значения независимой переменной; область значений функции – это все значения, которые принимает зависимая переменная.

График функции – это множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

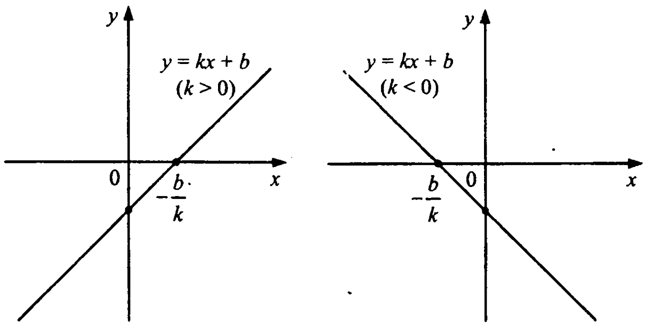
Нули функции – это значения аргумента, при которых функция обращается в нуль.

Функция называется возрастающей на некотором промежутке I, если для любых $x_1, x_2 \in I$ таких, что $x_1<x_2$ верно неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.

Функция называется убывающей на некотором промежутке I, если для любых $x_1, x_2 \in I$ таких, что $x_1<x_2$ верно неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

Линейной функцией называется функция, заданная формулой вида $y = kx + b$, где x – аргумент, $k, b \in \mathbb{R}$. График линейной функции – прямая.

Число k называется угловым коэффициентом прямой.



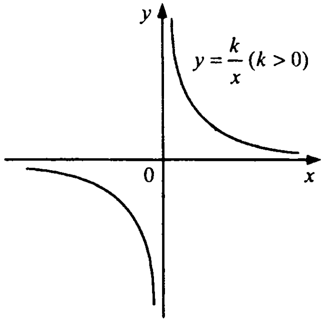
Нуль линейной функции: $x = -\frac{b}{k}$.

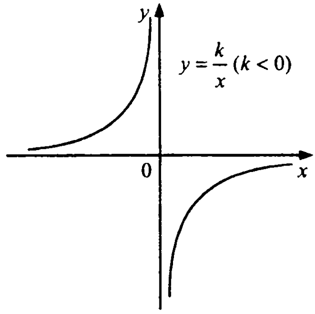
Если $k>0$, то $y>0$ при $x > -\frac{b}{k}$ и $y<0$ при $x < -\frac{b}{k}$; если $k<0$, то $y>0$ при $x < -\frac{b}{k}$ и $y<0$ при $x > -\frac{b}{k}$.

При $k>0$ функция $y = kx + b$ возрастает на $\mathbb{R}$, при $k<0$ – убывает на $\mathbb{R}$.

Обратной пропорциональностью называется функция, заданная формулой $y = \frac{k}{x}$, где x – аргумент, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

Область определения этой функции – $x \neq 0$.





У функции $y = \dfrac{k}{x}$ нет нулей.

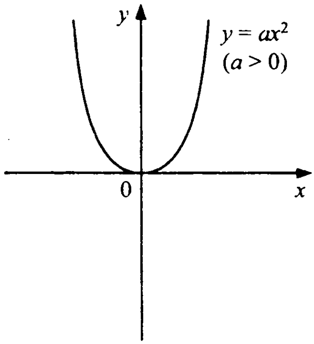
При $k>0$ $y>0$ при $x>0$ и $y<0$ при $x<0$;
при $k<0$ $y>0$ при $x<0$ и $y<0$ при $x>0$.

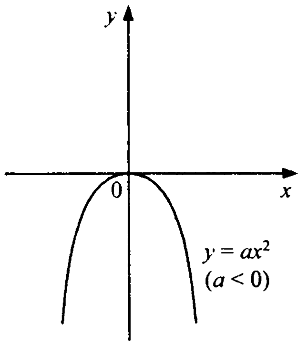
При $k>0$ функция $y = \dfrac{k}{x}$ убывает на всей области определения, при $k<0$ функция $y = \dfrac{k}{x}$ возрастает на всей области определения.

2. Квадратичная функция

Квадратичная функция – это функция, заданная формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x – аргумент, a, b, $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = ax^2$ ($a \neq 0$).





Свойства функции $y = ax^2$:

1) Если $x = 0$, то $y = 0$, то есть график функции проходит через начало координат.

2) Если $x \neq 0$, то $y>0$ при $a>0$ и $y<0$ при $a<0$.

3) График функции симметричен относительно оси y.

4) При $a>0$ функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$; при $a<0$ функция возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.

5) При $a>0$ $y_{мин} = 0$, при $a<0$ $y_{макс} = 0$.

График функции $y = ax^2 + n$ получается из графика функции $y = ax^2$ параллельным переносом вдоль оси y на n единиц вверх при $n>0$ или на $(-n)$ единиц вниз, если $n<0$.

График функции $y = a(x-m)^2$ получается из графика функции $y = ax^2$ параллельным переносом вдоль оси x на m единиц вправо при $m>0$ или на $(-m)$ единиц влево, если $m<0$.

Вершина параболы – это точка пересечения параболы с ее осью симметрии.

Вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ имеет координаты $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

3. Степенная функция

Функция $y = f(x)$ называется четной, если область ее определения симметрична относительно нуля и для любого значения аргумента x выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

График любой четной функции симметричен относительно оси y. Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если область ее определения симметрична относительно нуля и для любого значения аргумента x выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График любой нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Степенной функцией с натуральным показателем называется функция, заданная формулой $y = x^n$, где x – аргумент, $n \in \mathbb{N}$.

Свойства функции $y = x^n$ при четном n ($n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$):

1) Если $x = 0$, то $y = 0$ (график функции проходит через начало координат).

2) Если $x \neq 0$, то $y > 0$.

3) Функция является четной.

4) Функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

5) Область значений функции – $[0; +\infty)$.

Свойства функции $y = x^n$ при нечетном n ($n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$):

1) Если $x = 0$, то $y = 0$ (график функции проходит через начало координат).

2) Если $x>0$, то $y>0$; если $x<0$, то $y<0$.

3) Функция является нечетной.

4) Функция возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

5) Область значений функции – $\mathbb{R}$.

IV. Прогрессии и текстовые задачи.

1. Арифметическая прогрессия.

Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа:

$\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_{n+1} = a_n + d$, $d \in \mathbb{R}$.

$d = a_{n+1} - a_n$ – разность арифметической прогрессии.

Формула n-го члена арифметической прогрессии:
$a_n = a_1 + d(n-1)$.

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Второй член арифметической прогрессии равен 6, а восьмой член – 42. Найдите разность этой прогрессии.

Решение: $\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 6 \\ a_8 = a_1 + 7d = 42 \end{cases}$.

Отсюда: $6d = 42 - 6 = 36$; $d = 6$.

Ответ: 6.

Пример 2. Найти a_1 и d арифметической прогрессии, если: $a_7 = 21$, $S_7 = 205$.

Решение: Т.к. $S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7$ (по формуле суммы 7 первых членов арифметической прогрессии), то $205 = \frac{a_1 + 21}{2} \cdot 7$;

Отсюда находим первый член арифметической прогрессии:
$410 = 7a_1 + 147$;
$7a_1 = 263$.

Тогда $a_1 = 37\frac{4}{7}$.

Т.к. $a_7 = a_1 + 6d$, то $21 = 37\frac{4}{7} + 6d$;

Отсюда находим разность арифметической прогрессии:

$6d = -16\frac{4}{7}$;

$d = -\frac{58}{21}$.

Итак, $d = -2\frac{16}{21}$.

Ответ: $a_1 = 37\frac{4}{7}$; $d = -2\frac{16}{21}$.

Пример 3. Решите уравнение $1 + 6 + 11 + 16 + ... + x = 235$.

Решение: Левая часть уравнения представляет собой сумму какого-то числа членов арифметической прогрессии с $a_1 = 1$; $d = 5$.

$$x - a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)\cdot 5 = 5n - 4 \Rightarrow n = \frac{x+4}{5}.$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{1+x}{2}\cdot\frac{x+4}{5} = 235$$

$x^2 + 5x + 4 = 2350$;

$x^2 + 5x - 2346 = 0$;

$D = 25 + 4 \cdot 2346 = 9409 = 97^2$;

$$x = \frac{-5 \pm 97}{2} \Rightarrow x = 46 \text{ (т.к. } x>0).$$

Ответ: 46.

2. Геометрическая прогрессия.

Геометрическая прогрессия – это последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен произведению предыдущего члена на одно и то же число:

$\forall n \in \mathbb{N} \;\; b_n \neq 0$ и $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

$q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ – знаменатель геометрической прогрессии.

Формула n-го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 q^{n-1}$.
Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1} \quad (q \neq 1)$$

Если $|q|<1$, то прогрессия называется бесконечной геометрической прогрессией и ее сумма равна $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если ее второй член равен – 2, а седьмой равен 64.

Решение: $\dfrac{b_7}{b_2} = \dfrac{b_1 q^6}{b_1 q} = q^5 = \dfrac{64}{-2} = -32 \Rightarrow q = -2$.

Ответ: –2.

Пример 2. Найти сумму семи первых членов геометрической прогрессии:

5, 10, 20, ...;

Решение: Для решения данного примера необходимо было применить формулу суммы 7 первых членов геометрической прогрессии:

$b_1 = 5$; $q = 2$. Т.к. $S_7 = \dfrac{b_1\left(1-q^7\right)}{1-q}$, то

$$S_7 = \frac{5\cdot\left(1-2^7\right)}{1-2} = -5(1-128) = 635\,.$$

Ответ: 635.

Пример 3. решите уравнение $x^2 - x = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots$

Решение: Правая часть – бесконечная геометрическая прогрессия с $q = -\dfrac{1}{3}$.

Поэтому имеем:

$$x^2 - x = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

$$x^2 - x - \frac{3}{4} = 0\,;$$

$$D = 1 + 4\cdot\frac{3}{4} = 4\,;$$

$$x = \frac{1\pm 2}{2}\,;\ x_1 = -\frac{1}{2}\,;\ x_2 = \frac{3}{2}\,.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3}{2}$.

3. Решение текстовых задач

Остановимся на нескольких стандартных примерах текстовых задач.

Пример 1. Из пункта A в пункт B, расположенный в 24 км от A, одновременно отправились велосипедист и пешеход. Велосипедист прибыл в пункт B на 4 ч. раньше пешехода. Известно, что если бы велосипедист ехал с меньшей на 4 км/ч. скоростью, то на путь из A в B он затратил бы вдвое меньше времени, чем пешеход. Найдите скорость пешехода.

Решение:

Велосипедист	x
Пешеход	y

$x; y>0;$

$$\begin{cases} \dfrac{24}{y}-\dfrac{24}{x}=4 \\ \dfrac{24}{x-4}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{24}{y} \end{cases}; \begin{cases} 24x-24y=4xy \\ 2y=x-4 \end{cases}; \begin{cases} 6x-6y=xy \\ x=2y+4 \end{cases};$$

$6(2y+4)-6y=(2y+4)y;$

$12y+24-6y=2y^2+4y;$

$2y^2-2y-24=0;$

$y^2-y-12=0;$

$y^2-y-12=0;$

$$y_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm 7}{2};$$

$$y_1=\frac{1-7}{2}=-3$$ – не удовлетворяет условию.

$y_2=4;\ x_2=12.$

Ответ: 4 км/ч.

Пример 2. 60 деталей первый рабочий изготавливает на 3 ч. быстрее, чем второй. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если, работая вместе, они изготавливают за 1 ч. 30 деталей.

Решение:

	За 1 ч
I рабочий	x деталей
II рабочий	y деталей

$$\begin{cases} \dfrac{60}{x} + 3 = \dfrac{60}{y} \\ x + y = 30 \end{cases}; \quad \begin{cases} 60(x - y) = 3xy \\ x = 30 - y \end{cases}; \quad \begin{cases} 20(x - y) = xy \\ x = 30 - y \end{cases}$$

$20(30 - 2y) = y(30 - y)$; $600 - 40y = 30y + y^2 = 0$;

$y^2 - 704 + 600 = 0$;

$$y_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{225 - 600}}{1} = 36 \pm 25;$$

$y_1 = 60$ – не удовлетворяет условию

$y_2 = 10, x_2 = 20$;

$\dfrac{90}{10} = 9$ ч.

Ответ: 9 ч.

Пример 3. Вкладчик сначала снял со своего счета в сбербанке $\frac{1}{5}$ своих денег, потом $\frac{5}{16}$ оставшихся и еще 999 рублей. После этого у него на сбербанке осталось $\frac{1}{4}$ всех денег. Каким был первоначальный вклад?

Решение:

Пусть первоначальный вклад был x рублей. Тогда в первый раз вкладчик снял $\frac{x}{5}$ руб., после чего осталось $x - \frac{x}{5} = \frac{4x}{5}$ руб.;

во второй раз он снял $\frac{5}{16}\cdot\frac{4}{5}x+999=\left(\frac{1}{4}x+999\right)$ руб. После чего у него осталось $\frac{1}{4}x$ руб. Составим и решим уравнение:

$$x-\frac{x}{5}-\left(\frac{1}{4}x+999\right)=\frac{1}{4}x;$$

$$\left(1-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)x=999;$$

$$\frac{3}{10}x=999;\ x=3330.$$

Ответ: 3330 рублей.

Пример 4. Двузначное число в 4 раза больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы в 2,25 раза больше самого числа. Найдите это число.

Решение: $\overline{ab}=10a+b$, $a\in\mathbb{N}$, $b\in\{0;\mathbb{N}\}$.

$$\begin{cases}10a+b=4(a+b)\\(a+b)^2=2,25(10a+b)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a\\(a+b)^2=2,25\cdot(10a+b)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a\\(3a)^2=2,25\cdot 12a\end{cases}$$

$9a^2=27a \Rightarrow a=3$ (т.к. $a\neq 0$), $b=6$.

Ответ: 36.

Пример 5. Из 40 т железной руды выплавляют 20 т стали, содержащей 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

Решение:

	в %	в кг	Руда
100%	40 т	Примеси	x%

	в %	в кг	Руда
(40 – 20) т	Сталь	100%	20 т
Примеси	6%	?	

1) $\dfrac{20 \cdot 6\%}{100\%} = 1,2$ т – примеси в стали;

2) 40 – 20; 20 т.

201,2; 21,2 т – примеси в руде;

$\dfrac{21,2}{40} \cdot 100\% = \dfrac{212}{4} = 53\%$ – примеси в руде.

Ответ: 53%.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

I. Числа и выражения

1. Выражения, преобразования выражений

1) Вычислите значение выражения $2ab - 3b$ при $a = 2$, $b = 3$.

2) Вычислите значение выражения $3ab + 2b$ при $a = -1$, $b = 1$.

3) Вычислите значение выражения $ab - 4a$ при $a = 2$, $b = -1$.

4) Вычислите значение выражения $2a + 3ab$ при $a = -1$, $b = 0$.

5) Вычислите значение выражения $ba - 3a + 1$ при $a = 1$, $b = 2$.

6) Вычислите значение выражения $2ab + 3b - 1$ при $a = 2$, $b = -1$.

7) Вычислите значение выражения $a - 4ab + 2$ при $a = 0$, $b = -3$.

8) Вычислите значение выражения $a + 2b - ab$ при $a = 1$, $b = -3$.

9) Вычислите значение выражения $ab - 4a - 2b$ при $a = 4$, $b = -1$.

10) Вычислите значение выражения $a + ab + b$ при $a = 1$, $b = -1$.

11) Вычислите значение выражения $2{,}1 \cdot 3{,}2 - 2{,}1 \cdot 1{,}2 + 1$.

12) Вычислите значение выражения $1{,}7 \cdot 2{,}5 + 1{,}7 \cdot 3{,}5 - 2$.

13) Вычислите значение выражения $2{,}3 \cdot 1{,}5 - 2{,}3 \cdot 0{,}5 - 1$.

14) Вычислите значение выражения $3{,}1 \cdot 1{,}4 - 3{,}1 \cdot 2{,}4 + 2$.

15) Вычислите значение выражения $2{,}5 \cdot 3{,}7 + 2{,}5 \cdot 2{,}3 - 10$.

16) Вычислите значение выражения $1{,}2 \cdot 2{,}1 - 1{,}2 \cdot 3{,}1 + 1$.

17) Вычислите значение выражения $0{,}8 \cdot 3{,}9 + 0{,}8 \cdot 4{,}1 - 2$.

18) Вычислите значение выражения $0{,}4 \cdot 2{,}3 + 0{,}4 \cdot 3{,}7 - 4$.

19) Вычислите значение выражения $0{,}9 \cdot 1{,}3 + 0{,}9 \cdot 3{,}7 - 2$.

20) Вычислите значение выражения $1{,}8 \cdot 2{,}4 - 1{,}8 \cdot 4{,}4 + 1$.

21) Упростите выражение $2x - (3x + y) + 2(y + 1) + x$.

22) Упростите выражение $x - (2x - 3y) - 3(y - 1) + 2x$.

23) Упростите выражение $x + (5y - x - 1) - 2x - 5(y + 2)$.

24) Упростите выражение $3x - y - 4(y + x) + 5(y - 3)$.

25) Упростите выражение $2(y - 2x) + 4(x - 2y) - 3(y - 1)$.

26) Упростите выражение $y - 2(x + 2y) + 3(y + x) - 2$.

27) Упростите выражение $2y + 3(y - 4x) + 4(3x + 2) - 1$.

28) Упростите выражение $y - 2(x - 2y) + 3(y - 2) - x$.

29) Упростите выражение $2y - 2(x - 3y) - 4(2y - x) + 2$.

30) Упростите выражение $y + 2(3 - 4x) - (x + y) - 1$.

2. Степень с натуральным показателем, ее свойства

31) Найдите значение выражения $2^2 - (-3)^3 + 4^2$.

32) Найдите значение выражения $3^2 - (-2)^2 - 1^3$.

33) Найдите значение выражения $2^3 + (-4)^2 - 3^3$.

34) Найдите значение выражения $3^4 - 2^3 + 3^2$.

35) Найдите значение выражения $(-2)^4 - (-3)^2 + 4^1$.

36) Упростите выражение $4x^2 \cdot x^3 - 2x^6 : x$.

37) Упростите выражение $3x^7 : x - 2x^2 \cdot x^4$.

38) Упростите выражение $x^3 \cdot x^5 - 2x^9 : x$.

39) Упростите выражение $x \cdot x^4 - 3x^7 : x^2$.

40) Упростите выражение $x^9 : x^4 - 2x \cdot x^4$.

41) Упростите выражение $(xy^2)^2 : (xy)$.

42) Упростите выражение $(xy)^3 : (x^2y)$.

43) Упростите выражение $(xy)^4 : (x^2y)^2$.

44) Упростите выражение $(xy^3)^3 : (xy^2)^3$.

45) Упростите выражение $(x^4y)^3 : (x^2y)^2$.

46) Упростите выражение $\left(\left(xy^2\right)^3\right)^4$.

47) Упростите выражение $\left(\left(x^2y\right)^2\right)^3$.

48) Упростите выражение $\left(\left(xy\right)^2\right)^5$.

49) Упростите выражение $\left(\left(xy^3\right)^2\right)^6$.

50) Упростите выражение $\left(\left(xy^2\right)^3\right)^5$.

3. Одночлены, многочлены

Приведите одночлен к стандартному виду:

51) $2ab \cdot (-3)(ab)^2$;

52) $(-2) \cdot a^2 \cdot (-3)(b)^3$;

53) $(ab^2)^2 \cdot (-4a)^2$;

54) $b \cdot (-3a)^3 \cdot a^2$;

55) $ab \cdot (-2) \cdot (4a)^3$;

56) $3a \cdot (-2b)^2 \cdot 3b$;

57) $2ab \cdot (-4) \cdot (3a)^2$;

58) $3a \cdot (-2) \cdot (2b)^3$;

59) $ab \cdot 4a \cdot (-3b)^3$;

60) $(2ab)^2 \cdot (-3) \cdot b$.

61) Упростите выражение $x(x-1)^2 - x^3$.

62) Упростите выражение $x^2(x+1)^2 - x^4 - 2x^3$.

63) Упростите выражение $(x-1)(x^2-1) - x^3$.

64) Упростите выражение $(x+2)(x+1)^2 - x^3$.

65) Упростите выражение $(x-2)(x+3) - (x-1)x$.

66) Упростите выражение $x^2(x-2)^2 - x^4$.

67) Упростите выражение $(x+3)(x-4)^2 - x^3$.

68) Упростите выражение $(x-2)(x+4)-x^2$.

69) Упростите выражение $(x-1)(x+3)^2-x^3$.

70) Упростите выражение $x^3-(x+1)^2x$.

71) Разложите многочлен $3x^2-2xy-y(3x-2y)$ на множители.

72) Разложите многочлен $2xy+3x+2y^2+3y$ на множители.

73) Разложите многочлен $xy-y^2-x^2+y^2$ на множители.

74) Разложите многочлен $2x^3-16-x^2+4$ на множители.

75) Разложите многочлен x^3+8-x^2-2x на множители.

76) Разложите многочлен $x^2-4x-(x-4)^2$ на множители.

77) Разложите многочлен $2x^2y^2-3y^2-2x^3+3x$ на множители.

78) Разложите многочлен $y-4xy-1+16x^2$ на множители.

79) Разложите многочлен $2xy-2y-x^2+2x-1$ на множители.

80) Разложите многочлен $y^2-x^2-y^3+x^3$ на множители.

4. Рациональные дроби и их свойства.

81) Сократите дробь $\dfrac{x^2-4}{x+2}$.

82) Сократите дробь $\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

83) Сократите дробь $\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

84) Сократите дробь $\dfrac{x^2-16}{x+4}$.

85) Сократите дробь $\dfrac{x^2-25}{x-5}$.

86) Сократите дробь $\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

87) Сократите дробь $\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$.

88) Сократите дробь $\frac{x^3-8}{x-2}$.

89) Сократите дробь $\frac{x^3-8}{x^2+2x+4}$.

90) Сократите дробь $\frac{x^3-27}{x-3}$.

91) Сократите дробь $\frac{x^3+1}{x+1}$.

92) Сократите дробь $\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}$.

93) Сократите дробь $\frac{x^3+8}{x+2}$.

94) Сократите дробь $\frac{x^3+27}{x+3}$.

95) Сократите дробь $\frac{x^3+27}{x^2-3x+9}$.

96) Сократите дробь $\frac{x^2-2x+1}{x-1}$.

97) Сократите дробь $\frac{x^2+2x+1}{x+1}$.

98) Сократите дробь $\frac{x^2+6x+9}{x+3}$.

99) Сократите дробь $\frac{x^2-4x+4}{x-2}$.

100) Сократите дробь $\frac{x^2-8x+16}{x-4}$.

101) Сократите дробь $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$.

102) Сократите дробь $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$.

103) Сократите дробь $\frac{x^3-8}{x^2-4}$.

104) Сократите дробь $\frac{x^3+27}{x^2-9}$.

105) Сократите дробь $\frac{x^3-1}{(x-1)^2}$.

106) Сократите дробь $\frac{(x-2)^2(x^2-9)}{(x^2-4)(x+3)^2}$.

107) Сократите дробь $\frac{(x-1)^2(x^2-4)}{(x^3-8)(x^2-1)}$.

108) Сократите дробь $\frac{(x-2)^2(x^3-1)}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$.

109) Сократите дробь $\frac{(x-3)^2(x^3-8)}{(x^2-4)(x^2-9)}$.

110) Сократите дробь $\frac{(x^2-16)(x^3+1)}{(x^2-x+1)(x+4)^2}$.

111) Упростите выражение $\frac{x^2-4x}{y}\cdot\frac{2xy}{x^2-16}$.

112) Упростите выражение $\frac{x^2-x}{2y}\cdot\frac{y}{x-1}$.

113) Упростите выражение $\frac{x^3-1}{y^2-4}\cdot\frac{y+2}{x^2+x+1}$.

114) Упростите выражение $\frac{xy^2}{x^2-1}:\frac{2xy}{x-1}$.

115) Упростите выражение $\frac{x^2y}{x^2-4}:\frac{yx^2}{x+2}$.

116) Упростите выражение $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\cdot(x-1)^2$.

117) Упростите выражение $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\cdot(x+1)^2$.

118) Упростите выражение $\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)\cdot(x+2)^2$.

119) Упростите выражение $\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)\cdot(x-2)^2$.

120) Упростите выражение $\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)\cdot(x-3)^2$.

5. Квадратные корни

121) Найдите значение выражения $\sqrt{25}\cdot\sqrt{0,01}-\sqrt{36}$.

122) Найдите значение выражения $\sqrt{16}:\sqrt{0,01}+\sqrt{81}$.

123) Найдите значение выражения $\left(\sqrt{4}-\sqrt{16}\cdot\sqrt{1}\right)^2$.

124) Найдите значение выражения $\left(\sqrt{4}+\sqrt{16}:\sqrt{0,25}\right)^2$.

125) Найдите значение выражения $\left(\sqrt{36}-\sqrt{16}:\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^2$.

126) Найдите значение выражения $\sqrt{4\cdot 36\cdot 1}$.

127) Найдите значение выражения $\sqrt{9\cdot 25\cdot 81}$.

128) Найдите значение выражения $\sqrt{100\cdot 121}$.

129) Найдите значение выражения $\sqrt{144\cdot 9}$.

130) Найдите значение выражения $\sqrt{625\cdot 4}$.

131) Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{25\cdot 4}{81}}$.

132) Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{9\cdot 16}{256}}$;

133) Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{4 \cdot 121}{144}}$;

134) Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{25 \cdot 9}{256}}$;

135) Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{169 \cdot 9}{196}}$.

136) Вычислите значение выражения $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

137) Вычислите значение выражения $\sqrt{6+2\sqrt{2}}$.

138) Вычислите значение выражения $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

139) Вычислите значение выражения $\sqrt{11+4\sqrt{7}}$.

140) Вычислите значение выражения $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$.

141) Вычислите значение выражения $\sqrt{4-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{3}}$.

142) Вычислите значение выражения $\sqrt{8-\sqrt{37}} \cdot \sqrt{8+\sqrt{37}}$.

143) Вычислите значение выражения $\sqrt{3-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{3}}$.

144) Вычислите значение выражения $\sqrt{9-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{9+2\sqrt{2}}$.

145) Вычислите значение выражения $\sqrt{10-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{10+\sqrt{5}}$.

146) Упростите значение выражения $\frac{x^2-7}{x+\sqrt{7}}+\sqrt{7}$.

147) Упростите значение выражения $\frac{x^2-11}{x-\sqrt{11}}-\sqrt{11}$.

148) Упростите значение выражения $\frac{x^2-5}{x+\sqrt{5}}-x$.

149) Упростите значение выражения $\frac{x^2-12}{x-2\sqrt{3}}-2\sqrt{3}$.

150) Упростите значение выражения $\frac{x^2-8}{x+2\sqrt{2}}+2\sqrt{2}$.

6. Степень с целым показателем и ее свойства

151) Вычислите значение выражения $5^{-1} \cdot 25 + 3^{-1} \cdot 9$.

152) Вычислите значение выражения $2^{-2} \cdot 8 - 3^{-2} \cdot 27$.

153) Вычислите значение выражения $2^{-3} \cdot 64 - 5^{-1} \cdot 25$.

154) Вычислите значение выражения $3^{-1} \cdot 27 + 4^{2} \cdot 4^{-3}$.

155) Вычислите значение выражения $3^{-2} \cdot 9^{2} - 4^{-1} \cdot 36$.

156) Вычислите значение выражения $2^{-3} \cdot 8 - 10^{-1} \cdot 100$.

157) Вычислите значение выражения $3^{-4} \cdot 243 + 9^{-2} \cdot 81$.

158) Вычислите значение выражения $2^{-1} \cdot 6 - 6^{-1} \cdot 42$.

159) Вычислите значение выражения $3^{-2} \cdot 18 + 2^{-3} \cdot 16$.

160) Вычислите значение выражения $2^{-4} \cdot 8 - 4^{-1} \cdot 6$.

161) Упростите выражение $a^{2} \cdot a^{-3}:a^{-4}$.

162) Упростите выражение $a^{3} \cdot a^{2}:a^{-1}$.

163) Упростите выражение $(a^{2}:a^{-3}) \cdot a^{4}$.

164) Упростите выражение $a \cdot a^{3}:a^{-6}$.

165) Упростите выражение $a^{-5} \cdot a^{4}:a^{-3}$.

166) Упростите выражение $(a^{7}:a^{4}) \cdot a^{-3}$.

167) Упростите выражение $(a^{4}:a^{3}) \cdot a^{-4}$.

168) Упростите выражение $(a^{3} \cdot a^{-5}):a^{2}$.

169) Упростите выражение $(a^{-4}:a^{-5}) \cdot a^{-3}$.

170) Упростите выражение $(a \cdot a^{-4}):a^{-3}$.

171) Упростите выражение $(a^{-1} + b^{-1}):(a + b)$.

172) Упростите выражение $(a^{-1} - b^{-1}):(a^{2} - b^{2})$.

173) Упростите выражение $(a^{-1} - b^{-1}) \cdot ab$.

174) Упростите выражение $(a^{-2} - b^{-2}):(b - a)$.

175) Упростите выражение $(a^{-2} + b^{-2}) \cdot a^{2}b^{2}$.

176) Упростите выражение $(a^{-2} - b^{-2}) \cdot a^{2}b^{2}$.

177) Упростите выражение $(a^{-3} - b^{-3}):(a^2 + ab + b^2)$.

178) Упростите выражение $(a^{-3} - b^{-3}) : \dfrac{ab}{a-b}$.

179) Упростите выражение $(a^{-3} + b^{-3}):(a^2 - ab + b^2)$.

180) Упростите выражение $(a^{-3} + b^{-3}):(a + b)$.

7. Корень *n*-й степени, степень с рациональным показателем и их свойства.

181) Найдите значение выражения $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$.

182) Найдите значение выражения $\sqrt[3]{64 \cdot 8}$.

183) Найдите значение выражения $\sqrt[3]{125 \cdot 27}$.

184) Найдите значение выражения $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$.

185) Найдите значение выражения $\sqrt[4]{81 \cdot 625}$.

186) Найдите значение выражения $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}}$.

187) Найдите значение выражения $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$.

188) Найдите значение выражения $\sqrt[3]{\dfrac{125}{64}}$.

189) Найдите значение выражения $\sqrt[4]{\dfrac{81}{16}}$.

190) Найдите значение выражения $\sqrt[4]{\dfrac{16}{625}}$.

191) Упростите выражение $\left(\sqrt[3]{a}b^{-1}\right)^3 b^3$.

192) Упростите выражение $\left(\sqrt[4]{a} \cdot a^{\frac{1}{4}}\right)^2 \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^6$.

193) Упростите выражение $\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)^6$.

194) Упростите выражение $\left(a^{-\frac{1}{4}}\sqrt[3]{b}\right)^{12}\cdot a^3$.

195) Упростите выражение $\left(a^{-\frac{1}{5}}b^{-1}\right)^{-5}\cdot b^{-5}$.

196) Упростите выражение $\left(a^2b^{-\frac{1}{3}}\right)^2\cdot b^{-\frac{1}{3}}$.

197) Упростите выражение $\left(ab^{-\frac{1}{4}}\right)^2\sqrt{b}$.

198) Упростите выражение $\left(\sqrt{ab}\right)^{-1}\cdot a^2b^{\frac{1}{2}}$.

199) Упростите выражение $\left(ab^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{-1}$.

200) Упростите выражение $\left(ab^{-2}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{b}$.

8. Тригонометрические выражения и тригонометрические функции.

201)Найдите значение выражения $\sin 45^\circ\cdot\cos 45^\circ + 2\,\mathrm{tg}\,30^\circ$.

202) Найдите значение выражения $\cos 30^\circ + \sin 60^\circ$.

203) Найдите значение выражения $\mathrm{tg}\,45^\circ\cdot\mathrm{ctg}\,30^\circ - \sin 30^\circ$.

204) Найдите значение выражения $\mathrm{ctg}\,30^\circ\cdot\mathrm{tg}\,30^\circ + \sin 45^\circ$.

205) Найдите значение выражения $\cos 60^\circ\cdot\sin 30^\circ + 1$.

206) Найдите значение выражения $\sin 45^\circ\cdot\cos 60^\circ - \mathrm{tg}\,45^\circ$.

207) Найдите значение выражения $\sin 60^\circ\cdot\sin 90^\circ + \mathrm{ctg}\,45^\circ$.

208) Найдите значение выражения $\cos 45° \cdot \operatorname{ctg} 45° - \operatorname{tg} 30°$.

209) Найдите значение выражения $\operatorname{tg} 30° \cdot \cos 60° - \operatorname{ctg} 45°$.

210) Найдите значение выражения $\cos 45° \cdot \operatorname{tg} 45° + \sin 45°$.

211) Известно, что $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$. Найдите значение других тригонометрических функций угла α.

212) Известно, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Найдите значение других тригонометрических функций угла α.

213) Известно, что $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите значение других тригонометрических функций угла α.

214) Известно, что $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$. Найдите значение других тригонометрических функций угла α.

215) Известно, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\cos\alpha = \frac{1}{5}$. Найдите значение других тригонометрических функций угла α.

216) Известно, что $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Найдите значение других тригонометрических функций угла α.

217) Известно, что $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = 3$. Найдите значение других тригонометрических функций угла α.

218) Известно, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$. Найдите значение других тригонометрических функций угла α.

219) Известно, что $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\operatorname{ctg}\alpha = -2$. Найдите значение других тригонометрических функций угла α.

220) Известно, что $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\mathrm{tg}\,\alpha = -3$. Найдите значение других тригонометрических функций угла α.

221) Упростите выражение

$\sin^6\alpha + 3\sin^4\alpha\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^4\alpha + \cos^6\alpha$.

222) Упростите выражение $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4} + 2\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} + \mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{4}$.

223) Упростите выражение

$$2\sin^2\frac{\pi}{6}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} + \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\right)\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}.$$

224) Упростите выражение $20\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos^2\alpha\cdot\frac{1-\mathrm{tg}^4\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$.

225) Упростите выражение $\dfrac{1+\mathrm{tg}^6\frac{\pi}{3}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}+\mathrm{tg}^4\frac{\pi}{3}}$.

226) Упростите выражение $\dfrac{1-\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha(1+\sin^2\alpha)}$.

227) Упростите выражение

$$\frac{\sin^2\alpha(1+3\mathrm{ctg}^2\alpha+3\mathrm{ctg}^4\alpha+\mathrm{ctg}^6\alpha)}{(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)^2}.$$

228) Упростите выражение $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\beta}$.

229) Упростите выражение

$$\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha-\beta)}.$$

230) Упростите выражение $(\sin^2 x - \cos^2 x)^2 + \sin^2 2x$.

231) Упростите выражение $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha}$.

232) Упростите выражение

$$\frac{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta+2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

233) Упростите выражение $\dfrac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)(1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta}$.

234) Упростите выражение

$$\frac{\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}^3 y}{(1+\operatorname{tg}x\ \operatorname{tg}y)(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x\ \operatorname{tg}y+\operatorname{tg}^2 y)}.$$

235) Упростите выражение

$$\frac{\cos^4 2\alpha-\sin^4 2\alpha}{\cos 4\alpha}-(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)^2.$$

236) Упростите выражение

$$\left(\frac{1}{1-\operatorname{tg}x}-\frac{1}{1+\operatorname{tg}x}\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right).$$

237) Найдите значение выражения

$$4\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{1+\pi}{6}\right)+4\sin\frac{7\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}.$$

238) Найдите значение выражения

$$\frac{\sin\frac{11\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{11\pi}{6}\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{12}}.$$

239) Упростите выражение $\dfrac{\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)-\cos\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{4}}$.

240) Упростите выражение $\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{12}+\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)}{\sin\dfrac{5\pi}{12}-\cos\dfrac{5\pi}{12}}$.

241) Упростите выражение $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{x}{4}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{4}\right)\sin\dfrac{x}{4}$.

242) Упростите выражение

$$\frac{\sin 12x+\sin 8x+\sin 10x+\sin 9x+\sin 11x}{\cos 12x+\cos 8x+\cos 10x+\cos 9x+\cos 11x}.$$

243) Упростите выражение $\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x\cdot \operatorname{ctg}\left(x-\dfrac{5\pi}{4}\right)}$.

244) Упростите выражение

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}+\operatorname{ctg}x\right)\left(1-\frac{1}{\sin x}+\operatorname{ctg}x\right)\sin x.$$

245) Упростите выражение $\dfrac{\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}2x+1}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x}$.

246) Упростите выражение

$$\frac{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}.$$

247) Упростите выражение $\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2(-x)}{\operatorname{tg}^2(x-\pi)-1}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{ctg}(\pi+x)}$

248) Упростите выражение

$$\frac{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{\sin^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}-1\right)\left(\mathrm{tg}^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1\right)}{\mathrm{ctg}^2\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+1}.$$

249) Упростите выражение

$$\frac{1+\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{ctg}^2\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin^2\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)+\mathrm{tg}^2\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)}.$$

250) Упростите выражение

$$\frac{\sin^2\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)}{\frac{1}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}-1}+\frac{\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}{\frac{1}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}-1}.$$

II. Уравнения и неравенства

1. Уравнение с одной переменной.

251) Решите уравнение $2x-3=5-2x$.

252) Решите уравнение $2x+1=3-x$.

253) Решите уравнение $x-4=2-3x$.

254) Решите уравнение $2x+5=5-x$.

255) Решите уравнение $x-4=4-x$.

256) Решите уравнение $2x-8=11-3x$.

257) Решите уравнение $17x+11=6+12x$.

258) Решите уравнение $11x-4=4-x$.

259) Решите уравнение $x-8=11-12x$.

260) Решите уравнение $2x-4=5-x$.

261) Решите уравнение $\frac{x}{2}-\frac{3x-2}{4}=3$.

262) Решите уравнение $\frac{2x-1}{3}+\frac{x+1}{2}=2$.

263) Решите уравнение $\frac{x-1}{3}-\frac{x}{4}=1$.

264) Решите уравнение $\frac{x}{2}+\frac{3x-2}{5}=4$.

265) Решите уравнение $\frac{x-1}{4}+\frac{2x+1}{3}=5$.

266) Решите уравнение $\frac{2x-1}{2}+\frac{3x+2}{3}=\frac{x+1}{4}$.

267) Решите уравнение $\frac{2x+2}{5}-\frac{x-4}{3}=\frac{x-2}{4}$.

268) Решите уравнение $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{3x+11}{4}$.

269) Решите уравнение $\frac{x}{3}+\frac{x+2}{5}=\frac{x-4}{2}$.

270) Решите уравнение $\frac{2x+3}{5}=\frac{x}{4}-\frac{2x+3}{6}$.

2. Системы линейных уравнений

271) Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$.

272) Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$.

273) Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$.

274) Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$.

275) Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} x - y = -1 \\ y - 2x = 3 \end{cases}$.

276) Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} \frac{x}{2} - y = 3 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$.

277) Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} x + \frac{y}{3} = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$.

278) Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} x - y = 3 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 2 \end{cases}$.

279) Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x + \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \end{cases}$.

280) Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$.

3. Квадратные уравнения

281) Решите уравнение $x^2 - 2x - 1 = 0$.

282) Решите уравнение $x^2 + x - 4 = 0$.

283) Решите уравнение $x^2 - x - 1 = 0$.

284) Решите уравнение $x^2 + 2x - 4 = 0$.

285) Решите уравнение $x^2 + 3x - 5 = 0$.

286) Решите уравнение $2x^2 - x - 1 = 0$.

287) Решите уравнение $2x^2 + x - 4 = 0$.

288) Решите уравнение $3x^2 - 2x - 3 = 0$.

289) Решите уравнение $3x^2 + x - 1 = 0$.

290) Решите уравнение $5x^2 - x - 1 = 0$.

291) Найдите сумму квадратов корней уравнения $2x^2 + 3x - 4 = 0$.

292) Найдите сумму квадратов корней уравнения $2x^2 - x - 1 = 0$.

293) Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + x - 4 = 0$.

294) Найдите сумму квадратов корней уравнения $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

295) Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - x - 6 = 0$.

296) Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - x - 4 = 0$.

297) Найдите сумму квадратов корней уравнения $2x^2 + 3x + 1 = 0$.

298) Найдите сумму квадратов корней уравнения $2x^2 - x - 4 = 0$.

299) Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + 3x - 5 = 0$.

300) Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 3x - 3 = 0$.

301) Найдите сумму кубов корней уравнения $x^2 - x - 5 = 0$.

302) Найдите сумму кубов корней уравнения $x^2 + 2x - 4 = 0$.

303) Найдите сумму кубов корней уравнения $2x^2 - x - 1 = 0$.

304) Найдите сумму кубов корней уравнения $2x^2 + x - 3 = 0$.

305) Найдите сумму кубов корней уравнения $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

306) Решите уравнение $\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = 4$.

307) Решите уравнение $\frac{x}{3} + \frac{2}{x} = 5$.

308) Решите уравнение $\frac{x}{5} + \frac{1}{x} = 4$.

309) Решите уравнение $\frac{x}{3} - \frac{2}{x} = 1$.

310) Решите уравнение $\frac{x}{2} - \frac{1}{x} = 3$.

311) Решите неравенство $2x - 3 \leq 3 - x$.

312) Решите неравенство $2x + 1 \geq x - 2$.

313) Решите неравенство $x - 1 < 3x + 1$.

314) Решите неравенство $2x + 2 > x - 3$.

315) Решите неравенство $x - 4 \leq 2x + 5$.

316) Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x + 2 \leq x - 4 \\ x + 5 \geq 2x - 1 \end{cases}$.

317) Решите систему неравенств $\begin{cases} x - 1 \leq 3x + 2 \\ 2x - 4 \leq x \end{cases}$.

318) Решите систему неравенств $\begin{cases} x + 1 \leq 2x - 1 \\ x + 3 \geq 3x - 2 \end{cases}$.

319) Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x + 4 < x - 1 \\ x > 3x - 5 \end{cases}$.

320) Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x+5 \geq x-4 \\ x-1 < 2x+3 \end{cases}$.

321) Решите неравенство $x^2 - 5x + 4 \geq 0$.

322) Решите неравенство $x^2 + 2x - 3 \leq 0$.

323) Решите неравенство $x^2 - x - 2 > 0$.

324) Решите неравенство $2x^2 - x - 1 < 0$.

325) Решите неравенство $x^2 + x - 6 \geq 0$.

326) Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x+2} < 0$.

327) Решите неравенство $\dfrac{x^2 - x - 2}{x+1} \geq 0$.

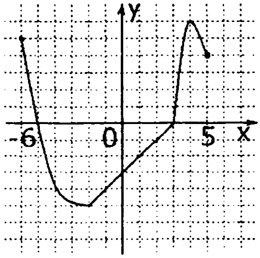
328) Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x-1} < 0$.

329) Решите неравенство $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x+2} \leq 0$.

330) Решите неравенство $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x-4} < 0$.

III. Функции

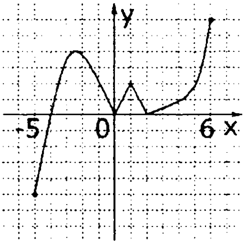
331) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-6;5]$. Укажите промежуток, которому принадлежат все нули функции.



1) $[-5; 3]$;   3) $[3; 5]$;

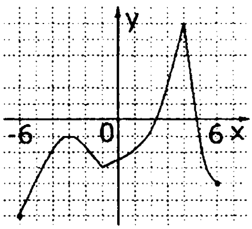
2) $(-5; 3]$;   4) $[-2;1)$.

332) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-5; 6]$. Укажите промежуток, которому не принадлежит ни одного экстремума функции.



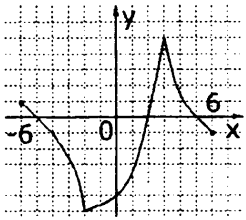
1) $[-5; 6]$;
2) $(-5; 0)$;
3) $(3; 5]$;
4) $[-4; 1)$.

333) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-6; 6]$. Укажите промежуток, которому принадлежит только один экстремум функции.



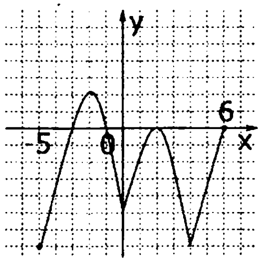
1) $[-5; -2]$;
2) $(-2; 6)$;
3) $(0; 2]$;
4) $[-6; 5]$.

334) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-6; 6]$. Укажите промежуток, которому принадлежит только один ноль функции.



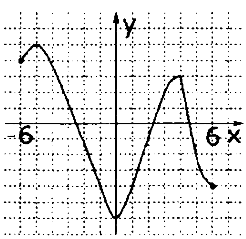
1) [1; 3]; 3) (–6; 3];
2) [1; 6); 4) (–6; 6).

335) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке [–5; 6]. Укажите промежуток, которому принадлежат все экстремумы функции



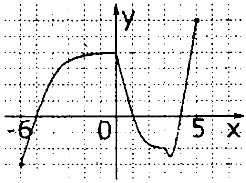
1) [–2; 4]; 3) [–5; 3);
2) [–3; 2]; 4) (–1; 1).

336) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке [–6; 6]. Укажите ординату точки пересечения графика функции с осью Oy.



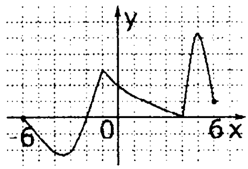
1) 6; 3) –5;
2) –4; 4) –6.

337) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-6; 5]$. Укажите промежуток, которому принадлежат все нули функции.



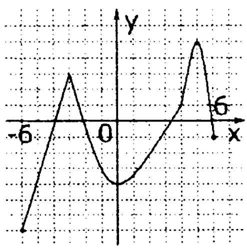
1) $(-6; 0]$; 3) $[0; 5]$;
2) $[-5; 4]$; 4) $(-3; 1)$.

338) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-6; 6]$. Укажите ординату пересечения графика функции с осью Oy.



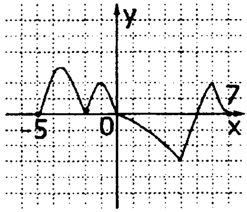
1) 0; 3) 2;
2) 4; 4) -2.

339) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-6; 6]$. Укажите промежуток, которому не принадлежит ни одного экстремума функции.



1) $[-6; 0]$; 3) $[-3; 6)$;
2) $(0; 5]$; 4) $(1; 4)$.

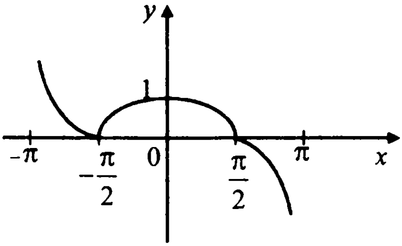
340) Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-5;\ 7]$. Укажите промежуток, которому принадлежит только один экстремум функции



1) $[-5;\ 0)$; 3) $[3;\ 6]$;

2) $(1;\ 5]$; 4) $(1;\ 7)$.

341)

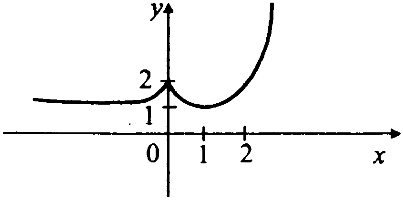


Укажите промежуток возрастания функции $y = f(x)$, заданной графиком.

1) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; 3) $[0;\pi)$;

2) $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$; 4) $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

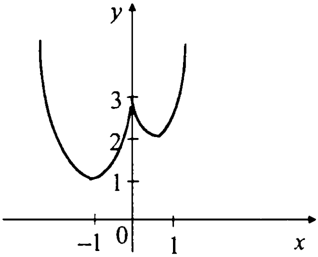
342)



Укажите промежуток убывания функции $y = f(x)$, заданной графиком.

1) $(-\infty;0] \cup [1;+\infty)$; 3) $[0;1]$;
2) $(0;2]$; 4) $[1;+\infty)$.

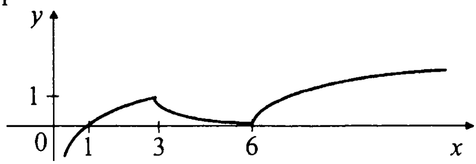
343)



Укажите промежуток убывания функции $y = f(x)$, заданной графиком.

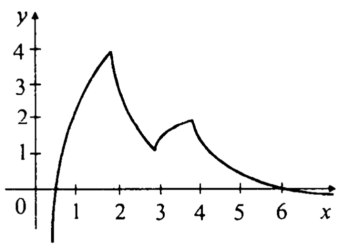
1) $(-\infty;0]$; 3) $[-1;1]$;
2) $[-1;0] \cup [1;+\infty)$; 4) $(-\infty;-1] \cup [0;1]$.

344) Укажите промежутки возрастания функции $y = f(x)$, заданной графиком.



1) $[3;6]$; 3) $(-\infty;1]$;
2) $(0;3] \cup [6;\infty)$; 4) $[1;3] \cup [4;\infty)$.

345)



Укажите промежутки возрастания функции $y = f(x)$, заданной графиком.

1) $(0;2] \cup [3;4]$; 3) $(-\infty; 2] \cup [3; 4]$;

2) $(-\infty; 4]$; 4) $[2; 4]$.

346) Укажите промежуток, которому принадлежит только один ноль функции $f(x) = \sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{7x}$.

1) $[3; 4]$; 3) $[4; 10)$;

2) $(5; 6)$; 4) $[0; 3)$.

347) Укажите промежуток, которому принадлежат все нули функции $f(x) = 2\sqrt{2} - \sqrt{x^2 - 2x}$.

1) $[-3; 5]$; 3) $(2; 4]$;

2) $[0; 2]$; 4) $[-2; 0)$.

348) Укажите промежуток, которому не принадлежит ни одного нуля функции $f(x) = x - \sqrt{2x - 1}$.

1) $(-2; 10]$; 3) $[0; 1]$;

2) $[1; 10)$; 4) $(1; 3)$.

349) Укажите промежуток, которому принадлежат все нули функции $y = x - 5\sqrt{x} + 6$.

1) $[4; 9]$; 3) $[4; 9)$;

2) $(4; 9]$; 4) $(9; 12)$

350) Укажите промежуток, которому принадлежит только один ноль функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{15}$.

1) $(-3; 4]$; 3) $(-3; 5]$;

2) $(-3; 1)$; 4) $[0; 2]$.

351) Укажите промежуток, которому не принадлежит ни одного нуля функции $f(x) = x - \sqrt{6x - 5}$.

1) $[1; 5]$; 3) $[5; 6)$;

2) $(1; 5)$; 4) $(0;1]$.

352) Укажите промежуток, которому принадлежат все нули функции $f(x) = x + 3 - 4\sqrt{x}$.

1) (1; 9]; 3) [1; 9];

2) [9; 10); 4) (1; 10).

353) Укажите промежуток, которому принадлежит только один ноль функции $f(x) = \sqrt{2} - \sqrt{5x-2}$.

1) (0,5; 0,6); 3) (0,5; 1);

2) [0,5; 1); 4) (–2; 0].

354) Укажите промежуток, которому принадлежит только один ноль функции $f(x) = 3x + 3 - 10\sqrt{x}$.

1) (0; 9); 3) [0; 10);

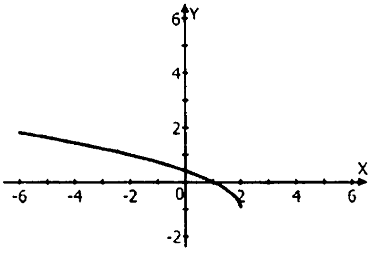
2) (2; 3]; 4) [1; 8).

355) Укажите промежуток, которому не принадлежит ни одного нуля функции $f(x) = \sqrt{5x} - \sqrt{4x^2+1}$.

1) (0; 1]; 3) [–1; 1);

2) [1/2; 1); 4) (1/2; 2).

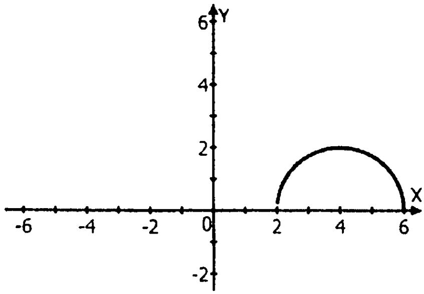
356) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



1) (-1;2); 3) (-∞; 2];

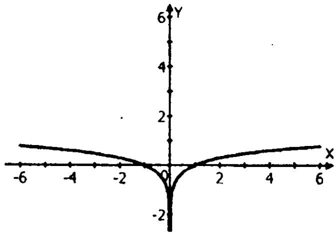
2) [-1;2) 4) [–1;+ ∞).

357) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



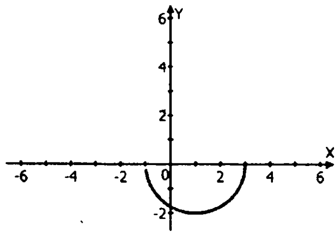
1) (0;2); 3) [0;2];
2) (2;6); 4) [2;6].

358) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



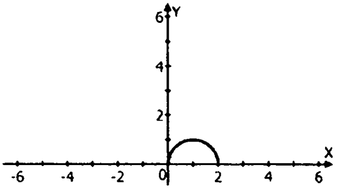
1) 0; 3) $(0;+\infty)$;
2) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; 4) $(-\infty;0)$.

359) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



1) [–2;0]; 3) [–1;3];
2) [–1;0]; 4) (–1;3).

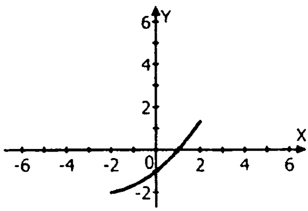
360) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



1) $(-\infty; +\infty)$;   3) $[-2;0)$;

2) $[0;1]$;   4) $[0;2]$.

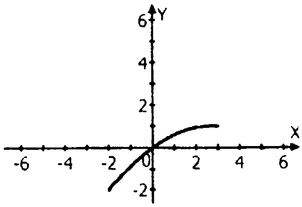
361) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



1) $[-2; 1)$;   3$[-2; 0]$;

2) $[-2; 3)$;   4) $[-2; 2]$.

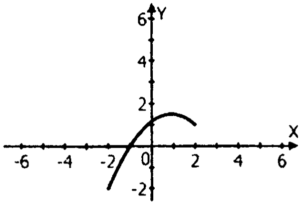
362) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



1) $[-2; 3]$;   3) $[-2; 0]$;

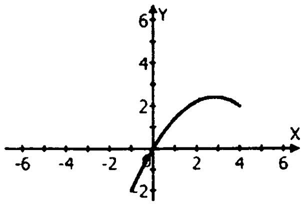
2) $[-2; 1]$;   4) $[0; 1]$.

363) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



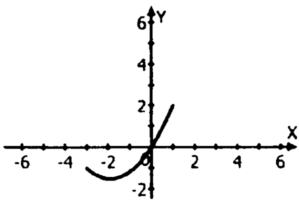
1) [0; 1]; 3) [–2; 1];
2) [–1; 2]; 4) [–2; 2].

364) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



1) [–1; 0]; 3) [0; 4];
2) [–2; 2]; 4) [–1; 4].

365) Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.



1) [–1; 2]; 3) [–3; 1];
2) [0; 1]; 4) [–3; 0].

366) Найдите множество значений функции $y=\cos^2 x+3$.
1) $[0;4]$; 3) $[3;+\infty)$;
2) $[3;4]$; 4) $(3;4)$.

367) Найдите множество значений функции
$y = \log_2(x-3) - \log_2(x-2)$.
1) $[0;+\infty)$; 3) $(-\infty;0]$;
2) $(0;+\infty)$; 4) $(-\infty;+\infty)$.

368) Найдите множество значений функции $y = e^{x^2+1}$.
1) $(-\infty; 0)$; 3) $[e; +\infty)$;
2) $[0; +\infty)$; 4) e.

369) Найдите множество значений функции $y = 2^{\sqrt{x}} - 1$.
1) 0; 3) $(-\infty;0]$;
2) $[0;+\infty)$; 4) $(-\infty;0)$.

370) Найдите множество значений функции $y=2^{\sin x}-1$.
1) $(-\infty; 1]$; 3) $[1; 2]$;
2) $\left[-\frac{3}{2}; 1\right]$; 4) $[1; +\infty)$.

371) Найдите множество значений функции $y = 4 - \cos x$.
1) $[2; 4]$; 3) $[-2; 6]$;
2) $[3; 5]$; 4) $[-1; 1]$.

372) Найдите множество значений функции $y = 1 + 5\cos x$.
1) $[-4; 6]$; 3) $[0; 2]$;
2) $[-2; 2]$; 4) $[4; 6]$.

373) Найдите множество значений функции $y = 3 - 4\cos x$.
1) $[-1; 3]$; 3) $[-4; 4]$;
2) $[-1; 7]$; 4) $(-1; 3]$.

374) Найдите множество значений функции $y = 2 - 4\cos x$.
1) $[-4; 2]$; 3) $[2; 6]$;
2) $[-1; 1]$; 4) $[-2; 6]$.

375) Найдите множество значений функции $y = 2\sin x + 5$.

1) $[-2; 2]$; 3) $[-5; 5]$;

2) $[3; 7]$; 4) $[-1; 1]$.

376) Найдите наибольшее целое значение функции
$y=2\sqrt{9\sin^2 x + 6\sin x + 13}$.

377) Найдите наименьшее целое значение функции
$y = 3\sqrt{4 - 2\cos x - \cos^2 x}$.

378) Найдите наибольшее целое значение функции
$y = 7\sqrt{1 + 4\sin x \cos x}$.

379) Найдите наибольшее целое значение функции
$y = \sqrt{\cos x - \sin^2 x + 6}$.

380) Найдите наибольшее целое значение функции
$y = \sqrt{5\cos^2 x + 4\cos x + 3}$.

381) Найдите наибольшее целое значение функции
$y = 0{,}5 \cdot \sqrt{10 + 6\cos x + 9\cos^2 x}$.

382) Найдите наибольшее целое значение функции
$y = \frac{2}{3}\sqrt{16\sin^2 x + 16\sin x + 17}$.

383) Найдите наибольшее целое значение функции
$y = \frac{1}{3}\sqrt{16\sin^2 x + 40\sin x + 44}$.

384) Найдите наибольшее целое значение функции
$y = 2{,}5\sqrt[3]{16\sin^2 x + 24\sin x + 24}$.

385) Найдите наибольшее целое значение функции
$y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{40 - 60\cos x + 25\cos^2 x}$.

IV. Прогрессии и текстовые задачи

386) Найдите сумму восьми первых членов последовательности, у которых сумма любого числа членов равна квадрату этого числа.

387) Сумма первого и седьмого членов возрастающей арифметической прогрессии равна 14, а произведение третьего и шестого ее членов равно 10. Найдите сумму 8 первых членов этой прогрессии.

388) Найдите разность арифметической прогрессии, если известно, что сумма 9 ее первых членов равна 3069, а первый ее член равен 429.

389) Найдите первый член арифметической прогрессии, если известно, что сумма 11 ее первых членов равна 165, а ее разность равна 7.

390) Найдите разность арифметической прогрессии, если известно, что сумма 15 ее первых членов равна 3300, а первый ее член равен 311.

391) Найдите знаменатель бесконечной геометрической прогрессии, если известно, что ее сумма равна 18, а ее первый член равен 12.

392) Найдите первый член геометрической прогрессии, если известно, что сумма 6 первых ее членов равна 6552, а знаменатель равен 3.

393) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если известно, что сумма 4 ее первых членов равна 8736, а ее первый член равен 56.

394) Найдите третий член бесконечной геометрической прогрессии, если известно, что ее сумма равна 66, а ее первый член равен 33.

395) Найдите четвертый член геометрической прогрессии, если известно, что сумма 5 ее первых членов равна 713, а ее знаменатель равен 2.

396) Пятый член арифметической прогрессии равен 14, а сумма первых десяти членов этой же арифметической прогрессии равна 155. Найдите произведение третьего и пятого членов этой прогрессии.

397) Третий член арифметической прогрессии равен 5. А сумма первых десяти членов равна 75. Найдите сумму квадратов второго и четвертого членов этой арифметической прогрессии.

398) Первый член бесконечной убывающей геометрической прогрессии равен 8, а ее сумма равна 16. Найдите сумму третьего и четвертого членов этой геометрической прогрессии.

399) Третий член геометрической прогрессии с положительным знаменателем равен 9, а сумма первого члена со вторым равна 4. Найдите пятый член этой геометрической прогрессии.

400) В геометрической прогрессии с положительным знаменателем третий член равен 4, а пятый 16. Найдите сумму первых 10 членов этой геометрической прогрессии.

401) Восьмой член арифметической прогрессии равен 24, а пятый член этой же арифметической прогрессии равен 15. Найдите сумму первого и десятого членов этой прогрессии.

402) Пятнадцатый член арифметической прогрессии равен 37, а сумма пятого и шестого равна 36. Найдите произведение первых двух членов прогрессии.

403) Третий член арифметической прогрессии в три раза меньше шестого, а сумма второго и пятого равна 16. Определите первый член прогрессии.

404) Пятый член арифметической прогрессии равен 15, а сумма четвертого и одиннадцатого членов равна 40. Найдите произведение второго и третьего членов прогрессии.

405) Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна 240, а сумма первых десяти членов этой прогрессии равна 555. Найдите сумму второго, шестого и седьмого членов этой прогрессии.

406) Сколько граммов воды нужно выпарить из 0,5 кг солевого раствора, содержащего 85% воды, чтобы получить массу с содержанием 75% воды.

407) В двух канистрах находится 90 л бензина. Если из первой канистры перелить во вторую 10% бензина, находящегося в первой канистре, то в обеих канистрах будет поровну. Сколько литров бензина в каждой канистре?

408) Насос может выкачать из бассейна 1/3 воды за 10 мин. Проработав 0,25 ч, насос остановился. Найдите вместимость бассейна, если после остановки насоса в бассейне еще осталось 40 $м^3$ воды.

409) Велосипедист проехал расстояние между двумя поселками за 3 дня. В первый день он проехал 1/6 всего пути и еще 50 км, во второй 1/5 всего пути и еще 15 км, а в третий день 1/20 всего пути и оставшиеся 70 км. Найдите расстояние между поселками.

410) Вкладчик сначала снял со своего счета в сбербанке 1/5 своих денег, потом 5/16 оставшихся и еще 999 руб. После этого у него осталось на сберкнижке 1/4 всех денег. Каким был первоначальный вклад?

411) Группа школьников совершила поход во время летних каникул. Первые 50 км они проплыли на байдарках, 1/5 оставшейся части маршрута прошли пешком, а затем опять плыли на байдарках. В итоге на байдарках проплыли в 3 раза больше, чем прошли пешком. Какова длина всего маршрута?

412) Насос может выкачать из бассейна 5/6 воды за 4 ч 15 мин. До полудня насос работал 4,5 ч, после чего осталось выкачать еще 80 $м^3$. Найдите объем бассейна.

413) На выпускном экзамене по математике 1440 школьников решили задачи с ошибками, 320 школьников, сдававших экзамен в этот день, не решили ни одной задачи, а число школьников, решивших все задачи правильно, относится к числу не решивших ни одной задачи, как 5:3. Сколько школьников экзаменовалось по математике в этот день?

414) Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 61. Если от этого двузначного числа отнять 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите число.

415) Заработные платы рабочего за январь и февраль относятся, как 9:8, а за февраль и март, как 6:8. За март он получил на 450 руб. больше, чем за январь, и за перевыполнение квартального плана рабочему начислили премию в размере 20% его трехмесячного заработка. Найдите размер премии.

416) К 200 г раствора, содержащего 60% соли, добавили 300 г раствора, содержащего 50% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

417) К 200 г раствора, содержащего 30% соли, добавили 400 г раствора, содержащего 75% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

418) К 900 г раствора, содержащего 30% соли, добавили 300 г раствора, содержащего 90% соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

419) К 200 г раствора, содержащего 80% соли, добавили 300 г раствора, содержащего 40% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

420) К 100 г раствора, содержащего 70% соли, добавили 300 г раствора, содержащего 50% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

421) К 150 г раствора, содержащего 20% соли, добавили 350 г раствора, содержащего 40% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

422) К 350 г раствора, содержащего 10% соли, добавили 450 г раствора, содержащего 50% соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

423) К 360 г раствора, содержащего 10% соли, добавили 440 г раствора, содержащего 50% той же соли.

Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

424) К 250 г раствора, содержащего 20% соли, добавили 150 г раствора, содержащего 60% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

425) К 90 г раствора, содержащего 10% соли, добавили 160 г раствора, содержащего 35% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

ВАРИАНТЫ ТИПОВЫХ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

ВАРИАНТ 1

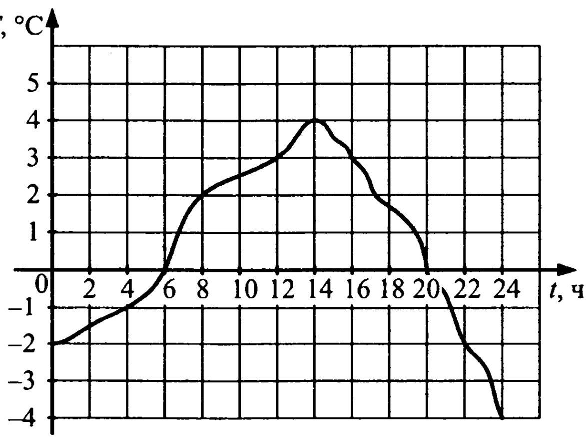
ЧАСТЬ 1

1. Найдите значение выражения $\frac{3,4}{2,2-3,9}$.

Ответ: ________________ .

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха в течение суток.

Какая температура была в полдень?

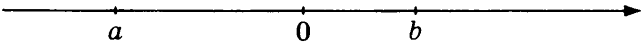


Ответ: ________________ .

3. Абрикосы стоят 150 рублей за килограмм, а черешня – 180 рублей за килограмм. На сколько процентов черешня дороже абрикосов?

Ответ: ________________ .

4. На координатной прямой отмечены числа a и b.



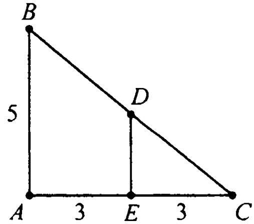
Из следующих утверждений выберите верное.

1) $-3a < 0$
2) $b + a > 0$
3) $b - a < 0$
4) $|a| - |b| > 0$

5. Укажите наименьшее из чисел:

1) $4\sqrt{5}$
2) 10^{-1}
3) $\frac{1}{3} : 10^{-2}$
4) $5\frac{1}{3} + 3\frac{2}{7}$

6. Исходя из данных рисунка, найдите длину отрезка DE.

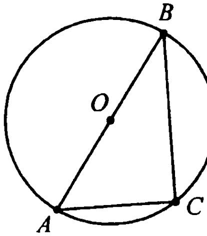


Ответ: ________________ .

7. Решите уравнение $x^2 + 3x = 4$.

Ответ: ________________ .

8. Найдите угол C (см. рис.), если точка O — центр окружности.



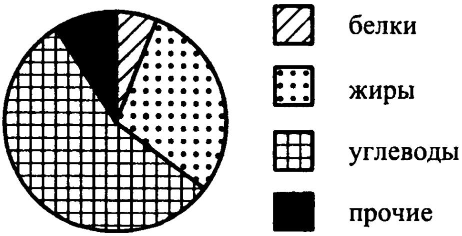
Ответ: ________________ .

9. Упростите выражение $a^3 - (a+1)^3 + 3a^2$.

Ответ: ________________ .

10. На круговой диаграмме представлено содержание различных питательных веществ в некотором продукте.

Каких веществ содержится в этом продукте больше всего?



1) белков
2) жиров
3) углеводов
4) прочих

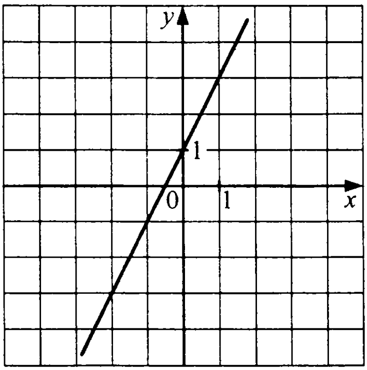
11. В партии из 400 телевизоров оказалось 8 бракованных. Какова вероятность купить исправный телевизор?

Ответ: ________________ .

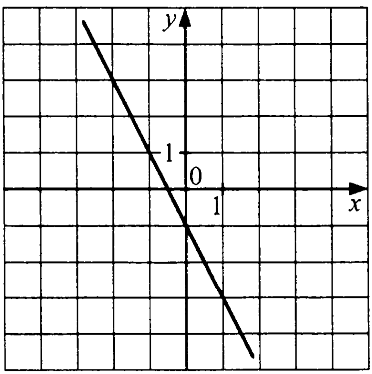
12. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

График функции

А)



Б)



Формула

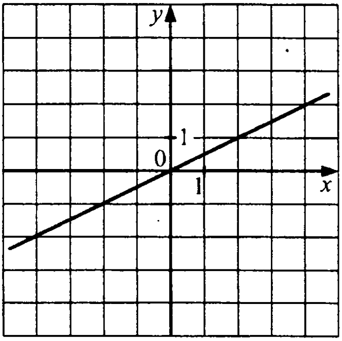
1) $y = 2x + 1$

2) $y = \frac{x}{2}$

3) $y = -\frac{x}{2}$

4) $y = -2x - 1$

В)



Ответ:

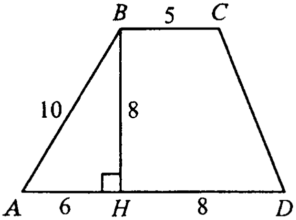
А	Б	В

13. Геометрическая прогрессия задана несколькими первыми членами: 2; –8; 32; ...

Найдите пятый член этой прогрессии.

Ответ: ________________ .

14. Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



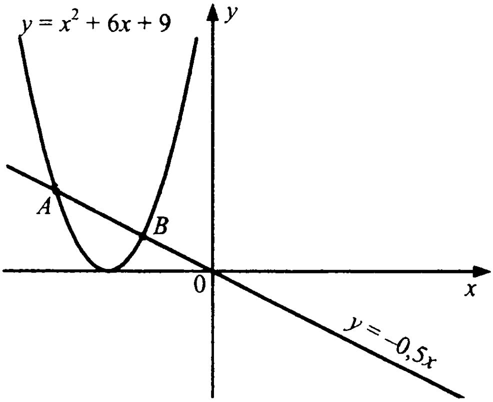
Ответ: ________________ .

15. Укажите номера верных утверждений.

1) Скалярное произведение векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними
2) Длина суммы двух векторов равна сумме их длин

3) Сумма внутренних накрест лежащих углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 180°
4) Длина окружности равна ее удвоенному радиусу
5) Площадь прямоугольника равна его периметру

16. Прямая и парабола пересекаются в точках A и B. Найдите координаты точки B.



Ответ: ________________ .

17. Из формулы $E = \frac{mv^2}{2}$ выразите переменную v (все величины положительны).

Ответ: ________________ .

18. Решите неравенство $5(1 - x)(x - 2) > 0$.

Ответ: ________________ .

ЧАСТЬ 2

При выполнении заданий 19–23 используйте бланк ответов № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение.

19. Сократите дробь $\dfrac{2^{2n+3}\cdot 3^{3n-1}}{4^n\cdot 27^{n+1}}$.

20. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что треугольники ABC и DEF равны.

21. Двое рабочих могут выполнить всю работу за 2 часа 40 минут. За сколько часов выполнит всю работу второй рабочий, если известно, что он работает вдвое быстрее первого?

22. Постройте график функции $y=\dfrac{x^2+x^3}{x+1}$ и определите, при каких значениях p прямая $y=p$ имеет с этим графиком только одну общую точку.

23. В треугольнике ABC стороны равны 3,7 и 8. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

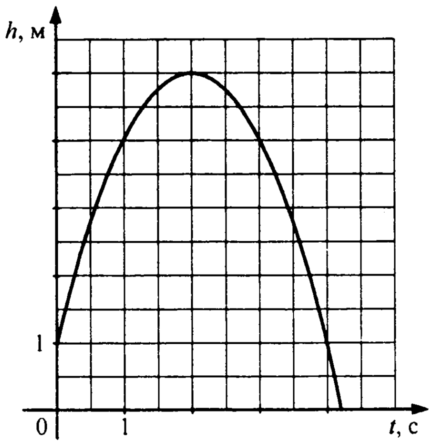
ВАРИАНТ 2

ЧАСТЬ 1

1. Выберите из чисел 0,99;1,04; -1,44; 0,989 наименьшее.

Ответ: _______________ .

2. Камень подбросили вертикально вверх, и он упал на землю. На рисунке изображен график зависимости высоты камня над землей от времени полета. Сколько метров пролетел камень за первые 2 с?

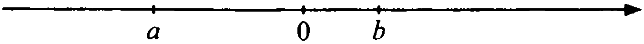


Ответ: _______________ .

3. Акционеру А принадлежит 70% акций предприятия, а акционеру Б – остальные акции. Прибыль предприятия за год (после уплаты налогов) составила 3 млн. рублей. Какую сумму (в рублях) из этой суммы должен получить акционер Б?

Ответ: _______________ .

4. На координатной прямой отмечены числа a и b.



Из следующих утверждений выберите верное.

1) $|a| - b > 0$

2) $-b > 0$

3) $b + a > 0$

4) $b - 5a < 0$

5. Укажите, какое из следующих выражений принимает наибольшее значение:

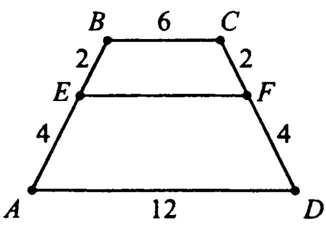
1) $5\sqrt{2}$

2) $\frac{1}{2} : 10^{-1}$

3) 8

4) $(-3) : \left(-\frac{1}{2} - 0{,}1\right)$

6. Исходя из данных рисунка, найдите длину отрезка EF.

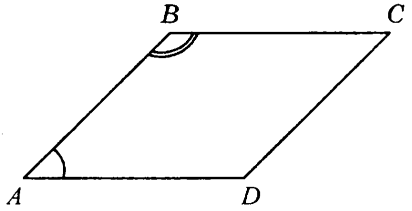


Ответ: ________________ .

7. Решите уравнение $\frac{x-1}{4} = \frac{2-x}{3}$.

Ответ: ________________ .

8. Угол A параллелограмма в 3 раза меньше угла B (см. рис.). Найдите угол D.



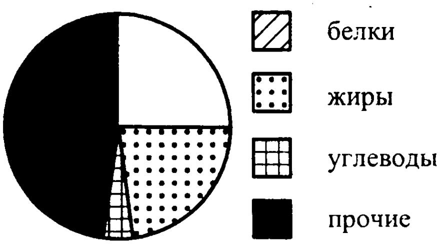
Ответ: ________________ .

9. Преобразуйте в многочлен выражение $(a-b)(2a-b)$.

Ответ: ________________ .

10. На круговой диаграмме представлено содержание различных питательных веществ в некотором продукте.

Содержание каких веществ в этом продукте меньше 10%?



1) белков
2) жиров
3) углеводов
4) прочих

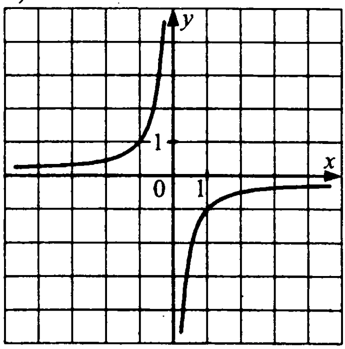
11. Из слова «МАТЕМАТИКА» случайным образом выбирается одна буква. Найдите вероятность того, что эта буква окажется гласной.

Ответ: ________________ .

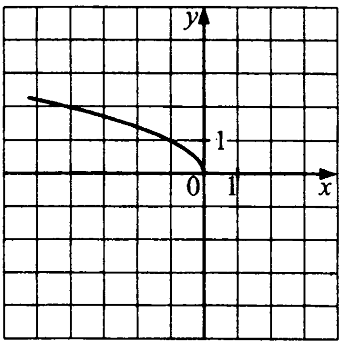
12. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

График функции

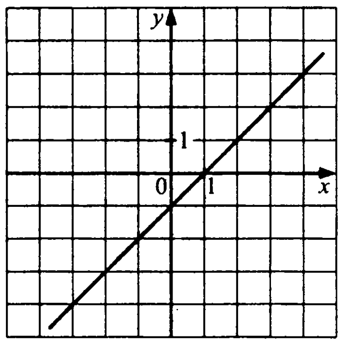
А)



Б)



В)



Формула

1) $y = \sqrt{-x}$

2) $y = -\sqrt{x}$

3) $y = -\dfrac{1}{x}$

4) $y = x - 1$

А	Б	В

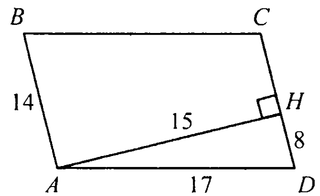
Ответ:

13. Арифметическая прогрессия задана своим первым членом $a_1 = -3$ и разностью $d = 3$.

Найдите двенадцатый член этой прогрессии.

Ответ: ________________ .

14. Найдите площадь параллелограмма, изображенного на рисунке.

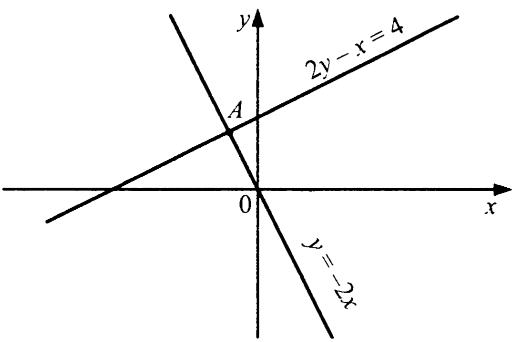


Ответ: ________________ .

15. Укажите номера верных утверждений.

1) Сумма углов шестиугольника равна 360°
2) Диагонали ромба равны
3) Диагонали прямоугольника равны
4) Площадь квадрата равна квадрату его стороны
5) Все углы правильного пятиугольника равны 112°

16. Две прямые пересекаются в точке A (см. рис.). Найдите координаты точки A.



Ответ: ________________ .

17. Из формулы $R = \dfrac{abc}{4S}$ выразите переменную a (все величины положительны).

Ответ: ________________ .

18. Решите неравенство $3x^2 - 6x > 0$.

Ответ: ______________ .

ЧАСТЬ 2

При выполнении заданий 19–23 используйте бланк ответов № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение.

---

19. Сократите дробь $\dfrac{75^{n+1}}{3^{n+2} \cdot 5^{2n+2}}$.

20. $ABCD$ — равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC, диагонали которой пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOD и BOC подобны.

21. Длина изгороди вокруг садового участка на 5 м больше ширины изгороди. Найдите ширину изгороди, если площадь садового участка (имеющего прямоугольную форму) равна 204 м^2.

22. Постройте график функции $y = \dfrac{2x - x^2}{x - 2}$ и определите, при каких значениях p прямая $y = p$ не имеет с этим графиком точек пересечения.

23. В треугольнике ABC стороны равны 5,6 и 9. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

ВАРИАНТ 3

ЧАСТЬ 1

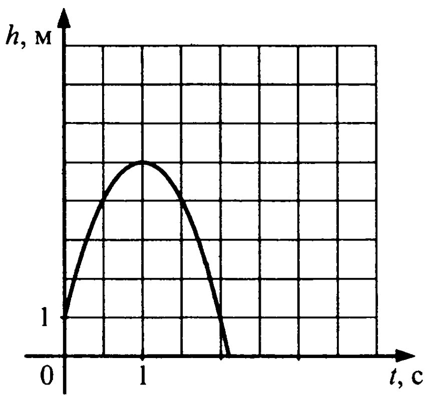
1. Вычислите значение выражения

$$\left(2\cdot 10^{-3}\right)\cdot\left(3,5\cdot 10^{2}\right).$$

Ответ: ______________ .

---

2. Камень подбросили вертикально вверх, и он упал на землю. На рисунке изображен график зависимости высоты камня над землей от времени полета. Сколько метров пролетел камень за первые 1,5 с?

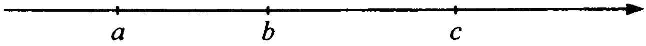


Ответ: ______________ .

3. Стоимость электрического чайника после уценки на 20% составила 4000 рублей. Какова была первоначальная цена чайника? Ответ дайте в рублях.

Ответ: ______________ .

4. На координатной прямой отмечены числа a, b и c.



Из следующих утверждений выберите верное.

1) $|a-b|<0$

2) $b-a<0$

3) $c-b>0$

4) $b-c>0$

5. Расположите в порядке возрастания: $2\frac{1}{3}-4$, $\frac{5-7}{2}$; $4\sqrt{443}$.

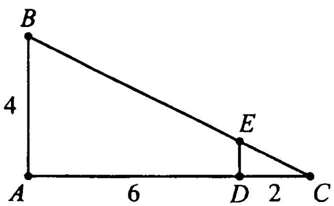
1) $2\frac{1}{3}-4$, $\frac{5-7}{2}$, $4\sqrt{443}$

2) $\frac{5-7}{2}$, $2\frac{1}{3}-4$, $4\sqrt{443}$

3) $4\sqrt{443}$, $\frac{5-7}{2}$, $2\frac{1}{3}-4$

4) $\frac{5-7}{2}$, $4\sqrt{443}$, $2\frac{1}{3}-4$

6. Исходя из данных рисунка, найдите длину отрезка DE.

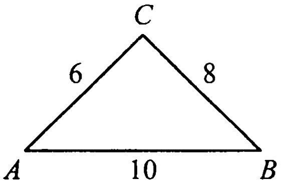


Ответ: ________________ .

7. Решите уравнение $x^2+x=0$.

Ответ: ________________ .

8. Найдите угол C треугольника (см. рис.).



Ответ: ______________ .

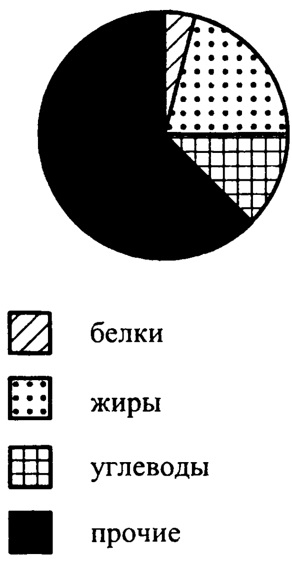
9. Найдите значение выражения

$\frac{a^3 - b^3}{3} : (a - b)$ при $a = 6$ и $b = 3$.

Ответ: ______________ .

10. На круговой диаграмме представлено содержание различных питательных веществ в некотором продукте.

Каких веществ содержится в этом продукте меньше всего?



1) белков
2) жиров
3) углеводов
4) прочих

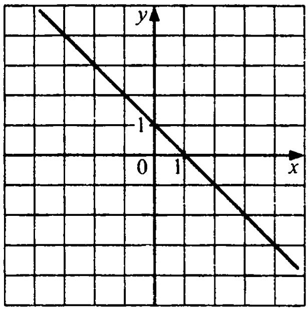
11. В партии из 1000 компьютеров оказалось 5 бракованных. Какова вероятность купить исправный компьютер?

Ответ: ________________ .

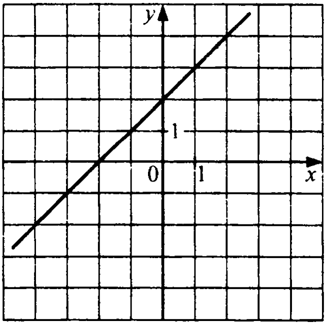
12. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

График функции

А)



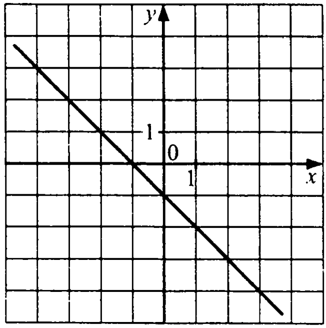
Б)



Формула

1) $y = x + 2$
2) $y = -x - 1$
3) $y = 1 - x$
4) $y = 2 - x$

В)



Ответ:

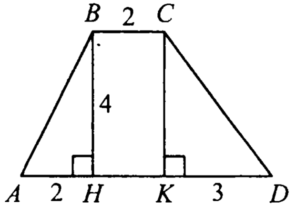
А	Б	В

13. Арифметическая прогрессия задана несколькими первыми членами: –5; –8; –11; ...

Найдите одиннадцатый член этой прогрессии.

Ответ: ________________ .

14. Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



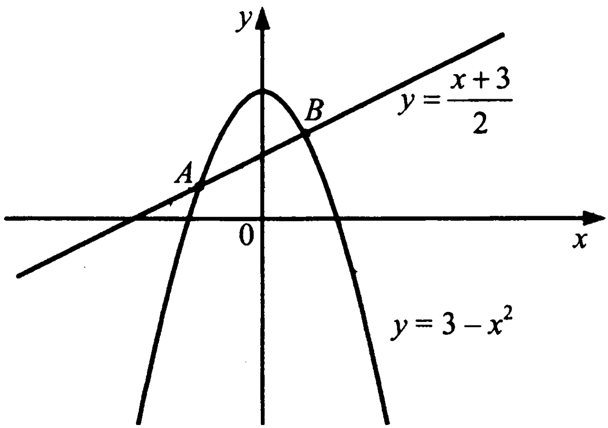
Ответ: ________________ .

15. Укажите номера верных утверждений.

1) Диагонали трапеции пересекаются под прямым углом

2) В любой четырехугольник можно вписать окружность
3) Центр окружности, описанной около треугольника, находится в точке пересечения его высот
4) Медиана — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны
5) Диагонали ромба равны

16. Прямая и парабола пересекаются в точках A и B. Найдите координаты точки B.



Ответ: ________________ .

17. Из формулы $E = \frac{mv^2}{2}$ выразите переменную m (все величины положительны).

Ответ: ________________ .

18. Решите неравенство $2x^2 - 3x + 1 \le x^2 - 1$.

Ответ: ________________ .

ЧАСТЬ 2

При выполнении заданий 19–23 используйте бланк ответов № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение.

19. Сократите дробь $\dfrac{3^{n-1}\cdot 5^{2n-1}}{75^n}$.

20. Докажите, что вписанный угол, равный 45°, опирается на дугу, равную четверти окружности.

21. Двое рабочих могут выполнить всю работу за 1 час 20 минут. За сколько часов выполнит всю работу второй рабочий, если известно, что он работает вдвое быстрее первого?

22. Постройте график функции $y=\dfrac{x^2-x^3}{x-1}$ и определите, при каких значениях p прямая $y=p$ имеет с этим графиком только одну общую точку.

23. В треугольнике ABC стороны равны 2,3 и 4. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

ВАРИАНТ 4

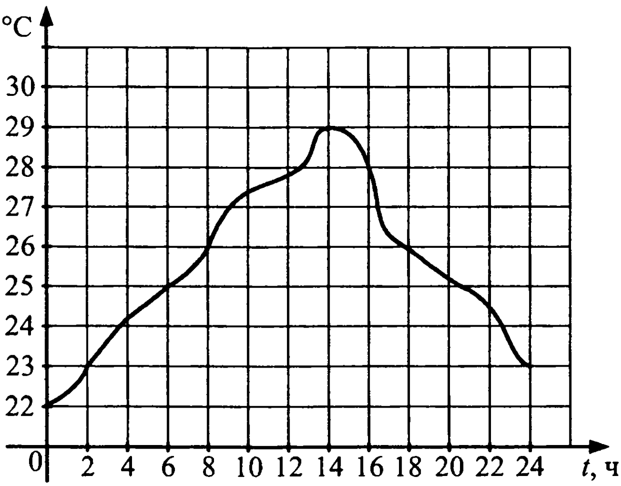
ЧАСТЬ 1

1. Найдите значение выражения $\sqrt{29^2 - 20^2}$.

Ответ: ______________ .

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха в течение суток.

Во сколько часов был достигнут температурный максимум за эти сутки?

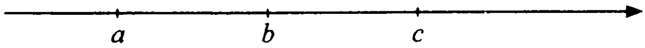


Ответ: ______________ .

3. Тест по математике содержит 36 заданий, причем задания по алгебре и геометрии содержатся в тесте в отношении 7:5. Сколько заданий по геометрии содержит данный тест?

Ответ: ______________ .

4. На координатной прямой отмечены числа a, b и c.



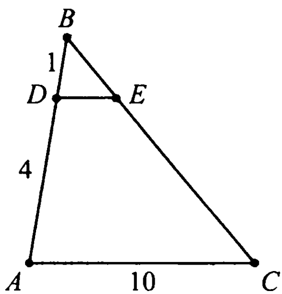
Из следующих утверждений выберите верное.

1) $a - b > 0$
2) $a - c > 0$
3) $b - a > 0$
4) $c - b < 0$

5. Укажите наименьшее из чисел:

1) $4\sqrt{7}$
2) $4\sqrt{10}$
3) 11
4) $\sqrt{113}$

6. Исходя из данных рисунка, найдите длину отрезка DE.

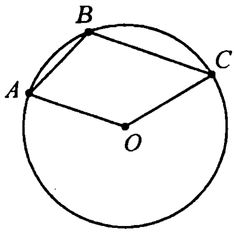


Ответ: ______________ .

7. Решите уравнение $(2x-1)^2 = 3x^2 - 4x + 17$.

Ответ: ______________ .

8. Найдите угол ABC, если точка O — центр окружности и $\angle AOC = 130°$ (см. рис.).



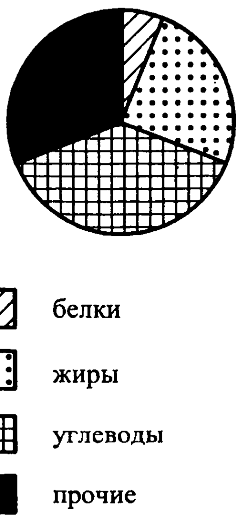
Ответ: ________________ .

9. Найдите значение выражения $\sqrt{x^2-2x+1}$ при $x=2013$.

Ответ: ________________ .

10. На круговой диаграмме представлено содержание различных питательных веществ в некотором продукте.

Содержание каких веществ в этом продукте находится в пределах от 20% до 30%?



1) белков   3) углеводов
2) жиров   4) прочих

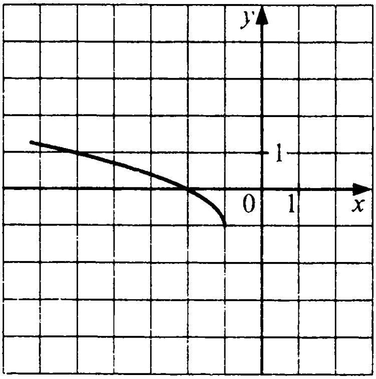
11. Доля брака при производстве часов составляет 0,4%. Найдите вероятность того, что только что купленные часы окажутся исправными.

Ответ: ________________ .

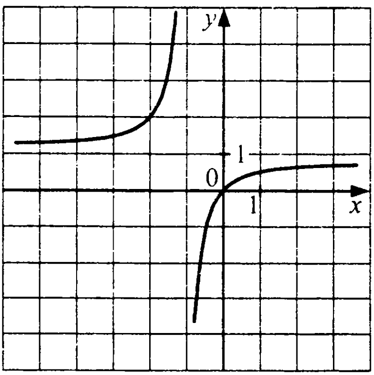
12. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

График функции

А)



Б)



Формула

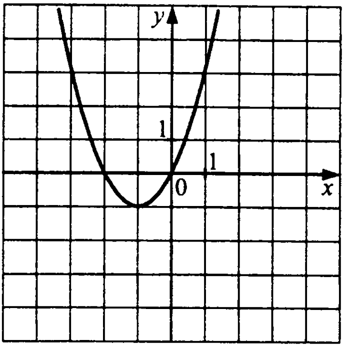
1) $y = x^2 + 2x$

2) $y = \sqrt{-x-1} - 1$

3) $y = -\dfrac{1}{x+1} + 1$

4) $y = x^2 - 2x$

В)



Ответ:

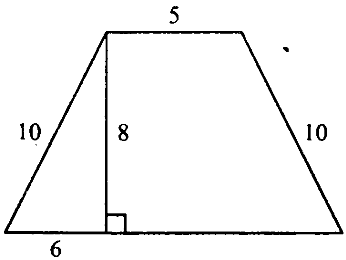
А	Б	В

13. Геометрическая прогрессия задана своим вторым и пятым членами: $b_2 = 1$; $b_5 = 8$.

Найдите сумму первых семи ее членов.

Ответ: ________________ .

14. Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



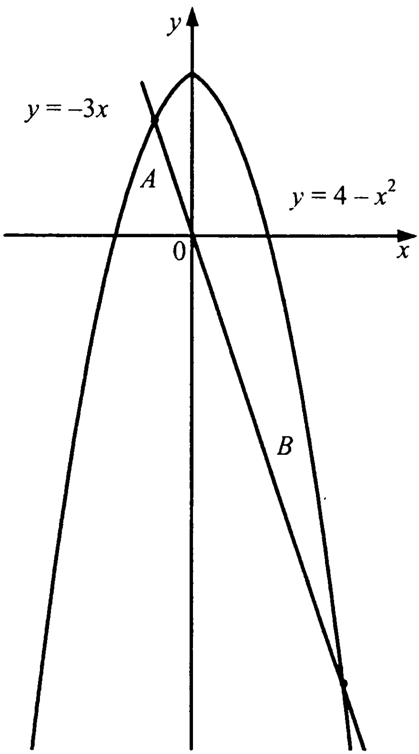
Ответ: ________________ .

15. Укажите номера верных утверждений.

1) Через две точки можно провести несколько различных прямых

2) Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия
3) Диагональ трапеции равна квадратному корню из суммы квадратов ее оснований
4) Центр окружности, вписаннной в треугольник, лежит на перессечении биссектрис треугольника
5) Касательная к окружности образует с радиусом этой окружности развернутый угол

16. На рисунке изображены графики функций $y = 4 - x^2$ и $y = -3x$. Вычислите координаты точки B.



Ответ: ________________ .

17. Из формулы $Q = cm(t_2 - t_1)$ выразите переменную t_1 (все величины положительны).

Ответ: ______________ .

18. Решите неравенство $3x^2 - 6x + 1 \geq x^2 - x - 1$.

Ответ: ______________ .

ЧАСТЬ 2

При выполнении заданий 19–23 используйте бланк ответов № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение.

---

19. Сократите дробь $\dfrac{216^{n-1}}{3 \cdot 6^n \cdot 2^{2n-1} \cdot 3^{2n+1}}$.

20. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что треугольники ACD и ADF равны.

21. Первый и второй рабочий выполняют всю работу за 1 час 20 минут, второй и третий – за 2 часа 40 минут, первый и третий – за 1 час 36 минут. За сколько часов выполнит всю работу третий рабочий, работая один?

22. Постройте график функции $y = \dfrac{x^3 - 1}{1 - x}$ и определите, при каких значениях p прямая $y = p$ имеет с этим графиком только одну общую точку.

23. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ со стороной 1 найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ACD

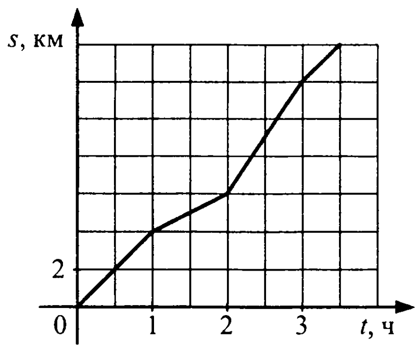
ВАРИАНТ 5

ЧАСТЬ 1

1. Про целое число x известно, что оно больше 1378, меньше 1400 и делится на 13. Найдите это число.

Ответ: ______________ .

2. На рисунке изображен график зависимости пройденного пешеходом пути от времени движения. Найдите наибольшую скорость, которую развил пешеход за все время движения.

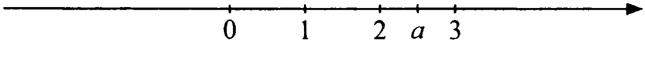


Ответ: ______________ .

3. Средний вес мальчиков того же возраста, что и Андрей, равен 56 кг. Вес Андрея составляет 110% от среднего веса. Сколько килограммов весит Андрей?

Ответ: ______________ .

4. На координатной прямой отмечено число a.



Из следующих утверждений выберите верное.

1) $2-|a|<0$

2) $\sqrt{a}>2$

3) $3-a<0$

4) $a-2<0$

5. Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{5}{11}$?

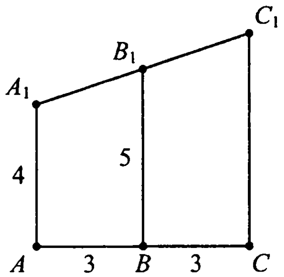
1) $[0,3;0,4]$

2) $[0,4;0,5]$

3) $[0,5;0,6]$

4) $[0,6;0,7]$

6. Исходя из данных рисунка, найдите длину отрезка CC_1.



Ответ: ________________ .

7. Решите уравнение $x+\frac{x}{4}=3$.

Ответ: ________________ .

8. Один угол ромба в 2 раза меньше другого угла этого ромба. Найдите больший угол ромба.

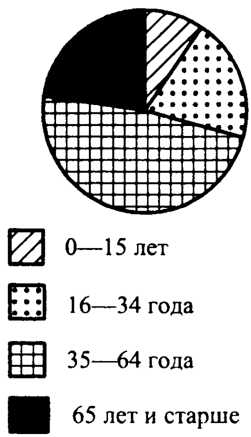
Ответ: ________________ .

9. Найдите второй двучлен в разложении на множители квадратного трехчлена:

$$2x^2 - x - 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(...).$$

Ответ: ________________ .

10. На круговой диаграмме показано распределение населения Российской Федерации по возрастному составу.



Определите, процентная доля людей какой возрастной группы превышает 35%.

1) 0—15 лет
2) 16—34 года
3) 35—64 года
4) 65 лет и старше.

11. Из класса, в котором учатся 12 мальчиков и 8 девочек, выбирают по жребию одного дежурного. Найдите вероятность того, что дежурным окажется мальчик.

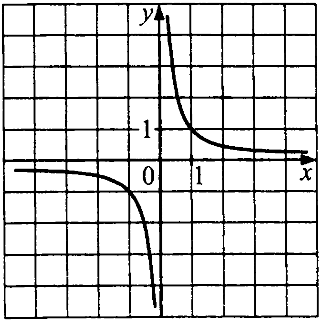
Ответ: ________________ .

12. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

График функции

Формула

А)



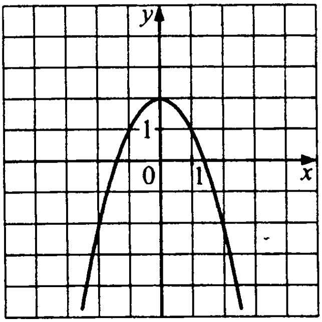
1) $y = 2 - x^2$

2) $y = -2x$

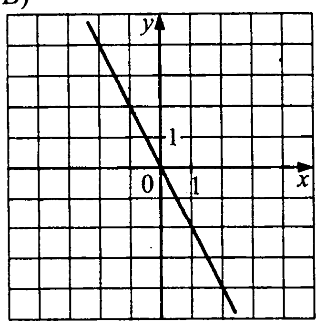
3) $y = -\dfrac{1}{x}$

4) $y = \dfrac{1}{x}$

Б)



В)



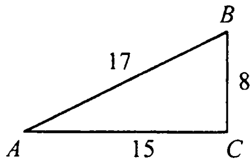
Ответ:

А	Б	В

13. Арифметическая прогрессия задана несколькими первыми членами: 3; 7; 11; ... Найдите сумму первых двадцати пяти ее членов.

Ответ: ________________ .

14. Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке.

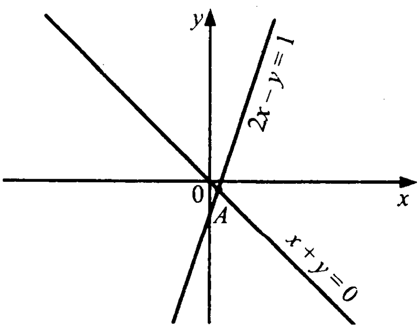


Ответ: ________________ .

15. Укажите номера верных утверждений:

1) Сумма углов прямоугольного треугольника равна 90°.
2) Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, опущенную на это основание.
3) Сумма двух сторон треугольника меньше третьей стороны.
4) Вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу.
5) Площадь трапеции равна полусумме ее оснований.

16. Две прямые пересекаются в точке A (см. рис.). Найдите координаты точки A.



Ответ: ________________ .

17. Из формулы $S = p \cdot r$ выразите переменную r (все величины положительны).

Ответ: ______________ .

18. Решите неравенство $2x^2 - x - 1 \leq 0$.

Ответ: ______________ .

ЧАСТЬ 2

При выполнении заданий 19–23 используйте бланк ответов № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение.

19. Сократите дробь $\dfrac{250^n}{2^{n-1} \cdot 5^{3n+1}}$.

20. В треугольнике ABC проведены медианы AK и BM, пересекающиеся в точке O. Докажите, что площади треугольников MOK и AOB относятся как 1:4.

21. Из города А в город В, расстояние между которыми 400 км, выехал автобус.

Через час вслед за ним выехал легковой автомобиль, скорость которого на 20 км/ч больше, чем скорость автобуса. В город В они въехали одновременно.

Найдите скорость автобуса.

22. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - 2x}{2 - x}$ и определите, при каких значениях p прямая $y = p$ не имеет с этим графиком точек пересечения.

23. В треугольнике ABC стороны равны 2,3 и 4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

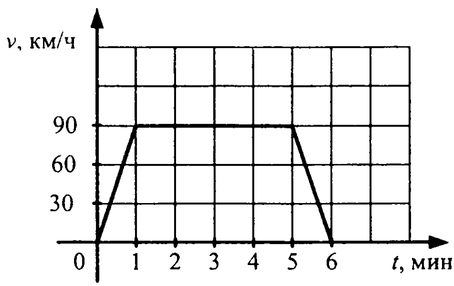
ВАРИАНТ 6

ЧАСТЬ 1

1. Найдите значение выражения $\dfrac{0{,}4}{0{,}3-0{,}7}$.

Ответ: ________________ .

2. На рисунке изображен график зависимости скорости движения автомобиля от времени, затраченного на движение. Какое расстояние автомобиль проехал с постоянной скоростью?

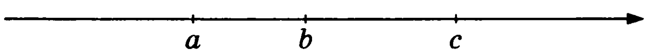


Ответ: ________________ .

3. Стоимость экскурсии составляет 200 р. для взрослых и 100 р. для детей. Для групп более 10 человек предоставляется скидка 10%. Сколько рублей заплатит за экскурсию группа, состоящая из 3 взрослых и 8 детей?

Ответ: ________________ .

4. На координатной прямой отмечены числа a, b и c.



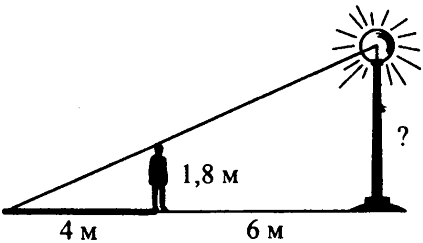
Из следующих утверждений выберите верное.

1) $a - b > 0$
2) $3b > 3c$
3) $c - a \geq 0$
4) $b - c > 0$

5. Укажите наибольшее из чисел:

1) $\sqrt{37}$
2) 6
3) $2\sqrt{5}$
4) $3\sqrt{7}$

6. Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 6 метров от столба, на котором висит фонарь (см. Рис.). Человек отбрасывает тень длиной 4 м. Найдите высоту столба.



Ответ: ______________ .

7. Решите уравнение $10 - 2(x - 4) = 1 + 3x$.

Ответ: ______________ .

8. Острый угол прямоугольного треугольника в 4 раза больше другого острого угла этого треугольника. Найдите меньший угол этого треугольника.

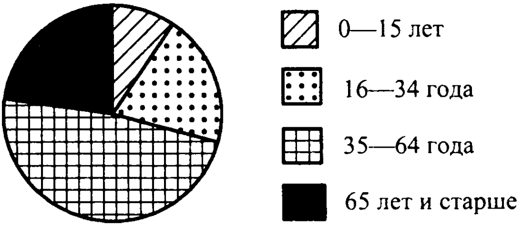
Ответ: ______________ .

9. Найдите значение выражения

$$\frac{a^2 - b^2}{2ab} : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \text{ при } a = 1\frac{1}{3} \text{ и } b = 2\frac{2}{3}.$$

Ответ: ______________ .

10. На круговой диаграмме показано распределение населения Российской Федерации по возрастному составу.



Определите, людей какой возрастной группы больше всего в Российской Федерации.

1) 0—15 лет
2) 16—34 года
3) 35—64 года
4) 65 лет и старше.

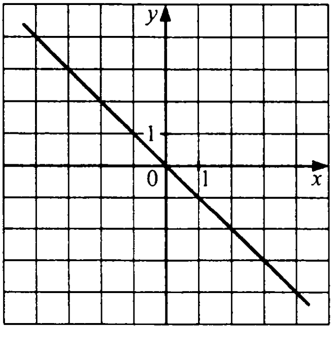
11. В урне лежит 3 белых, 2 желтых и 5 красных шаров. Найдите вероятность того, что извлеченный наугад шар будет желтого цвета.

Ответ: ________________ .

12. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

График функции

А)



Формула

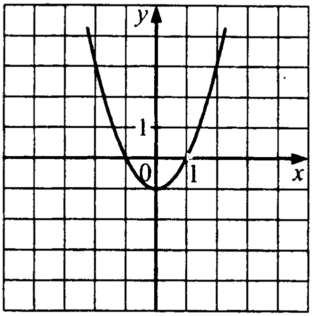
1) $y = -x^2 - 1$

2) $y = -x$

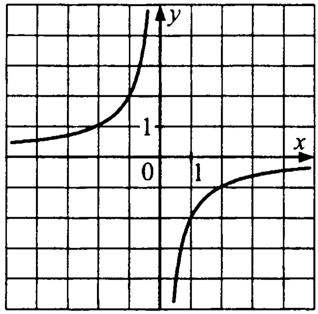
3) $y = -\dfrac{2}{x}$

4) $y = x^2 - 1$

Б)



В)



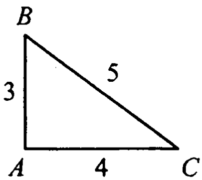
Ответ:

А	Б	В

13. Арифметическая прогрессия задана несколькими первыми членами: 2; –1; –4; ... Найдите сумму первых десяти ее членов.

Ответ: ________________ .

14. Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке.



Ответ: ________________ .

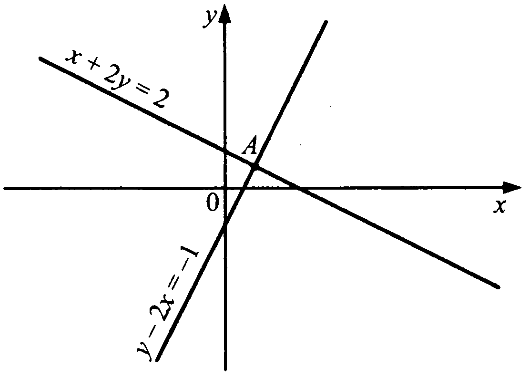
15. Укажите номера верных утверждений:

1) Площадь треугольника равна произведению его основания на высоту.
2) Гипотенуза равна сумме квадратов катетов.
3) Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то эти треугольники подобны.

4) Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам.

5) Площадь квадрата равна квадрату его диагонали.

16. Две прямые пересекаются в точке A (см. рис.). Найдите координаты точки A.



Ответ: ________________ .

17. Из формулы $a^2 + b^2 = c^2$ выразите переменную b (все величины положительны, причем $a < c$).

Ответ: ________________ .

18. Решите неравенство $2(x-1)(x+2) \le 0$.

Ответ: ________________ .

ЧАСТЬ 2

При выполнении заданий 19–23 используйте бланк ответов № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение.

19. Сократите дробь $\dfrac{50^{n-1}}{5^{2n+1} \cdot 2^{n-2}}$.

20. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BK и CL, пересекающиеся в точке O. Докажите, что треугольники KOL и BOC подобны, если известно, что отрезок KL параллелен стороне BC.

21. Сумма цифр двузначного числа равна 8. Найдите это число, если известно, что если из каждой его цифры отнять по 2, то это число уменьшится вдвое.

22. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$ и определите, при каких значениях p прямая $y = p$ не имеет с этим графиком точек пересечения.

23. В треугольнике ABC стороны равны 5,6 и 7. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

ВАРИАНТ 7

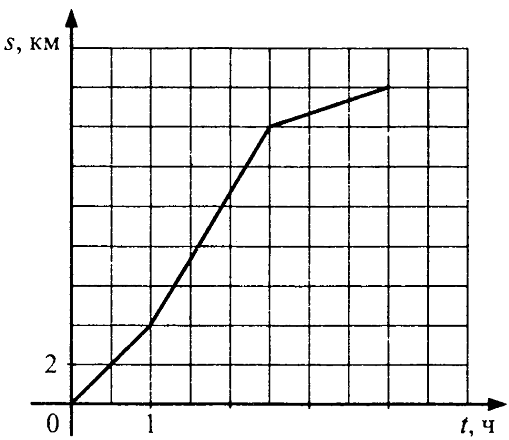
ЧАСТЬ 1

1. Найдите значение выражения

$$3,2 \cdot 2,1 - 1,2 \cdot 0,1.$$

Ответ: ________________ .

2. На рисунке изображен график зависимости пройденного пешеходом пути от времени движения. Найдите наибольшую скорость, которую развил пешеход за все время движения.

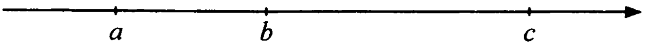


Ответ: ________________ .

3. Билет в кино стоит 250 рублей, а билет в театр на 20% дороже билета в кино. Сколько рублей стоит билет в театр?

Ответ: ________________ .

4. На координатной прямой отмечены числа a, b и c.



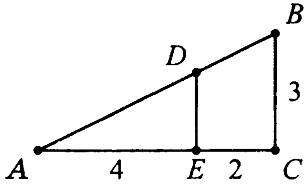
Из следующих утверждений выберите верное.

1) $c - a < 0$ 3) $a - c > 0$
2) $b - c > 0$ 4) $c - b > 0$

5. Какому из данных промежутков принадлежит число $\sqrt{3}$?

1) $[1;1,3]$ 3) $[1,6;2]$
2) $[1,3;1,6]$ 4) $[2;4]$

6. Исходя из данных рисунка, найдите длину отрезка DE.

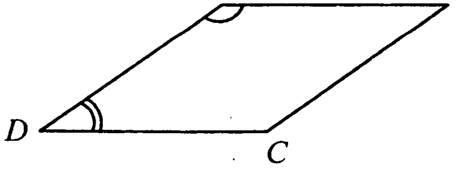


Ответ: ________________ .

7. Решите уравнение $\frac{x}{2} - \frac{x}{11} = 9$.

Ответ: ________________ .

8. Угол A параллелограмма в 4 раза больше угла D (см. рис.). Найдите угол C.



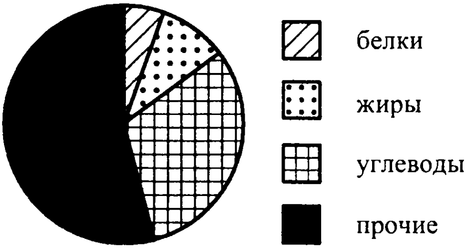
Ответ: ________________ .

9. Запишите разложение на множители квадратного трехчлена $x^2 - x - 2$.

Ответ: ______________ .

10. На круговой диаграмме представлено содержание различных питательных веществ в некотором продукте.

Каких веществ в этом продукте содержится больше всего?



1) белков
2) жиров
3) углеводов
4) прочих

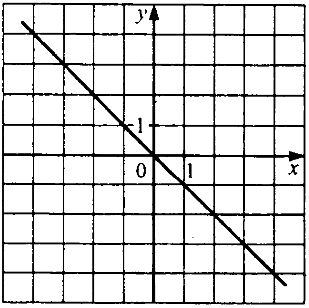
11. Одновременно бросают две монеты. Найдите вероятность того, что на обеих монетах выпадет орел.

Ответ: ______________ .

12. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

График функции

А)



Формула

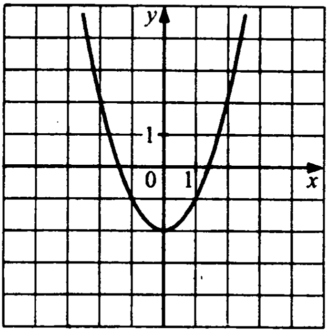
1) $y = -x$

2) $y = \sqrt{x} - 1$

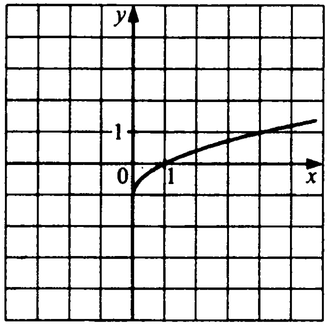
3) $y = \sqrt{x - 1}$

4) $y = x^2 - 2$

Б)



В)

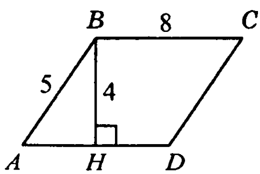


	А	Б	В
Ответ:			

13. Геометрическая прогрессия задана несколькими первыми членами: 1; 3; 9; ... Найдите сумму первых восьми ее членов.

Ответ: ________________ .

14. Найдите площадь параллелограмма, изображенного на рисунке.



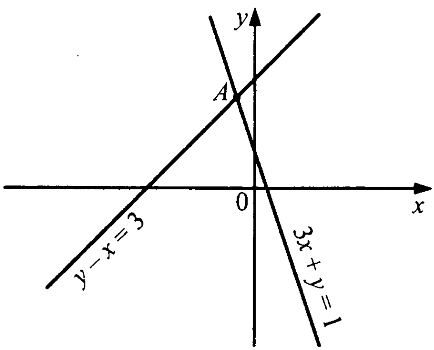
Ответ: ________________ .

15. Укажите номера верных утверждений:

1) Сумма углов треугольника равна 180°.

2) Вертикальные углы равны.
3) Смежные углы равны.
4) Площадь ромба равна произведению его диагоналей.
5) Площадь параллелограмма равна половине произведения его основания на высоту.

16. Две прямые пересекаются в точке A (см. рис.). Найдите координаты точки A.



Ответ: ________________ .

17. Из формулы $S = \frac{abc}{4R}$ выразите переменную R (все величины положительны).

Ответ: ________________ .

18. Решите неравенство $3(x - 3)(x + 5) > 0$.

Ответ: ________________ .

ЧАСТЬ 2

При выполнении заданий 19–23 используйте бланк ответов № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение.

19. Сократите дробь $\frac{147^{n-1}}{3^{n-1} \cdot 7^{2n-1}}$.

20. В ромбе $ABCD$ угол A – острый. Из точки B опущены высоты BK и BL на стороны AD и CD соответственно. Докажите, что треугольники ABK и BCL равны.

21. Из города А в город В, расстояние между которыми 240 км, выехал автобус.

Через 1 час 36 минут вслед за ним выехал легковой автомобиль, скорость которого на 40 км/ч больше, чем скорость автобуса. В город В они въехали одновременно.

Найдите скорость легкового автомобиля.

22. Постройте график функции $y = \frac{2x^2 - 2x}{1-x}$ и определите, при каких значениях p прямая $y = p$ не имеет с этим графиком точек пересечения.

23. В треугольнике ABC стороны равны 3,7 и 8. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

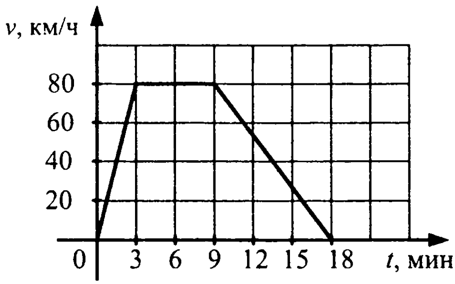
ВАРИАНТ 8

ЧАСТЬ 1

1. Найдите значение выражения $\dfrac{3,6 \cdot 2,2}{4,8}$.

Ответ: ________________ .

2. На рисунке изображен график зависимости скорости движения автомобиля от времени, затраченного на движение. Какое расстояние автомобиль проехал с постоянной скоростью?

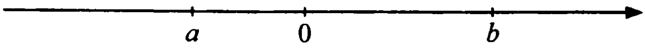


Ответ: ________________ .

3. Стоимость экскурсии составляет 300 р. для взрослых и 200 р. для детей. Для групп более 8 человек предоставляется скидка 15%. Сколько рублей заплатит за экскурсию группа, состоящая из 4 взрослых и 6 детей?

Ответ: ________________ .

4. На координатной прямой отмечены числа a и b.



Из следующих утверждений выберите верное.

1) $a - b > 0$

2) $\dfrac{2|a|}{b} > 0$

3) $b - a < 0$

4) $b + a < 0$

5. Укажите наименьшее из чисел:

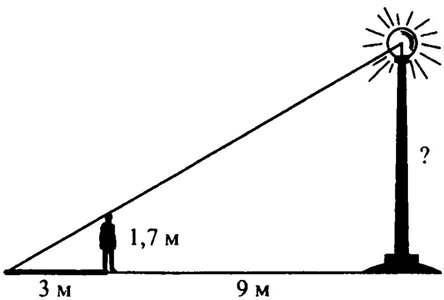
1) $\sqrt{11}$

2) $2\sqrt{2}$

3) 3

4) $\sqrt{7}$

6. Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 9 метров от столба, на котором висит фонарь (см. рис.). Человек отбрасывает тень длиной 3 м. Найдите высоту столба.



Ответ: ______________ .

7. Решите уравнение $7 - 3(2 - x) = 5x - 2$.

Ответ: ______________ .

8. Один угол ромба в 2 раза меньше другого угла этого ромба. Найдите меньший угол ромба.

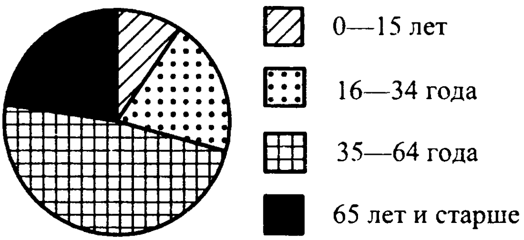
Ответ: ________________ .

9. Найдите значение выражения

$\frac{a-b}{2} : \frac{a^2-b^2}{4}$ при $a = -1{,}2$ и $b = 2{,}2$.

Ответ: ________________ .

10. На круговой диаграмме показано распределение населения Российской Федерации по возрастному составу.



Определите, людей какой возрастной группы меньше всего в Российской Федерации.

1) 0—15 лет
2) 16—34 года
3) 35—64 года
4) 65 лет и старше.

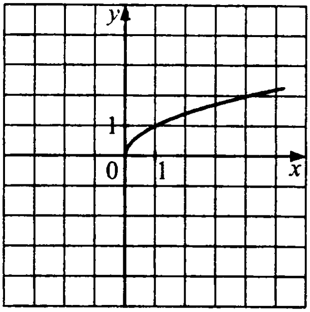
11. В урне лежит 5 синих, 3 зеленых и 12 красных шаров. Найдите вероятность того, что извлеченный наугад шар будет синего цвета.

Ответ: ________________ .

12. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

График функции | Формула

А)



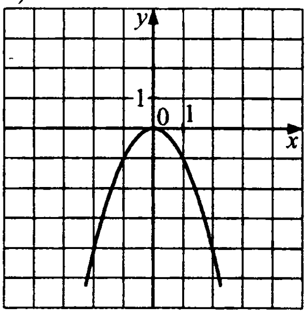
1) $y = 2x$

2) $y = -2x$

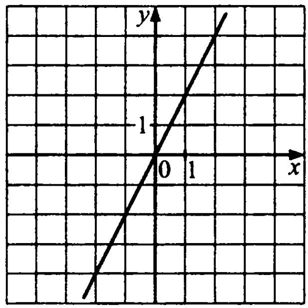
3) $y = -x^2$

4) $y = \sqrt{x}$

Б)



В)



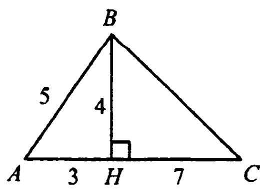
Ответ:

А	Б	В

13. Геометрическая прогрессия задана несколькими первыми членами: 2; –6; 18; ... Найдите сумму первых пяти ее членов.

Ответ: ________________ .

14. Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке.

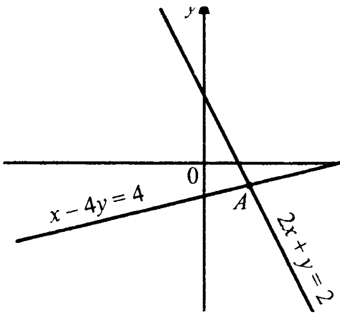


Ответ: ________________ .

15. Укажите номера верных утверждений:

1) Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.
2) Сумма углов треугольника равна 360°.
3) Катет всегда больше гипотенузы.
4) Все равнобедренные треугольники равны.
5) Все углы правильного шестиугольника равны 135°.

16. Две прямые пересекаются в точке A (см. рис.). Найдите координаты точки A.



Ответ: ________________ .

17. Из формулы $\frac{a}{b}=\frac{c^2}{d}$ выразите переменную c (все величины положительны).

Ответ: ________________ .

18. Решите неравенство $3x-x^2>0$.

Ответ: ________________ .

ЧАСТЬ 2

При выполнении заданий 19–23 используйте бланк ответов № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение.

19. Сократите дробь $\dfrac{72^{n+1}}{2^{n+3}\cdot 6^{2n+1}}$.

20. В треугольнике ABC проведены медианы AK и BM, пересекающиеся в точке O. Докажите, что треугольники MOK и AOB подобны.

21. Сумма цифр двузначного числа равна 11, а сумма их квадратов равна 73. Найдите это число.

22. Постройте график функции $y=\dfrac{x-x^2}{x-1}$ и определите, при каких значениях p прямая $y=p$ не имеет с этим графиком точек пересечения.

23. В треугольнике ABC стороны равны 3,5 и 6. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

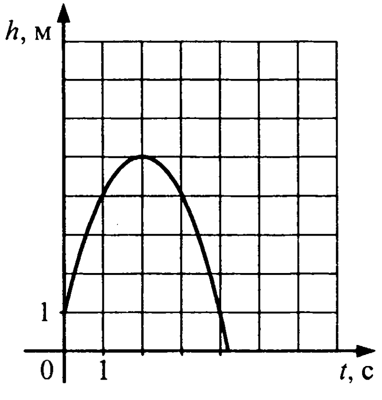
ВАРИАНТ 9

ЧАСТЬ 1

1. Сколько целых чисел расположено между $-\sqrt{67}$ и $\sqrt{3}$?

Ответ: ________________ .

2. Камень подбросили вертикально вверх, и он упал на землю. На рисунке изображен график зависимости высоты камня над землей от времени полета. Сколько метров пролетел камень за первые 4 с?

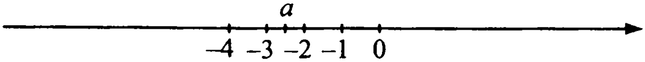


Ответ: ________________ .

3. Сберегательный банк начисляет на вклад «Престиж» 9% годовых. Сколько рублей будет на счету вкладчика, открывшего данный тип вклада на сумму 220 тыс. р. Через 1 год?

Ответ: ________________ .

4. На координатной прямой отмечено число a.



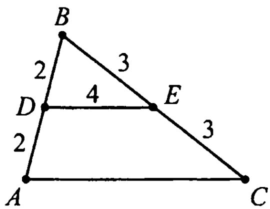
Из следующих утверждений выберите верное.

1) $2-a<0$ 3) $a+3<0$
2) $|a|-2>0$ 4) $4+2a>0$

5. Укажите, какое из следующих выражений принимает наименьшее значение:

1) $-5^0\cdot10^{-2}$ 3) $33:(-333)$
2) $-\sqrt{10^{-4}}$ 4) $-0{,}1$

6. Исходя из данных рисунка, найдите длину отрезка AC.

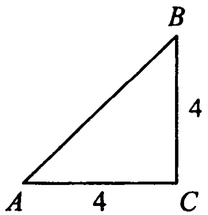


Ответ: ______________ .

7. Решите уравнение $(x-1)^2=(x+4)^2$.

Ответ: ______________ .

8. Найдите угол A (см. рис.).



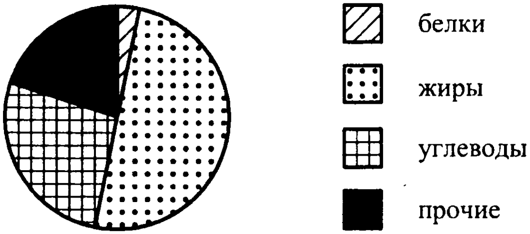
Ответ: ______________ .

9. Упростите выражение $u^2-(u-1)^2-2u$.

Ответ: ______________ .

10. На круговой диаграмме представлено содержание различных питательных веществ в некотором продукте.

Содержание каких веществ в этом продукте больше 45%?



1) белков 3) углеводов
2) жиров 4) прочих

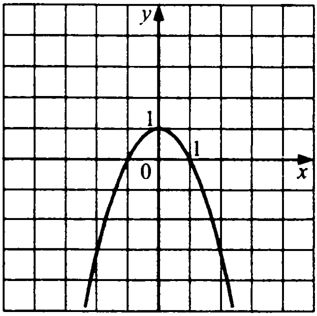
11. Из слова «МАТЕМАТИКА» случайным образом выбирается одна буква. Найдите вероятность того, что эта буква окажется согласной.

Ответ: ______________ .

12. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

График функции

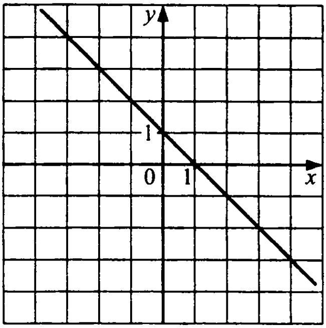
А)



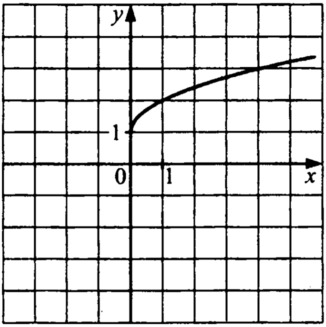
Формула

1) $y=\sqrt{x}+1$
2) $y=\sqrt{x+1}$
3) $y=1-x^2$
4) $y=-x+1$

Б)



В)



Ответ:

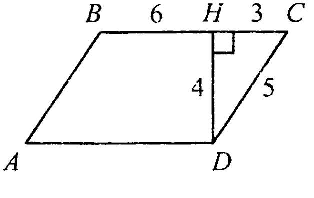
А	Б	В

13. Геометрическая прогрессия задана своим первым членом $b_1 = 256$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$.

Найдите девятый член этой прогрессии.

Ответ: ________________ .

14. Найдите площадь параллелограмма, изображенного на рисунке.



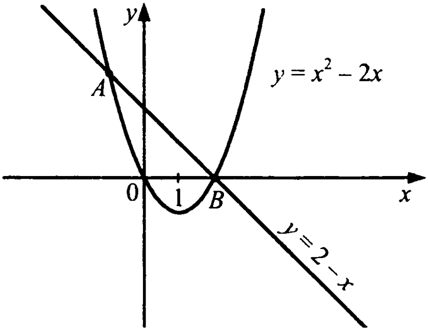
Ответ: ________________ .

15. Укажите номера верных утверждений.

1) Сумма квадратов катетов равна удвоенному квадрату гипотенузы

2) Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны
3) У подобных треугольников площади равны
4) Сумма углов пятиугольника равна 540°
5) Две прямые всегда пересекаются

16. Прямая и парабола пересекаются в точках A и B. Найдите координаты точки B.



Ответ: ________________ .

17. Из формулы $E = mc^2$ выразите переменную c (все величины положительны).

Ответ: ________________ .

18. Решите неравенство $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

Ответ: ________________ .

ЧАСТЬ 2

При выполнении заданий 19–23 используйте бланк ответов № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение.

19. Сократите дробь $\frac{98^{n+2}}{2^{n+1} \cdot 7^{2n+6}}$.

20. Докажите, что вписанный угол, равный 30°, опирается на дугу, равную шестой части окружности.

21. Ширина изгороди вокруг садового участка на 4 м меньше длины изгороди. Найдите длину изгороди, если площадь садового участка (имеющего прямоугольную форму) равна 285 м^2.

22. Постройте график функции $y = \frac{x^3 - x}{x}$ и определите, при каких значениях p прямая $y = p$ не имеет с этим графиком точек пересечения.

23. В треугольнике ABC стороны равны 3,5 и 6. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

ВАРИАНТ 10

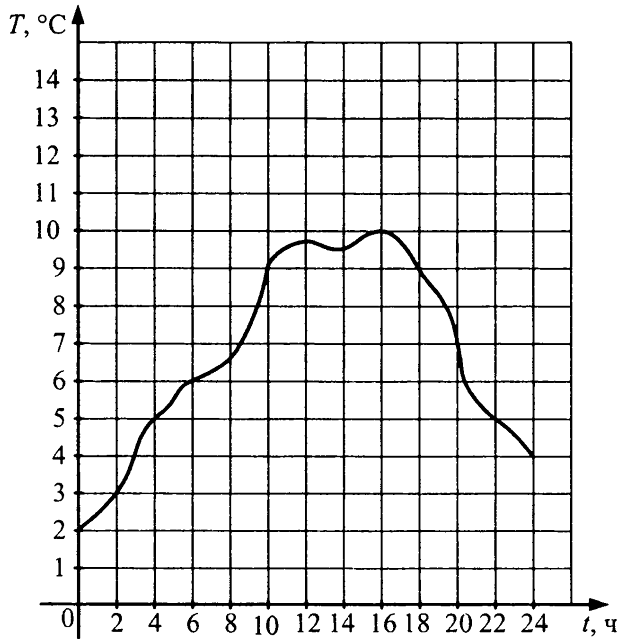
ЧАСТЬ 1

1. Найдите значение выражения $\frac{1,4 \cdot 5,5}{7,7}-1$.

Ответ: ______________ .

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха в течение суток.

Какая наименьшая температура была за эти сутки?

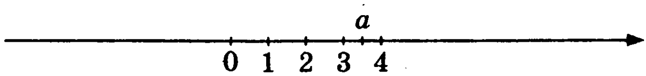


Ответ: ______________ .

3. В период распродаж магазин снижал цены на телевизор дважды: в первый раз на 10%, во второй – на 5%. Сколько будет стоить телевизор после второго снижения цен, если до начала распродажи он стоил 6000 р.? Ответ дайте в рублях.

Ответ: ________________ .

4. На координатной прямой отмечено число a.



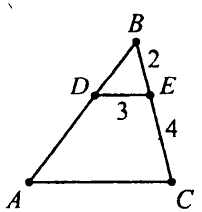
Из следующих утверждений выберите верное.

1) $\sqrt{a}-1>0$
2) $a-3<0$
3) $4-a<0$
4) $|a|+1<0$

5. Какому из выражений равно произведение $0{,}3\cdot 0{,}03\cdot 0{,}003$?

1) $3\cdot 10^{-6}$
2) $2{,}7\cdot 10^{-5}$
3) $3\cdot 10^{-5}$
4) $9\cdot 10^{-6}$

6. Исходя из данных рисунка, найдите длину отрезка AC.

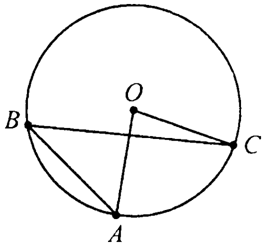


Ответ: ________________ .

7. Решите уравнение $\dfrac{2x-1}{1-x}=4$.

Ответ: ______________ .

8. Найдите угол ABC, если точка O — центр окружности и $\angle AOC = 80^\circ$ (см. рис.).



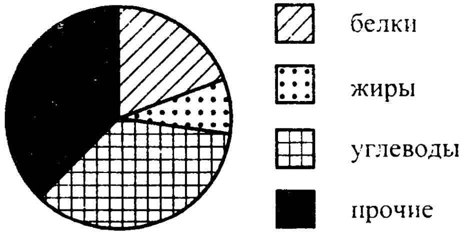
Ответ: ______________ .

9. Сократите дробь $\dfrac{b^3-4b}{b^2-2b}$.

Ответ: ______________ .

10. На круговой диаграмме представлено содержание различных питательных веществ в некотором продукте.

Содержание каких веществ в этом продукте меньше 15%?



1) белков
2) жиров
3) углеводов
4) прочих

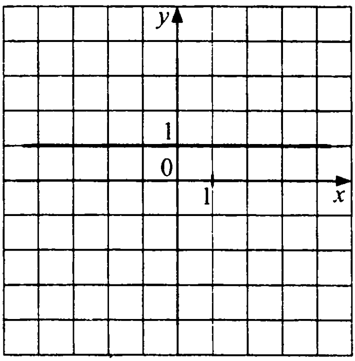
11. На научной конференции будут выступать 3 докладчика из Германии, 2 из России и 5 из Японии. Найдите вероятность того, что последним будет выступать докладчик из России, если порядок выступления определяется жребием.

Ответ: ________________ .

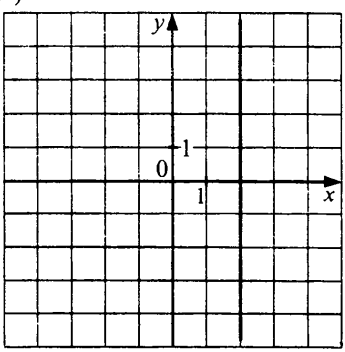
12. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

График функции

А)



Б)



Формула

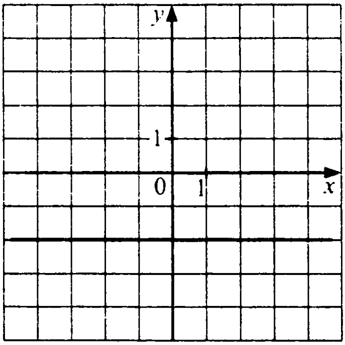
1) $x = 2$

2) $x = -2$

3) $y = 1$

4) $y = -2$

В)



Ответ:

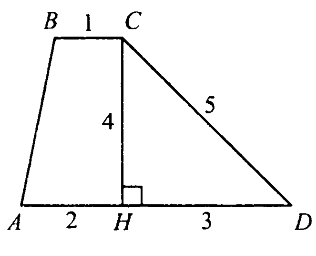
А	Б	В

13. Арифметическая прогрессия задана своим третьим и шестым членами: $a_3 = 4$; $a_6 = 13$.

Найдите сумму первых двадцати ее членов.

Ответ: ________________ .

14. Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



Ответ: ________________ .

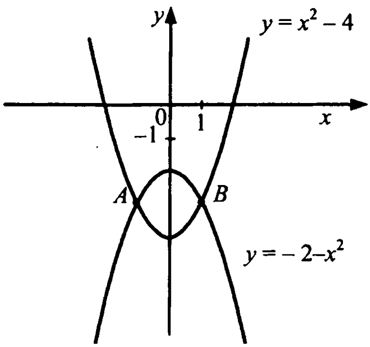
15. Укажите номера верных утверждений.

1) Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, равен 90°

2) Диагонали квадрата пересекаются под прямым углом

3) Длина вектора равна квадратному корню из суммы его координат
4) Гипотенуза длиннее катета
5) Подобные треугольники равны

16. На рисунке изображены графики функций $y = x^2 - 4$ и $y = -2 - x^2$. Вычислите координаты точки B.



Ответ: ________________ .

17. Из формулы $Q = cm(t_2 - t_1)$ выразите переменную t_2 (все величины положительны).

Ответ: ________________ .

18. Решите неравенство $9x - 3x^2 < 0$.

Ответ: ________________ .

ЧАСТЬ 2

При выполнении заданий 19–23 используйте бланк ответов № 2. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение.

19. Сократите дробь $\dfrac{3^{n-1} \cdot 4^{n-1} \cdot 5^{n+1}}{60^n}$.

20. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что угол ACD прямой.

21. Двое рабочих могут выполнить всю работу за 1 час 12 минут. За сколько часов выполнит всю работу первый рабочий, если известно, что он работает в полтора раза медленнее второго?

22. Постройте график функции $y = \dfrac{x - x^3}{x + 1}$ и определите, при каких значениях p прямая $y = p$ имеет с этим графиком только одну общую точку.

23. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ со стороной 1 найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТАМ ТИПОВЫХ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

Часть 1

Номер задания \ Вариант	1	2	3	4	5
1	-2	-1,44	0,7	21	1391
2	3°С	4 м	5 м	14	6 км/ч
3	20	900 000 р.	5000р.	15	61,6 кг.
4	4	1	3	3	1
5	2	3	1	1	2
6	2,5	8	1	2	6
7	-4;1	$\frac{11}{7}$	-1;0	±4	2,4
8	90°	135°	90°	115°	120°
9	$-3a-1$	4	21	2012	$x-1$
10	3	$2a^2-3ab+b^2$	1	2	3
11	0,98	0,5	0,995	0,996	0,6
12	142	314	312	231	412
13	512	30	–35	63,5	1275
14	76	210	18	88	60
15	1	3,4	4	2,4	2,4
16	(–2; 1)	(–0,8; 1,6)	(1; 2)	(4; –12)	$\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$
17	$v=\sqrt{\frac{2E}{m}}$	$a=\frac{4RS}{bc}$	$m=\frac{2E}{v^2}$	$t_1=t_2-\frac{Q}{cm}$	$r=\frac{S}{p}$
18	$x\in(1;2)$	$x\in(-\infty;0)\cup$ $\cup(2;+\infty)$	$x\in[1;2]$	$x\in(-\infty;0,5]\cup$ $\cup[2;+\infty)$	$x\in[-0,5;1]$

Вариант / Номер задания	6	7	8	9	10
1	-1	6,6	1,65	10	0
2	6 км	$6\frac{2}{3}$ км/ч	8 км	8 м	2°C
3	1260 р.	300 р.	2040 р.	239 800р.	5130р.
4	3	4	2	2	1
5	4	3	4	4	2
6	4,5 м	2	6,8 м	8	9
7	3,4	22	1,5	−1,5	$\frac{5}{6}$
8	18°	144°	60°	45°	40°
9	−2	−0,5	2	−1	$b+2$
10	3	$(x+1)(x-2)$	1	2	2
11	0,2	0,25	0,25	0,5	0,2
12	243	142	431	341	314
13	−115	3280	122	1	530
14	6	32	20	36	12
15	3,4	1,2	1	2,4	1,2,4
16	(0.8; 0,6)	(- 0,5; 2,5)	$\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$	(2; 0)	(1; −3)
17	$b=\sqrt{c^2-a^2}$	$R=\frac{abc}{4S}$	$c=\sqrt{\frac{ad}{b}}$	$c=\sqrt{\frac{E}{m}}$	$t=\frac{Q}{cm}+t_1$
18	$x\in[-2;1]$	$x\in(-\infty;-5)\cup$ $\cup(3;+\infty)$	$x\in(0;3)$	$x\in(-\infty;1]\cup$ $\cup[3;+\infty)$	$x\in(-\infty;0)\cup$ $\cup(3;+\infty)$

Часть 2

Вариант / Номер задания	1	2	3	4	5
19	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{972}$	$\frac{2}{5}$
20	Ответов на это задание нет, так как задание на доказательство				
21	4 ч	12 м	2 ч	8 ч	80км/ч
22	$p = 0$; $p = 1$	$p = -2$	$p = 0$; $p = -1$	$p = -0,75$; $p = -3$	$p = -2$
23	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{27\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{15}}{6}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\frac{8\sqrt{15}}{15}$

Вариант / Номер задания	6	7	8	9	10
19	$\frac{2}{125}$	$\frac{1}{7}$	1,5	$\frac{2}{49}$	$\frac{5}{12}$
20	Ответов на это задание нет, так как задание на доказательство				
21	44	100км/ч	38; 83	19 м	3 ч
22	$p = 1$	$p = -2$	$p = -1$	$p \leq -1$	$p = 0,25$ или $p = -2$
23	$\frac{35\sqrt{6}}{24}$	$\frac{7\sqrt{3}}{3}$	$\frac{45\sqrt{14}}{56}$	$\frac{2\sqrt{14}}{7}$	$\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ТЕСТА

ВАРИАНТ 7

ЧАСТЬ 1

1. $3,2 \cdot 2,1 - 1,2 \cdot 0,1 = 6,72 - 0,12 = 6,6.$

Ответ: 6,6.

2. Скорость пешехода на первом участке пути равна $\frac{4\text{ км}}{1\text{ ч}} = 4$ км/ч, на втором — $\frac{10\text{ км}}{1,5\text{ ч}} = \frac{20}{3}\text{км/ч} = 6\frac{2}{3}\text{км/ч}$, на третьем — $\frac{2\text{ км}}{1,5\text{ ч}} = \frac{4}{3}\text{км/ч} = 1\frac{1}{3}\text{км/ч}$.

Ответ: $6\frac{2}{3}$ км/ч.

3. Найдем 20% от 250: $250 \cdot \frac{20}{100} = \frac{250 \cdot 20}{100} = \frac{5000}{100} = 50$.

Значит, билет в театр стоит 250+50=300 р.

Ответ: 300 р.

4. Исходя из рисунка, имеем, что $c > b$. Поэтому $c - b > 0$.

Ответ: 4.

5. $1,6 = \sqrt{2,56}$; $2 = \sqrt{4}$. Поэтому, так как 2,56<3<4, то $\sqrt{3} \in [1,6; 2]$

Ответ: 3.

6. Треугольники ADE и ABC подобны (исходя из рисунка) с коэффициентом подобия, равным

$$\frac{AE}{AC} = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Поэтому $DE = \frac{2}{3} \cdot BC = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$.

Ответ: 2.

7. $\frac{x}{2} - \frac{x}{11} = 9;$

$\frac{11x - 2x}{22} = 9;$

$\frac{9x}{22} = 9;$

$9x = 22 \cdot 9;$

$x = 22$

Ответ: 22.

8. Так как $\angle A + \angle D = 180°$ и $\angle A = 4\angle D$, то имеем:

$4\angle D + \angle D = 180°;$

$5\angle D = 180°;$

$\angle D = 36° \Rightarrow \angle A = 180° - 36° = 144° = \angle C$

Ответ: 144°.

9. Решим квадратное уравнение $x^2 - x - 2 = 0$.

$D = 1 - 4 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9, \sqrt{D} = 3$.

$x_{1/2} = \frac{1 \pm 3}{2}$;

$x_1 = 2; x_2 = -1$.

Имеем: $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$.

Ответ: $(x-2)(x+1)$..

10. Из диаграммы видно, что больше всего в данном продукте содержится прочих веществ.

Ответ: 4.

11. Всего возможно 4 исхода данного бросания: РР; РО; ОР; ОО (Р — решка, О — орел). Нас устраивает лишь один из них — ОО.

Поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{4} = 0,25$.

Ответ: 0,25.

12. А — график прямой $y = -x$.
Б — график параболы $y = x^2 - 2$.

Чтобы определить, чему соответствует график В, подставим в функции 2) и 3) $x = 0$.

В 3) имеем: $y = \sqrt{x-1}$; $y(0) = \sqrt{0-1} = \sqrt{-1}$ — не имеет смысла.

В 2) имеем: $y = \sqrt{x} - 1$; $y(0) = -1$ — соответствует графику В.

Ответ:

А	Б	В
1	4	2

13. $b_1 = 1$; $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{3}{1} = 3$.

$$S_8 = \frac{b_1(q^8-1)}{q-1} = \frac{3^8-1}{3-1} = \frac{6561-1}{2} = 3280.$$

Ответ: 3280.

14. $S_{ABCD} = AD \cdot BH = BC \cdot BH = 8 \cdot 4 = 32.$

Ответ: 32.

15. Первое и второе утверждение верны для любого треугольника и для всех вертикальных углов.

Сумма смежных углов равна 180°, поэтому третье утверждение будет верным только в случае двух смежных прямых углов, то есть оно в общем случае не является верным.

Четвертое утверждение неверно, так как площадь ромба равна половине от произведения его диагоналей.

Пятое утверждение неверно, так как площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

Ответ: 1, 2.

16. Для нахождения координат точки пересечения двух прямых, решим систему уравнений: $\begin{cases} y - x = 3 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

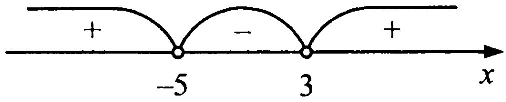
Вычтя из второго уравнения системы первое, получим: $4x = -2$; $x = -0{,}5$; $y = 3 + x = 3 - 0{,}5 = 2{,}5$

Ответ: $(-0{,}5; 2{,}5)$.

17. $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow 4R = \frac{abc}{S} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S}$

Ответ: $R = \frac{abc}{4S}$.

18. $3(x-3)(x+5)>0$. Решим неравенство методом интервалов:



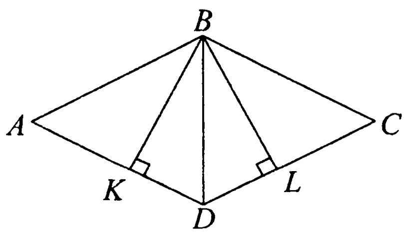
Ответ: $x \in (-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$.

ЧАСТЬ 2

19. $$\frac{147^{n-1}}{3^{n-1}\cdot 7^{2n-1}} = \frac{3^{n-1}\cdot 49^{n-1}}{3^{n-1}\cdot 7^{2n-1}} = \frac{\left(7^2\right)^{n-1}}{7^{2n-1}} = 7^{2n-2-(2n-1)} = 7^{-1} = \frac{1}{7}.$$

Ответ: $\frac{1}{7}$.

20. Угол A треугольника ABK равен углу C треугольника BLC. Так как оба эти треугольника прямоугольные, то отсюда следует, что углы ABK и CBL также равны. Также $AB = BC$,как стороны ромба. Тогда треугольники ABK и BLC равны по второму признаку равенства треугольников (по стороне и двум прилежащим к ней углам), что и требовалось доказать.



21. Пусть x км/ч — скорость легкового автомобиля, тогда скорость автобуса будет равна $(x-40)$ км/ч. 1 час 36 минут $= \frac{8}{5}$ часа.

Составим уравнение по условию задачи и решим его:

$\frac{240}{x-40} = \frac{240}{x} + \frac{8}{5}$; $\frac{240}{x-40} - \frac{240}{x} = \frac{8}{5}$;

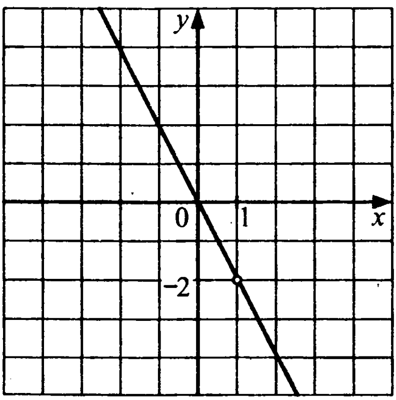
$\frac{9600}{x^2-40x} = \frac{8}{5}$;

$x^2 - 40x - 6000 = 0$; $x_1 = -60$; $x_2 = 100$.

Ответ: 100 км/ч.

22. $y = \frac{2x^2-2x}{1-x} = \frac{2x(x-1)}{(1-x)} = -2x$ при $x \neq 1$.

Графиком этой функции является прямая $y = -2x$ с выколотой точкой $(1; -2)$.



Из рисунка видно, что прямая $y = p$ не будет иметь с этим графиком точек пересечения при $p = -2$.

Ответ: $p = -2$.

23. Полупериметр треугольника равен $p = \dfrac{3+7+8}{2} = 9.$

Найдем площадь треугольника по формуле Герона: $S = \sqrt{9 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1} = 6\sqrt{3}$. Тогда радиус описанной окружности равен $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{3 \cdot 7 \cdot 8}{24\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

Справочное издание

Лаппо Лев Дмитриевич
Попов Максим Александрович

МАТЕМАТИКА

ГОСУДАРСТВЕННАЯ ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ
(в новой форме)

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. AE51. H 16054 от 28.02.2012 г.

Редактор *И.М. Бокова*
Корректор *И.В. Русанова*
Дизайн обложки *М.Н. Ершова*
Компьютерная верстка *И.Ю. Иванова, О.В. Самойлова*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7
Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).